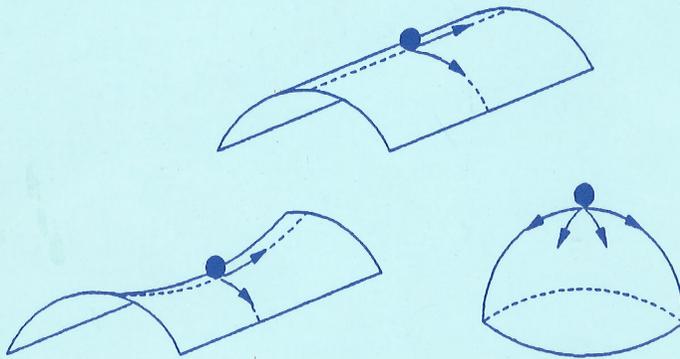


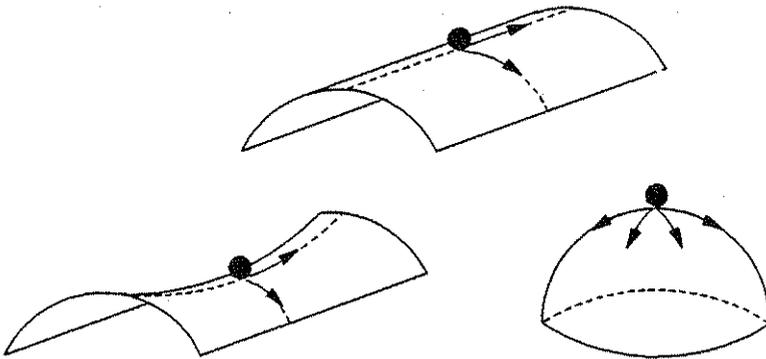
Nicola Augenti

LEZIONI DI STABILITA' DELLE STRUTTURE



Nicola Augenti

LEZIONI DI STABILITA' DELLE STRUTTURE



Parte prima

EQUILIBRIO E STABILITA' DEI SISTEMI

1 - Introduzione al problema	pag. 1
1.1 - Considerazioni preliminari	1
1.2 - Evoluzione degli studi sulla stabilità	4
1.3 - Modelli strutturali e configurazioni	7
1.4 - Richiami di calcolo differenziale	9
2 - Elementi di calcolo energetico	12
2.1 - Le forze esterne	12
2.2 - Le forze interne	13
2.3 - L'energia di posizione dei carichi esterni	15
2.4 - L'energia elastica di deformazione	17
2.5 - L'energia potenziale totale	19
3 - Condizioni di equilibrio e di stabilità	20
3.1 - I sistemi rigidi	20
3.2 - I sistemi elastici	23
3.3 - I rami naturali di equilibrio	26
3.4 - Instabilità progressiva	32
3.5 - Instabilità improvvisa	34
3.6 - L'energia potenziale locale	37
3.7 - Esempi di instabilità di prima specie	44
3.7.1 - Primo esempio	44
3.7.2 - Secondo esempio	49
3.7.3 - Terzo esempio	54
3.8 - L'influenza delle imperfezioni	59
3.8.1 - Primo esempio di sistema imperfetto	60
3.8.2 - Secondo esempio di sistema imperfetto	63

Parte seconda

INSTABILITA' DELLE STRUTTURE

4 - Le aste piane rettilinee	pag. 65
4.1 - Analisi della deformazione nel second'ordine	65
4.2 - Il caso delle travi che si instabilizzano in un piano di simmetria	71
4.3 - Ipotesi di deformazioni flessionali	72
4.4 - L' energia elastica di deformazione nel primo ordine	74
4.5 - Cenni di calcolo variazionale: le condizioni di equilibrio per i sistemi continui	76
4.6 - La trave di Eulero	78
4.7 - Introduzione al problema dell'asta di Eulero in campo elasto-plastico	83
4.8 - Il metodo Omega	87
4.9 - La trave con vincolo continuo alla Winkler	88
4.9.1 - Il caso dell'asta semplicemente appoggiata	88
4.10 - Travi caricate assialmente e trasversalmente	91
4.10.1 - Il caso della trave appoggiata sollecitata da un carico uniforme	91
4.10.2 - Il caso della trave appoggiata sollecitata da una coppia di estremità	94
4.11 - Instabilità improvvisa dell'asta di sezione generica	98
4.11.1 - La trave sollecitata assialmente	99
4.11.2 - La trave sollecitata flessionalmente	107
4.11.3 - La trave caricata torsionalmente	115
5 - Le aste piane ad asse curvilineo	116
5.1 - La trave anulare compressa uniformemente	116

6 - I sistemi ad aste piane	pag. 121
6.1 - Generalità	121
6.2 - Le strutture reticolari	122
6.3 - Le strutture intelaiate	123
6.4 - Stabilità globale dei telai in campo non lineare	124
6.5 - La matrice di rigidezza locale dell' asta generica	133
6.5.1 - Telai piani, costituiti da aste di sezione costante e materiale omogeneo, caricati flessionalmente	134
6.5.2 - Telai piani, costituiti da aste di sezione variabile o materiale non omogeneo, caricati flessionalmente e/o assialmente	139
6.6 - Verifiche	147
7 - Le strutture ad arco	149
7.1 - L'instabilità di prima specie: il caso dell'arco circolare a due cerniere sollecitato radialmente	149
7.2 - L'instabilità di seconda specie: il caso dell'arco funicolare a tre cerniere	151
7.3 - Effetto del ribassamento, ovvero della geometria dell'asse	156
7.4 - Effetto dell'area, ovvero della geometria della sezione	156
8 - Le strutture bidimensionali	158
8.1 - Instabilità delle lastre piane	158
8.1.1 - Le lastre sottili semplicemente appoggiate	158
8.2 - Le strutture a guscio	163
8.3 - I cilindri sottili compressi assialmente	164
8.4 - L'instabilità delle strutture in parete sottile sollecitate flessionalmente	168

a Dada

PREFAZIONE

Il presente volume raccoglie alcuni appunti delle Lezioni che impartisco, presso la Facoltà di Ingegneria dell' Università degli Studi di Napoli, nell'ambito del Corso di "Stabilità delle strutture e calcolo delle strutture in parete sottile".

Dopo lunghe esitazioni, legate alla incompletezza del testo ed all'uso "improprio" che se ne potrebbe fare, consegno alle stampe questi scritti al solo fine di soddisfare le giuste aspettative degli Studenti ai quali mi sembra doveroso lasciare una "traccia" delle Lezioni.

E', però, assolutamente necessario che il Lettore e lo Studente, in particolare, inquadrino nella giusta ottica funzione e significato di tale volume che vuole costituire solamente un "memento" di alcuni aspetti "informativi" del Corso ma non può in alcun modo surrogare il contenuto dei Testi, che costituiscono sempre l'unico certo riferimento dello studio, o delle Lezioni che, sole, possono assolvere la principale funzione dell'Università, quella "formativa".

Napoli, gennaio 1992

Nicola Augenti

PARTE PRIMA

EQUILIBRIO E STABILITA' DEI SISTEMI

1 - INTRODUZIONE AL PROBLEMA

1.1 - CONSIDERAZIONI PRELIMINARI

Il concetto di *equilibrio*, nella sua più ampia accezione, è connesso al permanere del sistema cui si riferisce nello stato in cui si trova, in assenza di azioni perturbatrici e sotto l'effetto delle forze ad esso applicate.

Il concetto di *stabilità*, invece, è legato all'idea che una piccola azione perturbatrice non muti lo stato di equilibrio raggiunto.

L'uso corrente che viene fatto di tali definizioni, anche nelle vicende della vita quotidiana, riflette la circostanza che entrambi sono concetti naturali, innati nell'uomo.

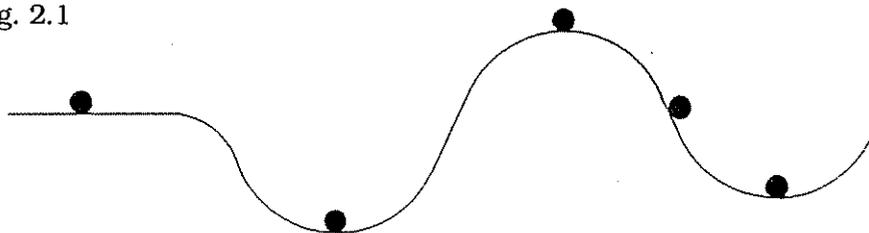
In *Meccanica*, un corpo rigido si definisce in equilibrio se, sottoposto alle azioni che lo sollecitano, permane nel proprio stato di quiete; l'equilibrio si definisce *stabile, instabile o indifferente* a seconda che il corpo, rimosso dalla propria posizione di equilibrio, tenda spontaneamente a ritornarvi, ad allontanarsene o a rimanere nella nuova posizione assunta. Esempio classico, è quello di un corpo dotato di un solo grado di libertà che possa muoversi lungo una linea concava, convessa o rettilinea.

fig. 1.1



La definizione relativa alla qualità dell'equilibrio è, comunque, legata alla *posizione iniziale* del corpo: esso, infatti, partendo da una configurazione iniziale di equilibrio instabile può trovare nuove configurazioni di equilibrio più o meno stabile o instabile, oppure altre di *non equilibrio*.

fig. 2.1



Passando dai problemi piani a quelli spaziali, per esempio al caso di un corpo sferico poggiato su di una superficie, si osserva che la qualità dell'equilibrio può variare in dipendenza della direzione considerata, per cui classificare una configurazione di equilibrio comporta il prendere in esame tutte le possibilità di movimento. Alcuni casi classici sono evidenziati in figura.

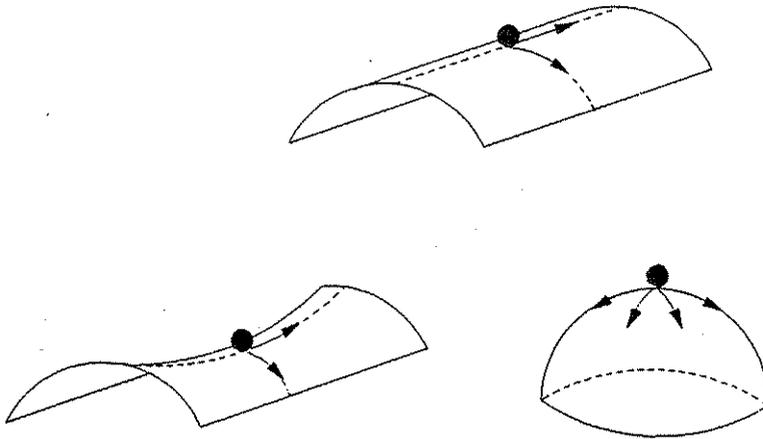


fig. 3.1

In generale, allora, per saggiare la qualità di una configurazione di equilibrio vanno prese in esame le possibilità di movimento in tutte le direzioni focalizzando l'attenzione sul primo tra i fenomeni di instabilità che possono verificarsi.

Fine ultimo dell'ingegnere è, dunque, non solo quello di ricercare, per ogni struttura, le condizioni di equilibrio ma di accertarsi che le configurazioni equilibrate siano *stabili*.

Nel caso di un corpo elastico (ad esempio una trave), detta C_e la generica configurazione di equilibrio sotto l'azione del carico F ad esso applicato, se le azioni esterne vengono fatte variare improvvisamente di ΔF il corpo assume una nuova configurazione che, nella ipotesi di ΔF piccolo, sarà vicinissima a quella iniziale. Ove si rimuova la causa perturbatrice ΔF , in dipendenza del comportamento assunto dal sistema, si dirà che il corpo, nella configurazione C_e , è in equilibrio:

- stabile* se ritorna nella configurazione iniziale;
- instabile* se assume nuove configurazioni diverse dalle precedenti;
- indifferente* se rimane nella configurazione assunta.

A seconda che la perdita di stabilità riguardi parti più o meno cospicue di una struttura, l'instabilità si può definire:

- globale* se interessa l'intera struttura (ad es. un arco o una volta);
- parziale* se interessa solo una parte della struttura (ad es. il corrente compreso di una travatura reticolare);
- elementare* se interessa un solo elemento della struttura (ad es. un'asta di telaio);
- locale* se interessa una parte di elemento (ad es. l'imbozzamento dell'anima di una trave a parete piena).

In ogni caso il fenomeno dell'instabilità si può verificare per i soli corpi mono e bi-dimensionali per i quali due dimensioni sono piccole rispetto alla terza, ovvero una è piccola rispetto alle altre due.

1.2 - EVOLUZIONE DEGLI STUDI SULLA STABILITA'

Le prime osservazioni sulla resistenza e la stabilità delle colonne risalgono al I secolo a.C. e sono contenute nell'opera di *Erone di Alessandria: Le Meccaniche*.

Bisogna però attendere il XV secolo perchè *Leonardo da Vinci* (1451 - 1519), giustamente considerato il padre dell'Ingegneria, intuisca che il massimo carico assiale P_c sopportabile da un'asta snella non dipende solamente dalla resistenza del materiale ma anche dalla sua geometria. Egli faceva dipendere tale carico dal rapporto fra la lunghezza l della trave e la dimensione a minima della sezione ponendo:

$$P_c = \gamma \cdot A \cdot \frac{a}{l}$$

con γ costante di proporzionalità ed A area della sezione. Sfuggiva a Leonardo, ma ciò si scoprirà solo nella XVIII secolo, che il carico critico non è inversamente proporzionale al rapporto l/a ma al suo quadrato ^(*).

Nel 1729, *Pieter Van Musschenbroek* (1692-1761), a seguito di una vasta campagna sperimentale intesa a valutare la relazione esistente fra il massimo carico assiale sopportabile da un'asta e la sua lunghezza, rettificava la formulazione di *Leonardo* affermando che la resistenza di una trave snella è inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza e direttamente proporzionale al quadrato del lato *curvato*.

Il primo vero studio sulla instabilità dell'asta *caricata di punta*, ovvero sottoposta ad una forza assiale di compressione, e la *scoperta* del carico critico, cui corrisponde l'instabilità della trave, vanno attribuiti, però a *Leonardo Eulero* (1707-1783)

Nel suo *Additamentum I de curvis elasticis* del 1744 si legge che per una colonna (incastata) avente *elasticità assoluta* (ovvero rigidità flessionale EI) e la lunghezza l , *la forza richiesta per incurvare minimamente la colonna è:*

$$P_c = \frac{\pi^2 \cdot EI}{4 \cdot l^2}$$

In quel tempo tali studi non ebbero pratica utilizzazione in quanto le colonne erano in genere tozze, ma l'inizio della produzione del ferro, alla fine del XVIII secolo, e dell'acciaio, nella seconda metà del XIX secolo, costituirono un incentivo nell'applicazione delle teorie di Eulero alle costruzioni metalliche.

^(*) Infatti: $P_c = \pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2} = \pi^2 \cdot E \cdot \frac{1}{12} \cdot A \cdot \left(\frac{a}{l}\right)^2$

implica: $P_c = \gamma \cdot A \cdot \left(\frac{a}{l}\right)^2$

L'analisi della stabilità, nel campo applicativo, si limitò alla determinazione del carico critico e si concluse che il collasso di elementi metallici complessi poteva avvenire in due modi: per rottura del materiale, nelle aste tozze, quando, si attinge la tensione ultima, o per instabilità elastica, nelle aste snelle, quando si raggiunge la tensione critica fornita dalla formula di *Eulero*.

Tale concezione sembrò soddisfacente finchè non si verificarono, nonostante l'adozione di elevati coefficienti di sicurezza, eclatanti disastri dovuti a fenomeni di instabilità, quali i crolli del *Mouchenstein Bridge* nel 1891 e del *St. Lawrence Bridge* nel 1907. Furono tali incidenti a determinare una nuova spinta nel campo delle ricerche relative a tale settore anche se una moderna concezione dell'instabilità nella progettazione strutturale cominciò a svilupparsi solo dopo la seconda guerra mondiale.

Nel 1944 negli Stati Uniti d'America venne fondato il *Column Research Council*, oggi *Structural Stability Research Committee* (SSRC), il cui principale obiettivo era quello di incoraggiare le ricerche sul comportamento di elementi metallici compressi e lo sviluppo delle procedure di progetto.

Nel 1952, in Germania Occidentale, *Kloppel* presentava la *German DIN 4114*, il documento più completo fino ad allora pubblicato, contenente un'ampia casistica sulla instabilità delle strutture in acciaio.

Nel 1955 venne istituita la *European Convention for Structural Steelwork* (ECSS) che si interessava dello studio dell'instabilità delle aste ed alla quale si devono le *Recommendation for steel structures* del 1976 ed il *Manual on the stability of steel structures* del 1977.

In Italia le principali Scuole di Stabilità sono state quelle di Giulio Krall e di Osvaldo Zanaboni, i cui studi sono stati, però limitati al campo "critico".

Il discorso sul "post-critico" venne, invece, sviluppato dall'olandese Koiter, i cui lavori furono raccolti ed ampliati dalla Scuola inglese nella quale si inserì un altro italiano: *Giuliano Augusti*.

La tendenza attuale nel campo strutturale è quella di migliorare l'efficacia riducendo i pesi ed il consumo dei materiali: basti pensare che dalle costruzioni Romane a quelle contemporanee, in venti secoli, il peso proprio si è ridotto di circa duecento volte.

La riduzione di dimensioni degli elementi strutturali, ottenuta razionalizzando l'uso dei materiali esistenti ed utilizzando i computers per la determinazione dei legami tensioni-deformazioni, ha dato luogo a notevoli incrementi di snellezza degli elementi strutturali.

L'Ingegneria civile, partendo dalle conoscenze del settore aeronautico, ha prodotto negli ultimi 30 anni strutture leggerissime come elementi in parete sottile, a doppio strato, gusci, ecc., per le quali i problemi più importanti da affrontare sono: una analisi in campo non lineare ed il controllo della stabilità.

Nonostante siano trascorsi oltre 200 anni dai primi studi sulla materia e nonostante l'attuale disponibilità di strumenti di calcolo notevolmente potenti, sono molti i casi per i quali è ancora estremamente difficoltosa la ricerca del carico cui corrisponde l'instabilità. E' questo, infatti un fenomeno complesso dipendente da numerosi fattori quali errori di progetto o di esecuzione, sovratensioni e uso inadatto di materiali, come conferma l'esperienza di numerosi dissesti che hanno riguardato le strutture più diverse, dalla copertura del padiglione dell'Expo di Bucarest nel 1964, ai ponti di Vienna sul Danubio del 1969, a quello di Milford in Inghilterra nel 1970, al palazzo dello sport di Martford nel 1978.

Va osservato, inoltre, che in nessun altro campo strutturale l'influenza delle imperfezioni geometriche e meccaniche è così determinante come in quello dell'instabilità al punto che, il trascurarle nel calcolo, può dare luogo ad errori fatali.

Non potendosi prescindere in fase di progetto dal valutare l'entità delle imperfezioni, da cui dipende il comportamento della struttura reale, un importante aiuto è fornito dalla conoscenza del post-critico, essendo ad esso strettamente legata la sensibilità delle imperfezioni.

E' per questo che una corretta analisi statica dovrebbe comprendere lo studio della struttura in campo pre-critico, critico e post-critico.

Inoltre, va tenuto presente che una verifica *sperimentale* risulta particolarmente difficoltosa, considerando da un lato l'impossibilità di portare le strutture reali fino al collasso e dall'altro la poca significatività di prove su modelli dovuta all'impossibilità pratica di schematizzare le imperfezioni reali.

Per ultimo si consideri che le norme di progetto, nel campo della stabilità sono ancora scarse ed è pericoloso estrapolare ad intere strutture risultati conseguiti per elementi isolati: il rischio è costituito dal fatto che elementi benefici del complesso strutturale che eleverebbero il valore del carico critico sono erosi dall'influenza delle inevitabili imperfezioni.

1.3 - MODELLI STRUTTURALI E CONFIGURAZIONI

Le strutture reali sono schematizzabili con modelli che devono contemperare due esigenze:

- essere rappresentativi del comportamento reale;
- essere risolubili con gli strumenti di calcolo disponibili.

Con riferimento al primo requisito i modelli più rispondenti sono, dunque, quelli *elastici* perchè dotati di infiniti gradi di libertà.

Una semplificazione spesso notevole dei problemi, e questa volta rispetto alla seconda esigenza, si ottiene adottando sistemi dotati di un numero finito di gradi di libertà, ovvero sistemi olonomi, che possono rientrare in una delle due categorie:

- modelli rigidi o elasto-rigidi a vincoli lisci o elastici o misti;
- modelli elastici condizionati.

Tale schematizzazione non solo consente semplificazioni nello studio del comportamento, ma riflette l'attuale tendenza del calcolo strutturale verso una *discretizzazione a priori*.

Nel primo gruppo rientrano i sistemi per i quali gli elementi vengono ipotizzati rigidi nei riguardi di una o più caratteristiche, mentre l'elasticità può essere schematizzata da organi elastici concentrati ed i vincoli possono essere lisci o elastici: questi ultimi si oppongono ai (soli) gradi di libertà consentiti con reazioni elastiche, funzioni di tali spostamenti, ed impediscono l'evolversi spontaneo di labilità, purchè in numero pari ai gradi di libertà del sistema e scarichi nella configurazione iniziale.

Nel secondo gruppo di modelli sono invece compresi i sistemi elastici ai quali sia stata imposta la deformata; ad esempio, nel caso di una trave semplicemente appoggiata, la linea elastica può essere appoggiata per somma di n *modi deformativi elementari* la cui forma $\left(\text{sen } i \frac{\pi z}{L} \right)$ si può riguardare come un vincolo continuo di deformazione:

$$v = \sum_1^n v_i \cdot \text{sen } i \cdot \frac{\pi \cdot z}{L}$$

e nel caso di un solo grado di libertà:

$$v = v_1 \cdot \text{sen } \frac{\pi \cdot z}{L}$$

In ogni caso, il modello, sarà tanto più attendibile quanto più la sua deformata sarà vicina a quella reale e, dunque, più elevato il numero n dei gradi di libertà.

Le configurazioni deformate assunte dai sistemi schematizzabili con un numero finito di gradi di libertà, possono essere individuate tramite un numero finito di variabili reali che si definiscono *coordinate naturali* e che possono essere in numero qualunque, anche superiori ai gradi di libertà posseduti dagli elementi liberi. Tali coordinate non sono, in genere, tutte dipendenti ma legate, in parte, da equazioni che esprimono le relazioni geometriche di vincolo: vincoli che possono essere interni od esterni, a seconda che impongano la congruenza interna od esterna. Nel caso di sistemi olonomi a vincoli bilaterali, le dette relazioni sono espresse da equazioni in termini finiti.

La differenza tra il numero di coordinate naturali ed il numero di equazioni fornisce i *gradi di libertà* posseduti dalla struttura, ovvero le *coordinate libere* che prendono nome di *coordinate generalizzate o lagrangiane* solo se:

- esiste una corrispondenza biunivoca fra ogni n -pla di coordinate lagrangiane ed ogni configurazione del sistema;
- configurazioni vicine sono rappresentate da valori prossimi delle coordinate.

Tramite essa è possibile esprimere qualunque spostamento assoluto o relativo dei punti del sistema.

In generale, alcuni spostamenti di interesse nello studio di un modello possono coincidere con le coordinate lagrangiane, altri possono essere ricavati in funzioni di queste.

Nel caso di sistemi elastici condizionati, si possono assumere quali lagrangiane i coefficienti degli sviluppi in serie delle funzioni di spostamento.

Indicando con Q_i la generica coordinata lagrangiana si definisce *vettore di configurazione* il vettore:

$$Q = (Q_1, \dots, Q_i, \dots, Q_n)$$

le cui componenti sono le n coordinate lagrangiane che individuano i gradi di libertà del sistema.

La generica configurazione $C = C(Q)$ è, pertanto definita nello spazio R^n delle configurazioni dal punto P di coordinate (Q_1, \dots, Q_n) :

Nel seguito si indicheranno con:

- C_0 la configurazione iniziale perfetta;
- C_A la configurazione iniziale imperfetta;
- C_e la generica configurazione di equilibrio;
- \overline{C} la generica configurazione di biforcazione.

1.4 - RICHIAMI DI CALCOLO DIFFERENZIALE

Si consideri il generico sistema olonomo le cui configurazioni $C(Q_1, \dots, Q_n)$ siano funzioni delle coordinate lagrangiane Q_1, \dots, Q_n , e si indichi con $f = f(Q_1, \dots, Q_n)$ la funzione spostamento di uno dei punti del sistema.

Nel caso particolare di un solo grado di libertà risulta $Q_1 = Q$, $C = C(Q)$, $f = f(Q)$ e quest'ultima è rappresentabile in un piano cartesiano, come in fig. 4.1, avendo assunto l'origine degli assi nella configurazione di riferimento $C_0 = C(0)$ per la quale è $f(0) = 0$.

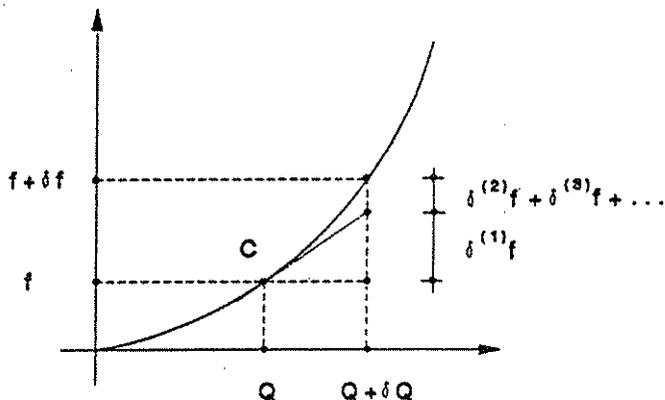


fig. 4.1

L'incremento della variabile Q , si definisce *variazione o differenziale della variabile dipendente* e si indica con il simbolo δQ o dQ .

A seguito di una simile variazione δQ la funzione $f(Q)$ subisce una variazione anch'essa, che si definisce *variazione totale o differenziale totale della funzione*, si indica con δf o con df e si può esprimere come somma delle variazioni di differente ordine in f :

$$\delta f = df = \delta^{(1)}f + \delta^{(2)}f + \dots + \delta^{(n)}f + \dots$$

Essa rappresenta una quantità finita se ne considerino tutti i termini mentre può essere ritenuta infinitesima o piccolissima ove se ne consideri solo il primo: in tale caso, arrestandosi al primo ordine, la variazione totale della funzione $f(Q)$ coincide con la sua *variazione prima o differenziale primo*, che si indica con $\delta^{(1)}f$ ed è fornito dalla somma dei differenziali primi della funzione rispetto alle singole coordinate Q :

$$\delta^{(1)}f = d^{(1)}f = \frac{\partial f}{\partial Q_1} \cdot dQ_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial Q_m} \cdot dQ_m$$

Nel caso particolare di sistema ad un solo grado di libertà la variazione o differenziale primo della variabile dipendente è dato dal prodotto della derivata prima per il differenziale della variabile indipendente :

$$\delta^{(1)}f = d^{(1)}f = \frac{df}{dQ} \cdot dQ$$

e pur rappresentando, come bene si evince dalla fig. 4.1 solo una parte di δf , la approssima bene per variazioni $dQ = \delta Q$ della variabile indipendente molto piccole, ovvero tendenti a zero.

la *variazione o differenziale di ordine K* della funzione f si indica con $\delta^{(k)}f$ o con $d^{(k)}f$ ed è definita dall'espressione simbolica:

$$\delta^{(k)}f = d^{(k)}f = \left(\frac{\partial f}{\partial Q_1} \cdot dQ_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial Q_i} \cdot dQ_i + \dots + \frac{\partial f}{\partial Q_m} \cdot dQ_m \right)^{(k)}$$

ove si intende che il contenuto della parentesi deve essere elevato alla potenza k e, per il generico termine, va operata la sostituzione:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \right)^k = \frac{\partial^k f}{\partial Q_i^k}$$

Ad esempio, il differenziale secondo:

- per una funzione $f(Q)$ di una sola variabile si scrive:

$$d^{(2)}f = \left(\frac{\partial f}{\partial Q} \right)^{(2)} \cdot dQ^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial Q^2} \cdot dQ^2$$

- per una funzione $f(Q_1, Q_2)$ di due variabili si scrive:

$$\begin{aligned} d^{(2)}f &= \left(\frac{\partial f}{\partial Q_1} \cdot dQ_1 + \frac{\partial f}{\partial Q_2} \cdot dQ_2 \right)^{(2)} = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial Q_1} \right)^{(2)} \cdot dQ_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Q_2} \right)^{(2)} \cdot dQ_2^2 + 2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial Q_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial Q_2} \right) \cdot dQ_1 \cdot dQ_2 = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial Q_1^2} \cdot dQ_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial Q_2^2} \cdot dQ_2^2 + 2 \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial Q_1 \partial Q_2} \right) \cdot dQ_1 \cdot dQ_2 \end{aligned}$$

Essendo $dQ \equiv \delta Q$ sarà sempre possibile, nelle formule testè scritte, adottare indifferentemente, per le variabili indipendenti Q_i , il simbolo di differenziale d o la notazione lagrangiana di variazione δ .

Il differenziale di ordine k si può, dunque, scrivere altresì nella forma:

$$\delta^{(k)}f = d^{(k)}f = \left(\frac{\partial f}{\partial Q_1} \cdot \delta Q_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial Q_m} \cdot \delta Q_m \right)^{(k)}$$

Al fine di evitare pericolosi equivoci va ricordato che solamente nel caso di *funzione*, *variazione* e *differenziale totale* sono sinonimi mentre, invece, quando si opera su *funzionali*^(*) ha solamente senso parlare di *variazione*, ma non di *differenziale totale* che, in tale caso, non è definito.

In ordine all'entità dei termini che compongono la *variazione* di una *funzione* va altresì ricordato, per le applicazioni future, che la somma dei termini superiori ad un certo ordine h è sempre più piccola del termine di ordine h , e ciò nell'ambito di spostamenti piccoli, seppur finiti.

(*) Si definisce *funzionale* una quantità variabile dipendente da una o più funzioni ovvero una corrispondenza che associa una o più funzioni ad un numero.

2 - ELEMENTI DI CALCOLO ENERGETICO

2.1 - LE FORZE ESTERNE

Indicando con $F_1, \dots, F_k, \dots, F_p$, le forze esterne applicate al sistema, si definisce *vettore delle forze esterne* il vettore:

$$F = (F_1, \dots, F_k, \dots, F_p)$$

Le azioni, che si intendono sempre applicate *staticamente*, ovvero in modo che risultino trascurabili energia cinetica, forze viscosse e forze di inerzia, si definiscono:

- *conservative* se sono invariabili in intensità, direzione e verso al variare del loro punto di applicazione, ovvero della configurazione assunta dal sistema; in tale caso ammettono un potenziale e sono esprimibili mediante un unico valore di riferimento F (moltiplicatore) con l'equazione:

$$F_k = \lambda_k \cdot F$$

ove le λ_k definiscono le forme di carico assegnate;

- *non conservative o posizionali* se variano con la configurazione del sistema.

Detti $f_1, \dots, f_k, \dots, f_p$ gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze, duali di queste, si definisce *vettore degli spostamenti assoluti* il vettore:

$$f = (f_1, \dots, f_k, \dots, f_p)$$

Per un sistema olonomo, ognuno degli spostamenti $f_k = f_k(Q_i)$ essendo funzione delle coordinate lagrangiane, può essere espresso in termini di vario ordine nelle Q_i , cosicchè si può scrivere come somma dei termini di vario grado nelle Q_i :

$$f_k = f_k^{(1)} + f_k^{(2)} + f_k^{(3)} + \dots$$

Gli spostamenti si definiscono *piccoli o grandi* a seconda che siano tali rispetto alle dimensioni della struttura: più precisamente l'ipotesi di *piccoli spostamenti* comporta che si prenda in considerazione il solo termine $f^{(1)}$ e si trascurino quelli di ordine superiore mentre tenendo conto anche di $f^{(2)}$ si opera già nell'ambito dei *grandi spostamenti*.

2.2 - LE FORZE INTERNE

Detti $S_1, \dots, S_j, \dots, S_m$ gli sforzi interni che nascono nel sistema per effetto delle azioni ad esso applicate ed $s_1, \dots, s_j, \dots, s_m$ gli spostamenti relativi duali, si definiscono rispettivamente:

$$S = (S_1, \dots, S_j, \dots, S_m)$$

vettore degli sforzi interni;

$$s = (s_1, \dots, s_j, \dots, s_m)$$

vettore di deformazione.

Analogamente a quanto si è detto per gli spostamenti assoluti f_k , anche il generico spostamento relativo $s_j = s_j(Q_i)$, che è funzione delle coordinate lagrangiane, può esprimersi come somma di termini di grado diverso nelle Q_i , per cui si può scrivere:

$$s_j = s_j^{(1)} + s_j^{(2)} + s_j^{(3)} + \dots$$

Le deformazioni si definiscono *piccole* o *grandi* a seconda che le aliquote di ordine superiore $s^{(2)}$, $s^{(3)}$ siano o meno trascurate rispetto a quelle del primo ordine, $s^{(1)}$.

Nel caso più generale di comportamento elastico non lineare del materiale la legge di dipendenza $S = S(s)$ può essere espressa, tramite le costanti di rigidità k_α , nella forma:

$$S = k_1 \cdot s + k_\alpha \cdot s^\alpha$$

per materiale a comportamento non simmetrico, oppure nella forma:

$$S = k_1 \cdot s + k_\alpha \cdot |s^\alpha| \cdot (\text{sgn } s)$$

per materiale a comportamento simmetrico entrambe, però, con la limitazione che sia positiva la rigidità tangente $\frac{dS}{ds}$.

Nel caso $\alpha = 2$, di legge quadratica, i legami precedenti si particolarizzano, rispettivamente:

- per comportamento non simmetrico nella forma (vd. fig. 1.2):

$$S = k_1 \cdot s + k_2 \cdot s^2$$

con: $s > -\frac{k_1}{2 \cdot k_2}$ per $k_2 > 0$ (comportamento hardening)

$s < -\frac{k_1}{2 \cdot k_2}$ per $k_2 < 0$ (comportamento softening)

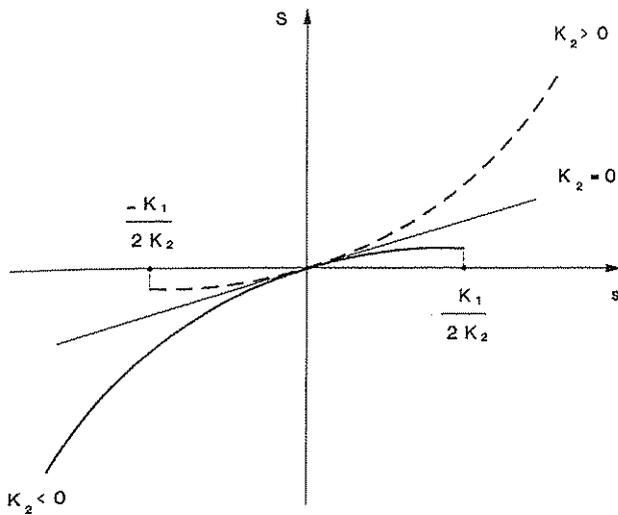


fig. 1.2

- per comportamento simmetrico nella forma (vd. fig. 2.2):

$$S = k_1 \cdot s + k_2 \cdot |s^2| \cdot (\text{sgn } s)$$

con: $-\frac{k_1}{2 \cdot k_2} < s < \frac{k_1}{2 \cdot k_2}$ per $k_2 < 0$

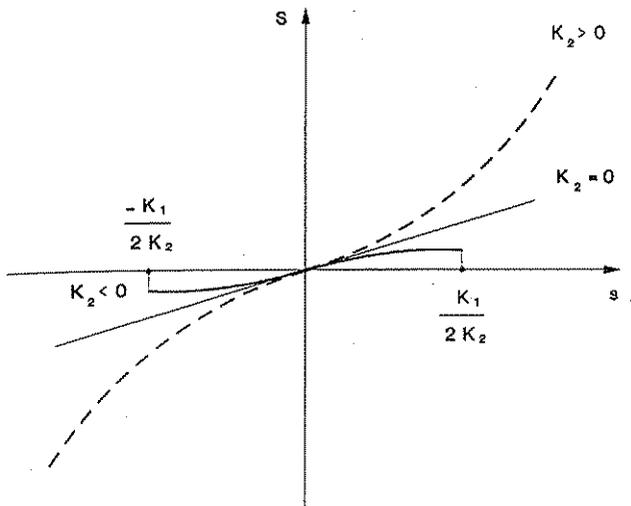


fig. 2.2

Nel caso di comportamento elasto-plastico del materiale la legge costitutiva può essere espressa nella forma:

$$S = k \cdot s + C$$

2.3 - L'ENERGIA DI POSIZIONE DEI CARICHI ESTERNI

Si consideri il sistema di forze *conservative*:

$$F_k = \lambda_k \cdot F \quad \text{con } k \in \{1, p\}$$

Indicando con:

f_k gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze F_k , duali di queste;

$f = \sum \lambda_k \cdot f_k$ lo *spostamento generalizzato* duale della forza di riferimento F (moltiplicatore dei carichi) o *spostamento caratteristico* (alla Zanaboni) definito dallo stato di deformazione;

il lavoro (esterno) compiuto da tali forze per una variazione di configurazione δC del sistema vale:

$$L_e = \sum F_k \cdot f_k = F \cdot \sum \lambda_k \cdot f_k = F \cdot f = F (f^{(1)} + f^{(2)} + \dots)$$

Essendo le forze conservative, esiste un potenziale dei carichi U , definito a meno di un livello arbitrario di energia U_0 , la cui variazione (differenza fra i valori assunti nei punti estremi del percorso) fornisce il detto lavoro relativo alla variazione di configurazione δC :^(*)

$$\delta U = U - U_0 = U$$

Tale potenziale, che si assume convenzionalmente negativo poichè, come si vedrà nel seguito, il suo aumento fornisce contributo all'*instabilità* del sistema, si può, dunque, porre nella forma:

$$U = - \sum F_k \cdot f_k = - F \cdot f = - F \cdot (f^{(1)} + f^{(2)} + \dots) = U^{(1)} + U^{(2)} + \dots$$

Essendo ancora possibile scrivere:

$$\delta U = \delta^{(1)}U + \delta^{(2)}U + \dots$$

Dalle ultime relazioni risulta:

$$\delta U = \delta^{(1)}U + \delta^{(2)}U + \dots = U^{(1)} + U^{(2)} + \dots = U$$

ovvero le eguaglianze:

$$\delta U = U$$

$$\delta^{(1)}U = U^{(1)} = - F \cdot f^{(1)}$$

$$\delta^{(2)}U = U^{(2)} = - F \cdot f^{(2)}$$

.....

^(*) $U_0 = U(C_0) = 0$

di facile intuizione ove si pensi che per esprimere una funzione come somma dei termini di diverso grado basta svilupparla in serie, operazione che consiste nel calcolare, per i singoli addendi, la variazione o differenziale primo, secondo, ecc. della funzione.

Le eguaglianze innanzi ricavate significano, pertanto, che la variazione prima, seconda, . . . k -ma di U altro non sono se non il lavoro compiuto dalle forze esterne F per le componenti di spostamento f , del primo, secondo, . . . k -mo ordine.

Riguardo il grado di precisione della U va osservato che, essendo lineare la dipendenza da f_k , essa risulta espressa in modo completo fino all'ordine in cui è espresso f_k (nelle coordinate lagrangiane).

Nel seguito con indici tra parentesi tonde verrà contrassegnato il grado di dipendenza dei termini energetici dalle coordinate lagrangiane Q_k , con pedici l'ordine della teoria adottata.

Risulta, dunque, per il caso trattato:

$$U_1 = U^{(1)} \quad (\text{teoria del primo ordine})$$

$$U_2 = U^{(1)} + U^{(2)} \quad (\text{teoria del second'ordine})$$

.

$$U_n = U^{(1)} + \dots + U^{(n)} \quad (\text{teoria di ordine } n)$$

In definitiva esprimere U in una teoria di ordine n significa esprimere le f fino al grado n nelle coordinate lagrangiane o nelle funzioni incognite.

2.4 - L'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE

Quando un sistema (elastico) passa da una configurazione C_0 ad un'altra C , gli sforzi interni S presenti negli organi elastici (interni od esterni) compiono lavoro interno Li per gli spostamenti relativi s , ovvero per le deformazioni dei detti organi.

Nell'ipotesi di *elasticità perfetta* (non necessariamente lineare), ovvero leggi di carico e scarico coincidenti, tale lavoro ammette un potenziale W (energia di deformazione accumulata negli organi elastici) definito a meno di un livello arbitrario di energia W_0 , che dipende solamente dalle configurazioni estreme C_0 e C .

Tale potenziale si assume per definizione positivo perchè, come si vedrà nel seguito, il suo aumento coincide con un incremento di stabilità:

$$\delta W = W - W_0 = W = Li$$

Si osservi che sempre (anche in presenza di organi elastici di numero superiore ai gradi di libertà) l'energia elastica W_0 posseduta dal sistema in C_0 si considererà nulla potendosi, comunque prescindere da essa perchè quantità di energia, in ogni caso, non restituibile:

$$W_0 = W(C_0) = 0$$

Nel caso di organi a comportamento elastico-lineare espresso da una legge del tipo:

$$S = k \cdot s$$

l'energia di deformazione immagazzinata vale, per il teorema di Clapeyron:

$$W = \int S \cdot ds = \int k \cdot s \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2$$

Esprimendo s in termini di vario ordine nelle Q_i si può scrivere:

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} + \dots)^2 = W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)} + \dots$$

Poichè l'energia elastica presenta una dipendenza quadratica dalle componenti di spostamento relativo si assumerà, con la simbologia già definita in precedenza:

$$W_1 = W^{(2)} \quad \text{in una teoria del primo ordine}$$

$$W_2 = W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)} \quad \text{in una teoria del second'ordine}$$

... e così di seguito.

Mentre nel primo ordine non sussiste alcun problema, essendo sufficiente esprimere le s fino al primo grado nelle Q_i , in una teoria di ordine superiore

sviluppando il quadrato dello spostamento:

$$s^2 = (s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)} + \dots)^2 = s^{(1)2} + s^{(2)2} + s^{(3)2} + 2 \cdot s^{(1)} \cdot s^{(2)} + 2 \cdot s^{(1)} \cdot s^{(3)} + \dots$$

ci si accorge che per ottenere l'espressione completa di W in una teoria di ordine n occorre esprimere gli spostamenti relativi s (ovvero le deformazioni) fino al grado $2n - 1$ nelle Q_i e considerare i termini fino al grado $2n$, sempre nelle Q_i . In una teoria completa del secondo ordine sarà pertanto:

$$W_2 = W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)}$$

avendo sviluppato le s fino al terzo grado:

$$s = s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)}$$

e avendo tenuto conto di tutti i termini fino al quarto grado nelle Q_i .

Nel caso di organi elastici a comportamento simmetrico, elastico-non lineare indefinito, espresso da una legge del tipo:

$$S = k_1 \cdot s + k_\alpha \cdot |s^\alpha| \cdot (\text{sgn } s)$$

che schematizza due organi elastici in parallelo con legge:

$$S_1 = k_1 \cdot s \quad \text{ed} \quad S_\alpha = k_\alpha \cdot |s^\alpha| \cdot (\text{sgn } s)$$

l'energia elastica di deformazione vale:

$$W = \int S \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot s^2 + \frac{1}{\alpha + 1} \cdot k_\alpha \cdot |s^{\alpha+1}|$$

Nel caso in cui esistano forze posizionali, essendo queste funzione delle Q_i come le S , andranno trattate al pari delle forze interne; esse danno luogo, cioè, ad una quota energetica in tutto simile ad una energia di deformazione.

Una quota dello stesso genere è, altresì, generata dalla eventuale presenza di distorsioni impresse.

2.5 - L'ENERGIA POTENZIALE TOTALE

La somma algebrica dell'energia di deformazione e di quella di posizione dei carichi dà luogo all'energia potenziale totale:

$$T = W + U = W - F \cdot f$$

ovvero:

$$T = \delta T = \delta W + \delta U = \delta W - F \cdot \delta f = \delta L_i - \delta L_e$$

che si indica sinteticamente con la sigla EPT. Ovviamente, essendo somma di due potenziali, è anch'essa definita come un potenziale a meno di una costante T_0 relativa alla configurazione iniziale C_0 , identificata dalla nullità del vettore di configurazione.^(*)

La sua utilizzazione, come già detto, richiede che siano verificate le seguenti ipotesi:

- organi elastici perfetti (leggi di carico e scarico coincidenti);
- forze conservative.

In una teoria di ordine qualunque, esprimendo il grado di dipendenza dei termini energetici dalle coordinate lagrangiane, si può scrivere in generale:

$$T = W^{(1)} + W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)} + \dots - F(f^{(1)} + f^{(2)} + \dots)$$

ove i termini:

$W^{(i)}$ dipendono dalle caratteristiche elasto-geometriche della struttura;

$U^{(i)} = -F \cdot f^{(i)}$ dipendono dalla geometria strutturale e dalle forze applicate.

Suggestiva appare l'indicazione di Thompson di riguardare la struttura come una sfera disposta sulla superficie dell' EPT.

^(*) $T_0 = T(C_0) = 0$

3 - CONDIZIONI DI EQUILIBRIO E DI STABILITA'

3.1 - I SISTEMI RIGIDI

Per un tale sistema, alla generica variazione di configurazione δC corrisponde il solo lavoro esterno:

$$L_e = \sum F_k \cdot f_k = F \cdot \sum \lambda_k \cdot f_k = F \cdot f(Q)$$

e dunque la variazione di energia:

$$U = - F \cdot f(Q) = - F \cdot (f^{(1)} + f^{(2)} + \dots) = U^{(1)} + U^{(2)} + \dots$$

somma dei lavori compiuti dalle forze esterne per le componenti di spostamento, dei punti di applicazione delle forze, del primo, secondo, . . . k -mo ordine.

Come detto in precedenza è verificata l'eguaglianza:

$$\delta U = \delta^{(1)}U + \delta^{(2)}U + \dots = U^{(1)} + U^{(2)} + \dots$$

Essendo stato definito l'equilibrio come la possibilità del sistema di rimanere nel proprio stato di quiete sotto l'azione delle forze applicate, dovrà risultare:

$$L_e \leq 0 \quad \forall \delta C$$

ovvero:

$$\delta U \geq 0 \quad \forall \delta C$$

In particolare, per il *Principio dei lavori virtuali*, condizione necessaria e sufficiente perchè una configurazione C sia di equilibrio è che risulti nullo il lavoro delle forze applicate per qualunque spostamento virtuale (piccolo e congruente con i vincoli) eseguito a partire da C (ovvero $\forall \delta C$ a partire da C) e pertanto, nell'ipotesi di validità del principio che è quella di piccoli spostamenti ($f \approx f^{(1)}$), tale lavoro è proprio:

$$U^{(1)} = \delta^{(1)}U.$$

La configurazione C sarà, dunque, di equilibrio $C \equiv C_e$ se risulta:

$$\delta^{(1)}U = 0 \quad \forall \delta C$$

E' questa una condizione di equilibrio *ristretto* o *puntuale* o *matematico*.

Per definire la qualità dell'equilibrio in C_e occorre, invece, indagare sulle quote di ordine superiore ed in particolare sul termine non nullo successivo al primo: ciò è sufficiente in quanto, essendo la somma di tutti gli altri termini sempre minore di quello che li precede, il segno di questi non potrà mai modificare il segno del precedente.

Considerato che a seguito della variazione di configurazione δC il sistema può tornare nella posizione iniziale solamente se il lavoro delle forze esterne è resistente, ovvero negativo, si avrà che la configurazione di equilibrio $C \equiv C_e$ è:

stabile se: $F \cdot f^{(2)} < 0$ ovvero: $\delta^{(2)}U > 0 \quad \forall \delta C$

indifferente se: $F \cdot f^{(2)} = 0$ ovvero: $\delta^{(2)}U = 0 \quad \forall \delta C$

instabile se: $F \cdot f^{(2)} > 0$ ovvero: $\delta^{(2)}U < 0 \quad \exists \delta C$

In definitiva la condizione di equilibrio *fisico* (equilibrio stabile) è che in C risulti:

$$\delta U > 0 \quad \forall \delta C$$

Ad esempio nel caso del sistema rigido in figura, ad un grado di libertà caratterizzato dalla coordinata lagrangiana Q , per sapere se la configurazione

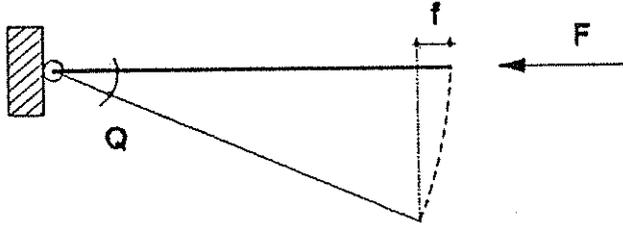


fig. 1.3

iniziale C_0 è di equilibrio, si pensi di far avvenire un cambiamento di configurazione caratterizzato dallo spostamento del punto di applicazione della forza:

$$f = L \cdot (1 - \cos Q)$$

Sviluppando in serie:

$$\cos Q = 1 - \frac{Q^2}{2!} + \frac{Q^4}{4!} - \frac{Q^6}{6!} + \dots$$

è anche possibile approssimare f all'ordine voluto:

$$f = L \cdot \left(\frac{Q^2}{2} - \frac{Q^4}{24} + \dots \right) = f^{(2)} + f^{(4)} + \dots$$

e dunque:

$$U = -F \cdot f = -F \cdot L \cdot (1 - \cos Q) = -F \cdot L \cdot \left(\frac{Q^2}{2} - \frac{Q^4}{24} + \dots \right)$$

ovvero:

$$f^{(1)} = 0$$

$$f^{(2)} = L \cdot \frac{Q^2}{2}$$

$$f^{(3)} = 0$$

$$f^{(4)} = -L \cdot \frac{Q^4}{24}$$

In definitiva, per una variazione di configurazione δC si avrà che:

- la variazione prima dell'energia in $C_0 = C(0)$ vale:

$$\delta^{(1)}U = d^{(1)}U = -F \cdot L \cdot \sin Q$$

e dunque per $Q = 0$ risulta: $\delta^{(1)}U = 0$.

Ciò dimostra che la configurazione C_0 è di equilibrio. Alla stessa conclusione si poteva pervenire constatando la nullità del termine di primo ordine: $U^{(1)} = 0$

- la variazione seconda dell'energia in $C_0 = C(0)$ vale:

$$\delta^{(2)}U = d^{(2)}U = -F \cdot L \cdot \cos Q$$

e per $Q = 0$ risulta: $\delta^{(2)}U = -F \cdot L < 0$

Ciò conferma che la configurazione di equilibrio C_0 è sempre instabile. Alla stessa conclusione si poteva pervenire constatando la negatività del termine:

$$U^{(2)} = -F \cdot L \frac{Q^2}{2} < 0$$

La configurazione $C(\pi)$ (ovvero la stessa C_0 sollecitata dalla forza $-F$) essendo:

$$\delta^{(1)}U = 0 \quad \text{e} \quad \delta^{(2)}U = -(-F \cdot L) > 0$$

risulta, invece, sempre di equilibrio stabile.

Si può immediatamente osservare che essendo il segno del lavoro, per tali sistemi, indipendente dal valore dell'azione sollecitante F , in presenza di forze conservative e sotto una data condizione di carico al variare (proporzionale) dell'intensità di queste non mutano le condizioni di stabilità della configurazione in esame.

Basta, pertanto, considerare un solo valore delle forze per sapere se la configurazione di equilibrio è stabile o meno, indipendentemente dal valore della forza applicata; dunque, nei sistemi rigidi la qualità dell'equilibrio è indipendente dall'intensità delle azioni applicate.

In definitiva si può affermare che:

- Condizione necessaria affinché una configurazione C sia di equilibrio fisico, è che il funzionale $U(C)$ ammetta un massimo o un minimo in C_e ovvero risulti nulla la variazione prima dell'energia di posizione dei carichi: $\delta^{(1)}U = 0$
- Condizione necessaria e sufficiente perchè la configurazione di equilibrio C_e sia stabile è che il funzionale $U(C)$ ammetta un minimo in C_e , ovvero è sufficiente che risulti positiva la variazione seconda dell'energia di posizione dei carichi: $\delta^{(2)}U > 0$.

3.2 - I SISTEMI ELASTICI

Per simili sistemi, alla variazione di configurazione δC corrisponde la somma algebrica dei lavori interno ed esterno, ovvero la variazione di energia totale:

$$\delta T = T = W + U = W - F \cdot f$$

esprimibile, anche, nella forma

$$\delta T = \delta^{(1)}T + \delta^{(2)}T + \dots$$

Avendo definito l'equilibrio come la possibilità del sistema di permanere nella propria condizione di quiete sotto l'azione delle forze ad esso applicate, e dunque come assenza di lavoro esterno, dovrà essere:

$$L_e - L_i \leq 0 \quad \forall \delta C$$

ovvero:

$$\delta T \geq 0 \quad \forall \delta C$$

Per il *Principio dei lavori virtuali* esteso ai sistemi elastici *condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione $C \equiv C_e$ sia di equilibrio è che risulti nullo il lavoro del primo ordine compiuto dalle forze interne ed esterne ovvero il lavoro di queste per i relativi spostamenti del primo ordine rispetto a qualsiasi variazione di configurazione δC eseguita a partire da $C \equiv C_e$.*

In altri termini ciò equivale a dire che in $C \equiv C_e$ si deve annullare la variazione prima della EPT:

$$\delta^{(1)}T = 0 \quad \forall \delta C$$

Tale condizione è nota come *Principio di stazionarietà dell'EPT* ovvero come *Primo principio dell'elasticità*.

E' questa una condizione di equilibrio *ristretto*, o *puntuale* o *matematico*.

La configurazione di equilibrio sarà stabile se, indagando in un intorno maggiore ossia sui termini di grado superiore al primo nelle Q_i , risulta positivo il primo termine non nullo, ovvero ad esempio:

$$\delta^{(2)}T = T^{(2)} > 0 \quad \forall \delta C$$

che esprime il *Secondo principio dell'elasticità*:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una configurazione di equilibrio sia stabile è che la EPT ammetta un minimo in C_e .

Condizione *sufficiente* per la stabilità di una configurazione di equilibrio C_e è che in essa sia positiva la variazione seconda dell'EPT ovvero il lavoro del secondo grado delle forze interne ed esterne per qualsiasi variazione δC della configurazione $C \equiv C_e$ (non necessaria perchè potrebbe essere $\delta^{(2)}T = 0$ e $\delta^{(3)}T > 0$) nota anche come *Teorema della minima energia potenziale totale*: esso rappresenta una particolarizzazione del *Teorema di Dirichlet* ^(*).

Di contro la condizione $\delta^{(2)}T < 0$, verificata per almeno una variazione di configurazione δC , risulta sufficiente per l'instabilità ed esprime il *teorema di Lyapunov*.

Si può in definitiva affermare che:

rispetto a tutte le possibili variazioni della configurazione principale di equilibrio C_e l'energia potenziale totale è minima, stazionaria o massima a seconda che la configurazione C_e risulti stabile, indifferente o instabile.

Le dette formulazioni ed i citati principi definiscono le configurazioni di equilibrio stabile, però, con riferimento alla sola intensità di carico presa in esame dovendosi ripetere l'indagine al mutare di essa e ciò al contrario di quanto accade per i sistemi rigidi per i quali le condizioni di stabilità sono indipendenti da un incremento proporzionale delle forze applicate. Al variare quindi dell'intensità di carico alcune configurazioni risulteranno stabili, altre instabili: è pertanto fondamentale definire quei valori delle azioni esterne cui corrisponde l'equilibrio indifferente, elemento di separazione fra i due comportamenti.

Il Principio di Dirichlet per il quale *la variazione seconda dell'energia potenziale totale, a partire dalla configurazione di equilibrio C_e e per qualunque variazione δC , è nulla in condizioni di equilibrio indifferente*, consente di determinare i detti valori delle forze applicate soddisfacendo la condizione: $\delta^{(2)}T = 0$.

Tale indifferenza è in effetti solamente teorica essendo connessa all'approssimazione che si compie considerando esatta una teoria di second'ordine, ovvero trascurando i termini superiori. Nella realtà essendo l'equilibrio indifferente legato alla condizione $\delta^{(i)}T = 0 \quad \forall i$ accade che, ove sia $\delta^{(2)}T = 0$ si debba indagare oltre per $i = 3, \dots, m$ fino a trovare un termine $\delta^{(i)}T \neq 0$ che consenta di classificare la configurazione come stabile o instabile.

^(*) Condizione necessaria perchè una configurazione di equilibrio C_e risulti stabile è che $\forall \delta C$ risulti:
 $\delta^{(i)}T = 0$ per $i = 1, \dots, n-1$ e $\delta^{(n)}T > 0$

A conclusione della presente disamina appare opportuno ricordare che per la classificazione dell'equilibrio elastico è possibile fare riferimento a due differenti criteri di stabilità:

Criterio statico, dovuto a *Dirichlet*, per il quale:

Una configurazione di equilibrio è stabile quando in essa l'energia potenziale totale presenta un minimo.

Criterio dinamico, dovuto a *Lyapunov*, per il quale:

Una configurazione di equilibrio è stabile quando una perturbazione costituita da spostamenti e velocità iniziali provoca movimenti decrescenti regolarmente al diminuire della perturbazione ovvero spostamenti e velocità tali che il fenomeno non si esalti ma rimanga contenuto nella misura della perturbazione impressa. Tale criterio risulta particolarmente importante quando i carichi sono funzione del tempo.

3.3 - I RAMI NATURALI DI EQUILIBRIO

Come si è detto in precedenza, la condizione di equilibrio ristretto è espressa dall'annullarsi della variazione prima dell'energia potenziale totale: $\delta^{(1)}T = 0$.

Nel caso in cui le configurazioni C e dunque il funzionale T dipendano da un numero finito di parametri Q_1, \dots, Q_n la variazione prima è data dal differenziale primo della funzione :

$$\delta^{(1)}T = d^{(1)}T = \frac{\partial T}{\partial Q_1} \cdot dQ_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial Q_n} \cdot dQ_n = \sum \frac{\partial T}{\partial Q_i} \cdot dQ_i = \sum T_i \cdot dQ_i$$

avendo indicato con T_i le derivate di T rispetto alle coordinate lagrangiane Q_i .

La condizione di equilibrio puntuale si scrive allora:

$$\frac{dT}{dQ_i} = T_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

e dà luogo ad un sistema di n equazioni algebriche.

Nel caso in cui le configurazioni dipendano, invece, da infiniti parametri, ovvero da un certo numero di funzioni (quali u, v, w, θ) la condizione di equilibrio^(*) $\delta^{(1)}T = 0$ darà luogo ad un sistema di equazioni differenziali in numero pari a quello delle funzioni incognite.

In entrambi i casi le equazioni così ottenute esprimono le leggi carichi-spostamenti che definiscono tutte le configurazioni di equilibrio, ovvero i rami naturali o principali di equilibrio: la struttura di tali leggi dipende essenzialmente dal grado di approssimazione con il quale si è operato ossia dall'ordine in cui viene espresso il funzionale dell'energia potenziale totale.

Di fatto le difficoltà analitiche connesse con l'esprimere T in funzione delle coordinate lagrangiane Q_i in una teoria di ordine superiore al secondo, fanno sì che ci si limiti alle determinazioni effettuate con tale precisione.

Esplicitando la EPT come somma dei termini di diverso ordine nelle Q_i tramite le quote W e U :

$$T = W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)} + \dots - F(f^{(1)} + f^{(2)} + \dots)$$

(per la quale, tranne i casi particolari esaminati nel seguito è sempre $W^{(1)} = 0$) la condizione di equilibrio puntuale si scrive:

$$W_i^{(2)} + W_i^{(3)} + W_i^{(4)} + \dots - F(f_i^{(1)} + f_i^{(2)} + \dots) = 0$$

da cui è possibile ricavare la relazione:

$$F = \frac{W_i^{(2)} + W_i^{(3)} + W_i^{(4)} + \dots}{f_i^{(1)} + f_i^{(2)} + \dots}$$

^(*)che si impone, in tale caso, applicando l'operatore variazionale di Eulero di cui si tratterà in seguito

Se $f_i^{(1)} \neq 0$, ovvero le forze esterne compiono lavoro del primo ordine, accade che facendo tendere a zero le Q_i risulta $F = \frac{0}{\text{cost.}} = 0$ e dunque il ramo di equilibrio passa per l'origine: tale ramo si definisce *naturale* o *principale*.

Nel caso in cui risulti $f_i^{(1)} = 0 \quad \forall i$, ovvero le forze esterne non compiono lavoro del primo ordine, facendo tendere a zero le Q_i risulterà F tendente al valore:

$F_c = \frac{W_i^{(2)}}{f_i^{(2)}}$ che si definisce critico ed il cui significato sarà chiarito nel seguito; il ramo di equilibrio in tale evenienza non passa più per l'origine e si definisce *secondario* o *deviato* o *variato* (*).

Il maggiore o minore grado di approssimazione, delle soluzioni, che si può perseguire è legato al numero di addendi non nulli considerato.

In tale spirito le trattazioni possibili, fino al secondo ordine, possono così classificarsi:

TEORIA LINEARE DEL PRIMO ORDINE (E, nota anche come teoria delle *piccole deformazioni* ($s = s^{(1)}$) e dei *piccoli spostamenti* ($f = f^{(1)}$) in quanto si confonde la configurazione deformata C con quella iniziale indeformata C_0 e con riferimento ad essa si calcolano le caratteristiche della sollecitazione esterna, quando si operi con metodo geometrico; restano validi, dunque, i principi di Kirchoff e di sovrapposizione degli effetti.

Il sistema risolutore è lineare:

$$W_i^{(2)} - F \cdot f_i^{(1)} = 0$$

ovvero:

$$\frac{\partial W^{(2)}}{\partial Q_i} - F \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial Q_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, n\}$$

ed il ramo naturale:

$$F = \frac{W_i^{(2)}}{f_i^{(1)}}$$

coincide con la tangente al vero ramo di equilibrio.

Tale ramo è, pertanto, caratterizzato da configurazioni di equilibrio C_e sempre stabili e si può quindi definire a *stabilità costante*.

(*) Come si vedrà nel seguito è questa una condizione necessaria ma non sufficiente per l'instabilità improvvisa a partire dalla configurazione indeformata, ovvero alle *variazioni Euleriane*.

In tale teoria, avendo confuso la configurazione deformata con quella indeformata non si evidenzia alcun fenomeno di instabilità.

D'altronde, essendo il termine $F \cdot f^{(1)}$ nullo per il principio dei lavori virtuali e $W^{(2)}$ sempre positivo, per definizione, l'equilibrio non può che apparire sempre stabile; in effetti manca il prodotto $F \cdot f^{(2)}$ necessario per completare i termini dello stesso grado della teoria adottata.

TEORIA LINEARIZZATA O IBRIDA-LINEARE nota anche come teoria delle piccole deformazioni ($s = s^{(1)}$) e dei grandi spostamenti ($f = f^{(1)} + f^{(2)}$) in quanto, operando con metodo geometrico, le caratteristiche della sollecitazione esterna vengono calcolate tenendo conto degli spostamenti dei punti di applicazione delle forze esterne e, dunque sulla configurazione deformata; resta ancora valido il principio di Kirchoff (essendo le equazioni di equilibrio lineari) ma non è più valido, in genere, il principio di sovrapposizione degli effetti.

Il sistema risolvete è ancora lineare:

$$W_i^{(2)} - F \cdot (f_i^{(1)} + f_i^{(2)}) = 0$$

ovvero:

$$\frac{\partial W^{(2)}}{\partial Q_i} - F \cdot \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial Q_i} + \frac{\partial f^{(2)}}{\partial Q_i} \right) = 0 \quad \forall i \in \{1, n\}$$

E' una teoria completa fino al secondo grado nelle coordinate lagrangiane, che dà luogo al ramo naturale di equilibrio:

$$F = \frac{W_i^{(2)}}{f_i^{(1)} + f_i^{(2)}}$$

ma consente di individuare i valori dei carichi cui corrispondono configurazioni indifferenti. In essa rientrano le teorie classiche sulla stabilità di Bryan e Timoshenko.

TEORIA DEL SECONDO ORDINE COMPLETA altrimenti nota come teoria delle grandi deformazioni ($s = s^{(1)} + s^{(2)} + s^{(3)}$) e dei grandi spostamenti ($f = f^{(1)} + f^{(2)}$) in quanto, nell'ambito di un metodo geometrico, non solo le caratteristiche della sollecitazione esterna vengono valutate sul sistema deformato ma nel calcolare l'energia elastica si tiene conto delle componenti di deformazione di ordine superiore al primo; in tale teoria non sono più validi né il principio di Kirchoff né quello di sovrapposizione degli effetti.

Il sistema risolvibile non è più lineare

$$W_i^{(2)} + W_i^{(3)} + W_i^{(4)} - F \cdot (f_i^{(1)} + f_i^{(2)}) = 0$$

ovvero:

$$\frac{\partial W^{(2)}}{\partial Q_i} + \frac{\partial W^{(3)}}{\partial Q_i} + \frac{\partial W^{(4)}}{\partial Q_i} - F \cdot \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial Q_i} + \frac{\partial f^{(2)}}{\partial Q_i} \right) = 0 \quad \forall i \in \{1, n\}$$

ed il ramo naturale:

$$F = \frac{W_i^{(2)} + W_i^{(3)} + W_i^{(4)}}{f_i^{(1)} + f_i^{(2)}}$$

definisce graficamente una curva del terzo grado, luogo delle configurazioni di equilibrio C_e .

Esprimendo in forma diversa tale equazione:

$$F = \frac{W_i^{(2)}}{f_i^{(1)}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{W_i^{(3)}}{W_i^{(2)}} + \frac{W_i^{(4)}}{W_i^{(2)}} \right)}{\left(1 + \frac{f_i^{(2)}}{f_i^{(1)}} \right)}$$

si osserva che il secondo fattore contiene i termini correttivi che consentono di passare dalla soluzione del primo ordine a quella del secondo.

Semprechè $W_i^{(3)}$ ed $f_i^{(2)}$ siano non nulli^(*) potranno verificarsi i casi seguenti:

a) - *Ramo di equilibrio a stabilità crescente* (indefinitamente).

Condizione necessaria e sufficiente perchè ciò accada è che si verifichino le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} W_i^{(3)} & \text{ concorde a } W_i^{(2)} \\ f_i^{(2)} & \text{ discorde a } f_i^{(1)} \end{aligned}$$

Il sistema si definisce in *equilibrio di prima specie*.

b) - *Ramo di equilibrio a stabilità decrescente*.

La condizione perchè ciò avvenga è che sia:

$$\begin{aligned} W_i^{(3)} & \text{ discorde a } W_i^{(2)} \\ f_i^{(2)} & \text{ concorde a } f_i^{(1)} \end{aligned}$$

(*) Ove ciò non fosse dovrebbe operarsi in una teoria del terzo ordine essendo la W espressa in modo completo fino al termine $2n-1$ (con n ordine della teoria adottata) e dunque nel caso in esame (teoria del secondo ordine) fino al terzo grado.

Il sistema si definisce in *equilibrio di seconda specie* ed il ramo naturale si sviluppa al di sotto del piano $F_l = \text{cost.}$ ove ad F_l viene dato il nome di *carico limite*, non potendo essere superato.

Qualora non siano verificate le condizioni che danno luogo ai due casi precedenti, nulla è possibile dire, a priori, sull'andamento del ramo naturale di equilibrio; si potranno, allora, verificare situazioni intermedie come quella nota con l'appellativo di *equilibrio di seconda specie senza fase instabile*.

Da quanto detto si evince, dunque, che solamente una teoria di second'ordine completa consente di individuare la differenza di comportamento fra equilibrio di prima e di seconda specie mentre, di contro, una teoria del primo ordine dando luogo ad una legge lineare, non è in grado di evidenziare alcuna diversità.

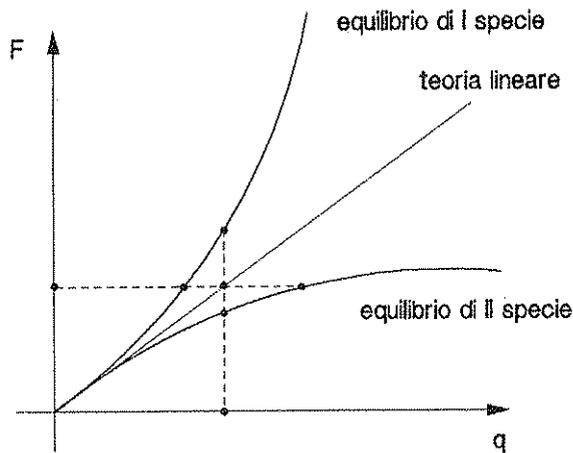


fig. 2.3

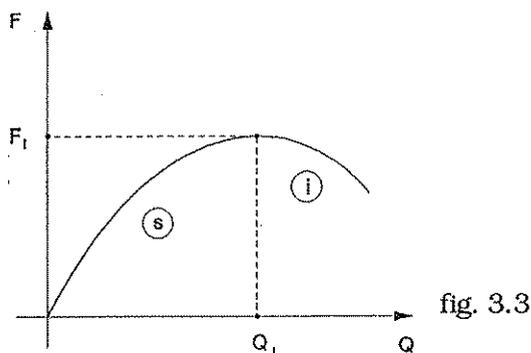
Va, inoltre, osservato che una teoria del primo ordine rispetto ad una del secondo, dà luogo a soluzioni in eccesso nei casi di equilibrio di prima specie essendo nella realtà le strutture meno cimentate, ed in difetto nei casi di equilibrio di seconda specie essendo nella realtà le strutture più cimentate. Ciò comporta che i problemi di equilibrio di prima specie si possano studiare nel primo ordine perchè i risultati sono certamente cautelativi rispetto a quelli reali mentre, di contro, i problemi di equilibrio di seconda specie vanno, necessariamente, analizzati in una teoria del secondo ordine essendo inaccettabili, per difetto, i risultati ottenuti nel primo.

Quando i punti rappresentativi delle configurazioni di equilibrio appartengono a rami crescenti ($\delta^{(2)}T > 0$) essi caratterizzano configurazioni di equilibrio stabile, mentre il contrario accade per le leggi carico-spostamento decrescenti ($\delta^{(2)}T < 0$): in ciò consiste il *Teorema dell'elasticità perfetta*.

Se, dunque, fossero sempre noti gli andamenti di tali leggi per sapere se una configurazione C_e di equilibrio è stabile o meno basterebbe verificare se nel punto rappresentativo di C_e la funzione risulta crescente o decrescente. Tranne, però, casi semplici, risulta praticamente impossibile, per la maggior parte delle strutture, definire tali andamenti e ciò comporta che si debbano considerare, in genere, le singole configurazioni di equilibrio (esaminando per ognuna la variazione seconda dell'energia totale) al fine di conoscerne la tendenza.

3.4 - INSTABILITA' PROGRESSIVA

Si è visto come per i sistemi in equilibrio di seconda specie (con fase instabile) e solo per essi, la legge carichi-spostamenti sia prima crescente fino ad un massimo e poi decrescente.



Avendo precisato, innanzi, che i rami crescenti caratterizzano configurazioni di equilibrio stabile e quelli decrescenti configurazioni di equilibrio instabile, il punto di massimo sarà rappresentativo di una configurazione di equilibrio indifferente: il carico F_1 ad essa corrispondente si definisce *carico limite* e rappresenta il valore oltre il quale l'equilibrio risulta impossibile: in effetti il sistema potrebbe ancora presentare altre configurazioni stabili, ma esse non rivestono alcun interesse tecnico essendo connesse a spostamenti troppo grandi che compromettono la funzionalità della struttura ed inficiano, comunque, le ipotesi su cui è basato il procedimento di indagine.

Tale fenomeno, precipuo delle strutture in equilibrio di seconda specie, si definisce *instabilità progressiva o geometrica o di seconda specie o per divergenza dell'equilibrio o snap-through* ed è caratterizzato da un aumento progressivo della deformazione che si esalta fino alla perdita della stabilità: nel caso di un sistema olonomo i parametri Q_i che definiscono le configurazioni assunte dalla struttura sono tutti presenti, ovvero diversi da zero, fin dall'inizio del fenomeno che, lungi dall'essere improvviso, si preannuncia gradualmente.

I valori che corrispondono alle configurazioni di equilibrio indifferente prendono nome di valori *limite* e, segnando sempre il passaggio da un comportamento stabile ad uno instabile, rappresentano effettivamente il limite che le azioni esterne non possono superare.

Sotto il profilo analitico, trattandosi di un problema di equilibrio di seconda specie, l'energia potenziale totale va determinata, perlomeno, in una teoria

completa del secondo ordine: imponendo la condizione di equilibrio si otterrà un sistema di equazioni non omogenee di terzo grado completo nelle variabili indipendenti Q_i . Noto il ramo naturale, e solo allora, si potrà procedere alla determinazione del massimo, ovvero del carico limite.

Fenomeni di instabilità progressiva si possono presentare per strutture come archi, volte a semplice curvatura, travi in parete sottile non diaframmate caricate flessionalmente, strutture intelaiate caricate in maniera generica, ed altre.

3.5 - INSTABILITA' IMPROVVISA

Si è visto che l'instabilità geometrica può verificarsi per i soli sistemi in equilibrio di seconda specie ed è, comunque, caratterizzata da deformazioni iniziali che aumentano progressivamente impegnando sin dall'origine tutti i parametri Q_i che definiscono la deformazione. Può, invece, accadere che una parte di essi, Q_l sia nulla ovvero che non intervenga fino a che il carico non attinge un particolare valore, definito *critico*, oltre il quale le Q_l assumono valori diversi da zero ed individuano nuove configurazioni dette di *equilibrio deviato o variato*, appartenenti ad un ramo secondario.

Il punto in corrispondenza del quale si attinge il carico critico prende il nome di *punto di biforcazione* (Poincarè - 1885).

E' questo, ad esempio, il caso dell'asta di Eulero per la quale la deformata flessionale, e dunque la funzione che la definisce, compare soltanto quando il carico attinge il valore critico, mentre la deformazione estensionale, ed i parametri che la individuano, sono presenti fin dall'inizio.

Il fenomeno testè descritto prende il nome di *instabilità improvvisa o euleriana o di prima specie o per biforcazione dell'equilibrio o buckling* e risulta, per certi versi, più insidiosa di quella di seconda specie che si annuncia, di contro, progressivamente. Il valore del carico corrispondente all'intersezione del ramo principale con quello secondario prende nome di *carico critico* ed è tale che le configurazioni di equilibrio corrispondenti a carichi più elevati, anche se stabili risultano spesso inaccettabili per l'entità degli spostamenti attinti.

Mentre i carichi limite, però, separano campi di equilibrio stabile da campi di equilibrio instabile, i carichi critici definiscono il passaggio da campi di equilibrio pre-critico (principale) stabile a campi di equilibrio post-critico (principale o secondario) stabile o instabile, retto da leggi differenti.

Sotto l'aspetto analitico nel caso di un sistema olonomo è possibile suddividere l'insieme delle n coordinate lagrangiane che definiscono tutti i gradi di libertà del sistema in due sottoinsiemi costituiti rispettivamente da m coordinate attive Q_k ed $n-m$ coordinate libere Q_l tali che, partendo dalla configurazione iniziale C_0 e fino al raggiungimento del carico critico risultino non nulle le coordinate attive.

Una volta attinto il carico critico può accadere, invece, che divengano non nulle tutte le coordinate lagrangiane e dunque anche quelle libere: in campo pre-critico le Q_k definiscono un ramo di equilibrio principale mentre in campo post-critico le Q_k e Q_l definiscono un ramo di equilibrio secondario.

L'intersezione di due rami individua una configurazione di biforcazione cui corrisponde il carico critico.

Se si indicano:

- con lettere maiuscole le coordinate che definiscono il ramo principale in campo pre-critico;
 - con lettere minuscole le coordinate che definiscono il ramo principale in campo post-critico o il ramo secondario;
 - con soprasegno le configurazioni di biforcazione ed i relativi carichi;
- si potranno definire:

Configurazioni di equilibrio principale o fondamentale o naturale in campo pre-critico quelle per le quali risulti:

$$\begin{aligned} Q_k &\neq 0 \quad \forall k \in \{1, m\} \\ Q_l &= 0 \quad \forall l \in \{m+1, n\} \end{aligned}$$

Configurazioni di biforcazione quelle per le quali risulti:

$$\begin{aligned} Q_k &= \overline{Q_k} \\ Q_l &= \overline{Q_l} = 0 \end{aligned}$$

Configurazioni di equilibrio fondamentale in campo post-critico quelle per le quali risulti:

$$\begin{aligned} q_k &\neq 0 \quad \forall k \in \{1, m\} \\ q_l &= 0 \quad \forall l \in \{m+1, n\} \end{aligned}$$

Configurazioni di equilibrio secondario o deviato o variato quelle per le quali risulti:

$$\begin{aligned} q_k &\neq 0 \quad \forall k \in \{1, m\} \\ q_l &\neq 0 \quad \forall l \in \{m+1, n\} \end{aligned}$$

In definitiva la condizione di equilibrio $\delta^{(1)}T=0$ dà luogo ad un sistema di equazioni scindibili in due gruppi distinti:

uno di m equazioni di equilibrio non omogenee del tipo:

$$\frac{\partial W^{(2)}}{\partial Q_k} + \frac{\partial W^{(3)}}{\partial Q_k} + \frac{\partial W^{(4)}}{\partial Q_k} + \frac{\partial U^{(1)}}{\partial Q_k} + \frac{\partial U^{(2)}}{\partial Q_k} = 0 \quad \text{con } k = 1, \dots, m$$

uno di $N = n-m$ equazioni di equilibrio omogenee del tipo:

$$\frac{\partial W^{(2)}}{\partial Q_l} + \frac{\partial W^{(3)}}{\partial Q_l} + \frac{\partial W^{(4)}}{\partial Q_l} + \frac{\partial U^{(1)}}{\partial Q_l} + \frac{\partial U^{(2)}}{\partial Q_l} = 0 \quad \text{con } l = 1, \dots, N$$

non contenenti termini puri nelle Q_k che ammettono la sola soluzione $Q_l = 0$ nella fase pre-critica ed altre due soluzioni che divengono reali solo a partire dallo stato critico.

Nell'esaminare il comportamento post-critico del sistema i differenti tipi di instabilità che possono verificarsi sono classificabili come segue:

- Instabilità reale* se le q_k e q_l sono crescenti per F decrescente:
le configurazioni di equilibrio deviato sono tutte instabili;
- Instabilità fittizia* se le q_k e q_l sono crescenti per F crescente:
le configurazioni di equilibrio deviato sono stabili seppur inaccettabili data l'entità degli spostamenti;
- Instabilità teorica* se le q_l assumono valori indeterminati per $F = F_c$:
le configurazioni di equilibrio deviato risultano indifferenti ma tale risultato dipende solo dalle approssimazioni fatte.

L'instabilità improvvisa, nel suo complesso, è caratteristica di strutture come le travi rettilinee, caricate assialmente o flessionalmente o torsionalmente, le travi ad anello caricate radialmente, gli archi sottili funicolari dei carichi, i tubi caricati assialmente, le piastre sottili caricate nel loro piano, ecc.

Ove le coordinate libere siano in numero $N > 1$ esisteranno N punti di biforcazione corrispondenti ad altrettante intersezioni fra ramo principale e rami secondari, cui corrispondono N valori dei carichi di biforcazione \overline{F}_i : in tali casi l'appellativo di *carico critico* spetta al più piccolo di tali valori.

Il criterio per definire i punti di biforcazione del ramo di equilibrio ed i relativi carichi \overline{F}_i è quello di indagare su tutti i punti di questo per vedere quali delle configurazioni da essi rappresentate siano anche equilibrate su rami secondari.

Per fare ciò basta imporre al sistema di equazioni di equilibrio omogenee la condizione che esistano soluzioni diverse dalla banale (*trivial solution*); ciò si ottiene imponendo la nullità della matrice dei coefficienti che dà luogo all'*equazione critica* i cui *autovalori* rappresentano i cercati carichi di biforcazione .

Questi, sostituiti nel sistema di equazioni omogenee iniziale forniscono i corrispondenti *autovettori*, ovvero i valori degli spostamenti incogniti relativi alle singole \overline{F}_i . Essendo tali soluzioni definite a meno di una costante, esse non individuano *deformate critiche* ma solo *forme critiche*.

In definitiva non può verificarsi alcun fenomeno di instabilità improvvisa se non esistono gradi di libertà non ancora impegnati: ciò è vero nel continuo come nel discreto.

3.6 - L'ENERGIA POTENZIALE LOCALE

Consideriamo la generica configurazione posseduta da un sistema, diversa da quella iniziale C_0 e sia questa, ad esempio, C^* .

Indichiamo con:

$$T(C^*) = W(C^*) + U(C^*)$$

l'energia posseduta dal sistema nella configurazione C^* partendo da C_0 .

Se a questo punto si porta il sistema dalla configurazione C^* alla configurazione C del suo intorno, a carico costante tramite il vettore di spostamento q che dà luogo alle deformazioni s ed agli spostamenti generalizzati f , si avrà il seguente incremento di energia:

$$L = L_S + L_F + \Phi$$

ove:

$L_S = S^* \cdot s$ rappresenta il lavoro degli sforzi interni S^* presenti in C^* per gli spostamenti s ;

$L_F = F^* \cdot f$ rappresenta il lavoro delle forze esterne F^* presenti in C^* per gli spostamenti f ;

$\Phi = \frac{1}{2} \cdot k \cdot s^2$ rappresenta l'energia elastica conseguente ad s .

I primi due addendi tengono conto di quello che è il *passato* della struttura nel passaggio da C_0 a C^* essendo S^* ed F^* dipendenti da esso.

Tale quota energetica prende nome di *energia potenziale locale*, sinteticamente EPL, si indica con la lettera L e rappresenta la sola variazione di $T(C)$ al variare di C^* in una configurazione del proprio intorno (ciò per essere la $T(C^*)$ costante).

Esplicitando i diversi addendi, in una teoria del second'ordine (sufficiente per definire la tendenza del ramo secondario) si può scrivere:

$$L = L_S^{*(1)} + L_F^{*(1)} + L_S^{*(2)} + L_F^{*(2)} + \Phi^{(2)} + \Phi^{(3)} + \Phi^{(4)}$$

I due termini di primo grado sono nulli se la configurazione C^* è di equilibrio mentre quelli di secondo grado sono caratteristici di una teoria ibrida che consente la determinazione del solo carico critico.

Come si vedrà nel seguito risulta comodo esprimere l'EPL di un sistema a partire dalla configurazione di biforcazione $\overline{C} \equiv C^*$. In tali casi, non essendo nota la \overline{C} che presupporrebbe già la conoscenza del corrispondente carico \overline{F} ,

si assume $\overline{C} \equiv C_0$ confondendo la configurazione sulla quale effettuare la valutazione dell'EPL con quella iniziale.

Tale procedura nota come *metodo delle variazioni euleriane*, dà luogo a valori dei carichi \overline{F} minori dei reali ed è applicabile solamente se è possibile l'equilibrio della struttura nella configurazione C_0 sotto le azioni presenti in \overline{C} : lo stato di tensione viene valutato nel primo ordine, quello di deformazione, ovvero la sua variazione, viene stimato a partire dalla configurazione indeformata nel senso di eseguire tutte e sole le valutazioni geometriche su C_0 .

La difficoltà di esprimere in maniera compiuta le leggi di equilibrio che definiscono il ramo secondario comporta l'esigenza di indagini locali che consentano perlomeno di individuarne la tendenza iniziale, a partire da $\overline{F}_1 \equiv F_c$.

Per condurre tale esame occorre indagare sulla EPL scritta nel punto di biforcazione, nota la quale è possibile determinare il ramo di equilibrio deviato o almeno la sua tendenza valutando il segno della quota di ordine più basso non nulla.

Come esempio di determinazione dei carichi di biforcazione e delle relative forme critiche, adottando il metodo delle variazioni euleriane (applicabili nel caso in esame) si consideri il sistema in figura costituito da aste rigide collegate da vincoli elastici e aventi eguale costante di rigidità k . Assumendo quali coordinate lagrangiane le rotazioni assolute delle singole aste, in una teoria completa si ha:

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot q_1^2 + \frac{1}{2} \cdot (q_2 - q_1)^2$$

$$U = -F \cdot l \cdot (1 - \cos q_1) - F \cdot l \cdot (1 - \cos q_2)$$

In una teoria linearizzata risulta:

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot [q_1^2 + (q_2 - q_1)^2]$$

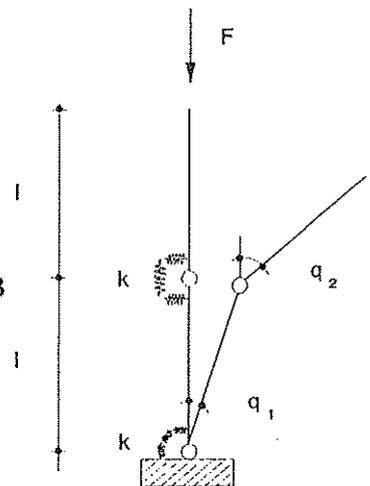
$$L_S^{(2)} = 0$$

$$L_F^{(2)} = -\frac{\overline{F} \cdot l}{2} \cdot (q_1^2 + q_2^2)$$

fig. 4.3

L'EPL nella configurazione $\overline{C} \equiv C_0$ vale dunque:

$$L^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ k \cdot [q_1^2 + (q_2 - q_1)^2] - \overline{F} \cdot l \cdot (q_1^2 + q_2^2) \right\}$$



da cui le equazioni dello stato critico:

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial q_1} = k \cdot (q_1 + q_1 - q_2) - \overline{F} \cdot l \cdot q_1 = 0$$

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial q_2} = k \cdot (q_2 - q_1) - \overline{F} \cdot l \cdot q_2 = 0$$

ovvero il sistema di equazioni omogenee

$$\begin{aligned} q_1 \cdot \left(2 \cdot k - \overline{F} \cdot l \right) - k \cdot q_2 &= 0 \\ -k \cdot q_1 + \left(k - \overline{F} \cdot l \right) \cdot q_2 &= 0 \end{aligned}$$

che ammette la soluzione banale $q_1 = q_2 = 0$ corrispondente alle configurazioni naturali di equilibrio.

Le configurazioni di biforcazioni si ottengono, invece, imponendo la condizione:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 \cdot k - \overline{F} \cdot l & -k \\ -k & k - \overline{F} \cdot l \end{vmatrix} = 0$$

che dà luogo all'equazione critica:

$$\overline{F}^2 \cdot l^2 - 3 \cdot \overline{F} \cdot l \cdot k + k^2 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$\overline{F}_1 = \frac{k}{l} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,382 \cdot \frac{k}{l}$$

$$\overline{F}_2 = \frac{k}{l} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,618 \cdot \frac{k}{l}$$

Sostituendo prima il valore di \overline{F}_1 e poi quello di \overline{F}_2 nel sistema iniziale si ottengono rispettivamente i seguenti risultati:

per $\overline{F} = \overline{F}_1$ si ha:

$$1,618 \cdot q_1 - q_2 = 0$$

e dunque in corrispondenza del primo autovalore:

$$\overline{F}_1 = 0,382 \cdot \frac{k}{l}$$

si ha:

$$q_{1,2} = 1,618 \cdot q_{1,1}$$

che definisce la prima forma critica.

Per $\overline{F} = \overline{F}_2$ si ha:

$$-0,618 \cdot q_1 - q_2 = 0$$

e dunque in corrispondenza del secondo autovalore:

$$\overline{F}_2 = 2,618 \cdot \frac{k}{l}$$

si ha:

$$q_{2,2} = -0,618 \cdot q_{2,1}$$

che definisce la seconda forma critica.

Il caratterizzare le configurazioni di equilibrio deviate con un numero finito di coordinate lagrangiane può essere utile per determinare, con una certa approssimazione, il carico critico di una struttura ad elasticità diffusa.

Si voglia ad esempio individuare il valore approssimato del carico critico di una trave semplicemente appoggiata agli estremi schematizzandola come sistema elasto-rigido ad uno ed a due gradi di libertà.

A) - Modello ad un grado di libertà.

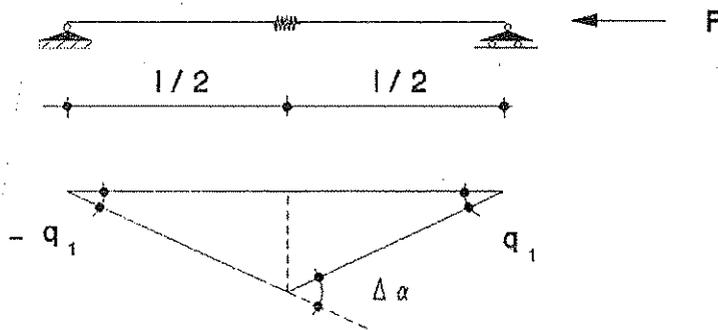


fig. 5.3

Con le notazioni in figura essendo:

$$\Delta\alpha = 2 \cdot q_1$$

$$\Delta l = 2 \cdot \left[\frac{l}{2} \cdot (1 - \cos q_1) \right] = l \cdot (1 - \cos q_1)$$

risulta:

$$T = W + U = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\alpha^2 - F \cdot \Delta l = 2 \cdot k \cdot q_1^2 - F \cdot l \cdot (1 - \cos q_1)$$

Da questa l'EPL nella configurazione di biforcazione espressa in una teoria del second'ordine linearizzata, vale:

$$L^{(2)} = \Phi^{(2)} - L_{\bar{F}} = 2 \cdot k \cdot q_1^2 - \bar{F} \cdot l \cdot \frac{q_1^2}{2}$$

da cui l'equazione critica:

$$4 \cdot k \cdot q_1 - \bar{F} \cdot l \cdot q_1 = 0$$

dalla quale si ricava il valore critico del carico:

$$\bar{F}_c = \frac{4 \cdot k}{l}$$

Concentrando nel vincolo elastico la rigidezza flessionale di metà trave ovvero assumendo:

$$k \approx \frac{2 \cdot E \cdot I}{l}$$

risulta:

$$F_c \approx 8 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

B) - Modello a due gradi di libertà

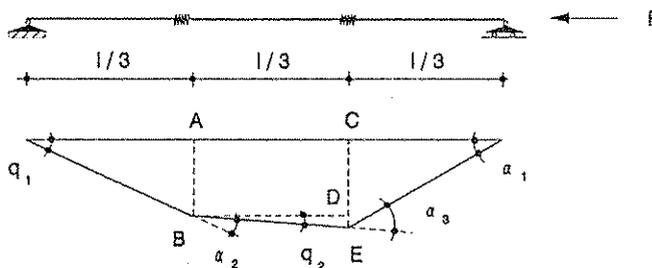


fig. 6.3

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti $f \approx f^{(1)}$ risulta:

$$\overline{AB} = \frac{l}{3} \cdot \text{sen } q_1 \approx \frac{l}{3} \cdot q_1$$

$$\overline{DE} = \frac{l}{3} \cdot \text{sen } q_2 \approx \frac{l}{3} \cdot q_2$$

$$\overline{CE} = \overline{AB} + \overline{DE} = \frac{l}{3} \cdot (q_1 + q_2)$$

$$\overline{CE} = \frac{l}{3} \cdot \text{sen } \alpha_1 \approx \frac{l}{3} \cdot \alpha_1$$

da cui:

$$\alpha_1 = q_1 + q_2$$

$$\alpha_2 = q_1 - q_2$$

$$\alpha_3 = q_2 + \alpha_1 = q_1 + 2 \cdot q_2$$

$$\Delta l = \frac{l}{3} \cdot (1 - \cos q_1) + \frac{l}{3} \cdot (1 - \cos q_2) + \frac{l}{3} \cdot (1 - \cos \alpha_1)$$

e sviluppando la funzione coseno in serie fino al secondo grado si ha:

$$\Delta l^{(2)} = \frac{l}{3} \cdot \left(\frac{q_1^2}{2} + \frac{q_2^2}{2} + \frac{\alpha_1^2}{2} \right) = \frac{l}{3} \cdot (q_1^2 + q_2^2 + q_1 \cdot q_2)$$

L'EPL, nella configurazione di biforcazione, adottando una teoria linearizzata, si può scrivere:

$$\begin{aligned} L^{(2)} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot \alpha_2^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \alpha_3^2 - \overline{F} \cdot \Delta l = \\ &= \frac{k}{2} \cdot (2 \cdot q_1^2 + 5 \cdot q_2^2 + 2 \cdot q_1 \cdot q_2) - \frac{\overline{F} \cdot l}{3} \cdot (q_1^2 + q_2^2 + q_1 \cdot q_2) \end{aligned}$$

da cui le equazioni critiche:

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial q_1} = \frac{k}{2} \cdot (4 \cdot q_1 + 2 \cdot q_2) - \frac{\overline{F} \cdot l}{3} \cdot (2 \cdot q_1 + q_2) = 0$$

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial q_2} = \frac{k}{2} \cdot (10 \cdot q_2 + 2 \cdot q_1) - \frac{\overline{F} \cdot l}{3} \cdot (2 \cdot q_2 + q_1) = 0$$

ovvero il sistema omogeneo:

$$\left(2 \cdot k - \frac{2}{3} \cdot \overline{F} \cdot l \right) \cdot q_1 + \left(k - \frac{\overline{F} \cdot l}{3} \right) \cdot q_2 = 0$$

$$\left(k - \frac{\overline{F} \cdot l}{3} \right) \cdot q_1 + \left(5 \cdot k - \frac{2}{3} \cdot \overline{F} \cdot l \right) \cdot q_2 = 0$$

La condizione perchè esistano soluzioni diverse dalla banale è che:

$$\begin{vmatrix} 2 \cdot k - \frac{2}{3} \cdot \overline{F} \cdot l & k - \frac{\overline{F} \cdot l}{3} \\ k - \frac{\overline{F} \cdot l}{3} & 5 \cdot k - \frac{2}{3} \cdot \overline{F} \cdot l \end{vmatrix} = 0$$

da cui l'equazione critica:

$$l^2 \cdot \overline{F}^2 - 12 \cdot k \cdot l \cdot \overline{F} + 27 \cdot k^2 = 0$$

le cui soluzioni, ovvero i cui autovalori, sono:

$$\overline{F}_1 = 3 \cdot \frac{k}{l}$$

$$\overline{F}_2 = 9 \cdot \frac{k}{l}$$

alle quali corrispondono le due forme critiche rappresentate in fig. 7.3

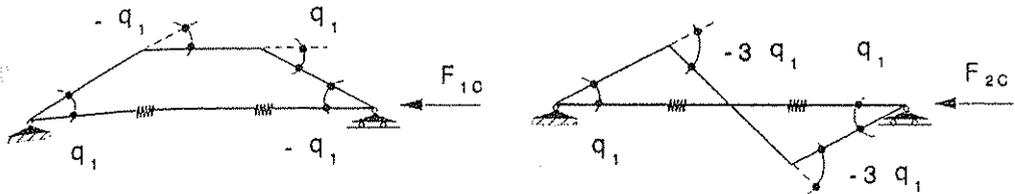


fig. 7.3

Concentrando un terzo della rigidezza flessionale in ogni concio elastico si può assumere:

$$k = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l}$$

da cui:

$$\overline{F}_1 = \frac{9 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

$$\overline{F}_2 = \frac{27 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

Si riporta di seguito il confronto fra il carico critico del primo modello, del secondo ed il carico critico della trave elastica (ovvero ad infiniti gradi di libertà) di Eulero:

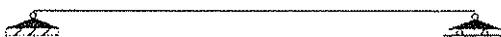
fig. 8.3



$$F_c = 8 \cdot \frac{EI}{l^2}$$



$$F_c = 9 \cdot \frac{EI}{l^2}$$



$$F_c = 9,87 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

3.7 - ESEMPI DI INSTABILITA' DI PRIMA SPECIE

Per esaminare i diversi tipi di instabilità euleriana che possono verificarsi in una struttura, studiamo il comportamento di alcuni classici sistemi elasto-rigidi olonomi dotati di vincoli elastici in numero tale da garantire perlomeno l'isostaticità.

3.7.1 - Primo esempio

Si consideri il sistema costituito da una sola asta vincolata ad un estremo con una cerniera elastica di rigidezza k_1 e caricata da una forza assiale F all'estremo libero.

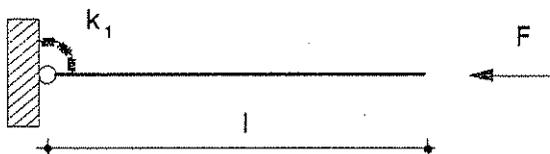


fig. 9.3

3.7.1.a - Modello elasto-rigido ad un grado di libertà.

Si suppone l'asta rigida e si assume quale coordinata lagrangiana q_1 la rotazione in radianti dell'asta intorno alla cerniera.

Nel caso in esame essendo:

$$f = l \cdot (1 - \cos q_1)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot q_1^2$$

$$U = -F \cdot l \cdot (1 - \cos q_1)$$

risulta:

$$T = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot q_1^2 - F \cdot l \cdot (1 - \cos q_1)$$

La condizione di equilibrio $\delta^{(1)}T = 0$ comporta:

$$k_1 \cdot q_1 - F \cdot l \cdot \sin q_1 = 0$$

L'equazione ammette, innanzitutto, la soluzione banale $q_1 = 0$ (trivial solution) relativa alle configurazioni naturali del sistema in corrispondenza delle quali risulta:

$$\delta^{(2)}T = k_1 - F \cdot l$$

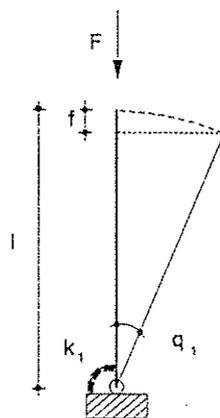


fig. 10.3

Tali configurazioni risultano stabili o instabili a seconda che sia: $\delta^{(2)}T \gtrless 0$

La configurazione di equilibrio neutro si ha per:

$$\delta^{(2)}T = k_1 - F \cdot l = 0$$

da cui il valore del carico critico:

$$F_c = \frac{k_1}{l}$$

Risulta dunque:

per $F < F_c$: $\delta^{(2)}T = F_c - F > 0$ ovvero equilibrio stabile

per $F > F_c$: $\delta^{(2)}T = F_c - F < 0$ ovvero equilibrio instabile

Per $q_1 \neq 0$ l'equazione di equilibrio è soddisfatta dalla soluzione:

$q_1 = \frac{F \cdot l}{k} \cdot \text{sen } q_1$ che definisce le configurazioni di equilibrio secondario o deviato;

ricavando la forza F in funzione di q_1 si ottiene:

$$F = \frac{k_1}{l} \cdot \frac{q_1}{\text{sen } q_1}$$

cui corrisponde il ramo di equilibrio secondario.

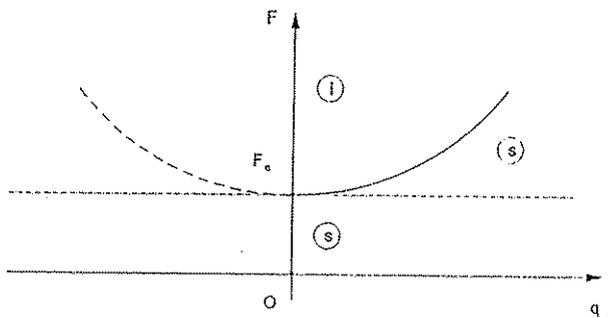


fig. 11.3

Il fenomeno si può classificare in tale caso come *instabilità simmetrica fittizia*;

in C l'equilibrio è neutro-stabile.

Esaminiamo, ora, i risultati a cui si perviene adottando una teoria linearizzata
 Dall'espressione dell'energia totale:

$$T = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot q_1^2 - F \cdot l \cdot (1 - \cos q_1)$$

sviluppando la funzione $\cos q_1$ in serie di Mac Laurin:

$$\cos q_1 = 1 - \frac{q_1^2}{2} + \frac{q_1^4}{24}$$

si ha per sostituzione:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot q_1^2 - \frac{q_1^2}{2} \cdot F \cdot l = \frac{q_1^2}{2} \cdot (k_1 - F \cdot l)$$

La condizione di equilibrio $\delta_1 T^{(2)} = 0$ porge l'equazione:

$$q_1 \cdot (k_1 - F \cdot l) = 0$$

ed è soddisfatta per:

$$q_1 = 0 \quad (\text{equilibrio fondamentale})$$

$$F = \frac{k_1}{l} \quad (\text{equilibrio deviato})$$

La condizione $T^{(2)} = 0$ fornisce il valore del carico critico:

$$F_c = \frac{k_1}{l}$$

Le configurazioni secondarie di equilibrio risultano tutte indifferenti e ciò dipende dalle approssimazioni connesse con la teoria adottata. La legge $F - q_1$ si presenta come in figura:

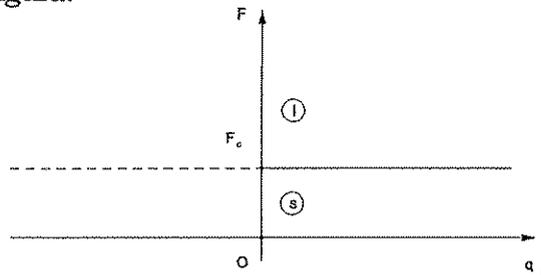


fig. 12.3

L'adozione di tale teoria consente di conoscere il solo carico critico ma non la tendenza post-critica; questa può essere saggiata valutando il segno del termine di quarto grado dell'EPT:

$$T^{(4)} = + F \cdot l \cdot \frac{q_1^4}{24}$$

valutato allo stato critico e cioè per $F = F_c = \frac{k_1}{l}$.

Essendo $T^{(4)}(\bar{C}) = k_1 \cdot \frac{q_1^4}{24} > 0$ la tendenza post-critica risulta stabile e, dunque, la sola determinazione di F_c risulta sufficiente a garantire la sicurezza.

Con la teoria adottata il fenomeno si presenta come *instabilità simmetrica teorica*.

3.7.1.b - Modello elastico a due gradi di libertà.

L'asta, vincolata esternamente come in precedenza, presenta un vincolo elastico interno nel quale si suppone di concentrare la deformabilità assiale: oltre q_1 , si assume quale seconda coordinata lagrangiana lo spostamento assiale q_2 .

Detta $k_2 = EA/l$ la rigidità estensionale dell'asta risulta:

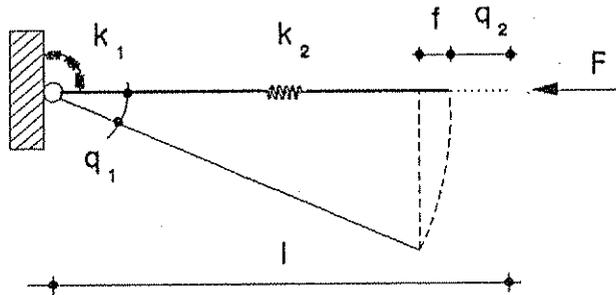


fig. 13.3

$$f = (l - q_2) \cdot (1 - \cos q_1) = l - q_2 - l \cdot \cos q_1 + q_2 \cdot \cos q_1$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot q_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot q_2^2 = \frac{1}{2} \cdot (k_1 \cdot q_1^2 + k_2 \cdot q_2^2)$$

$$U = -F \cdot (q_2 + f) = -F \cdot (l - l \cdot \cos q_1 + q_2 \cdot \cos q_1)$$

Da cui l'espressione esatta dell'energia totale:

$$T = \frac{1}{2} \cdot (k_1 \cdot q_1^2 + k_2 \cdot q_2^2) - F \cdot (l - l \cdot \cos q_1 + q_2 \cdot \cos q_1)$$

La condizione di equilibrio $\delta^{(2)}T = 0$ comporta:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \cdot dq_2 = 0$$

da cui l'equazioni di equilibrio:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = k_1 \cdot q_1 - F \cdot (l \cdot \sin q_1 - q_2 \cdot \sin q_1) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = k_2 \cdot q_2 - F \cdot \cos q_1 = 0$$

La qualità dell'equilibrio è legata, invece, al segno della variazione seconda di T :

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}T &= \frac{\partial^2 T}{\partial q_1^2} \cdot dq_1^2 + \frac{\partial^2 T}{\partial q_2^2} \cdot dq_2^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial q_1 \cdot \partial q_2} \cdot dq_1 \cdot dq_2 = \\ &= (k_1 - F \cdot l \cdot \cos q_1 + F \cdot q_2 \cdot \cos q_1) \cdot dq_1^2 + k_2 \cdot dq_2^2 + 2 \cdot F \cdot \sin q_1 \cdot dq_1 \cdot dq_2 \end{aligned}$$

Come si vede il sistema ammette soluzione per:

$$q_1 = 0 \text{ e } q_2 = \frac{F}{k_2}$$

da cui:

$$F = k_2 \cdot q_2$$

che definisce il ramo naturale d'equilibrio, in corrispondenza del quale risulta:

$$\delta^{(2)}T = \left(k_1 - F \cdot l + \frac{F \cdot F}{k_2} \right) \cdot dq_1^2 + k_2 \cdot dq_2^2$$

Il valore del carico nella configurazione critica si ottiene anche in tale caso per $\delta^{(2)}T = 0$; tale condizione si verifica per $dq_2 = 0$ e $dq_1 \neq 0$ se:

$$k_1 - F \cdot \left(l - \frac{F}{k_2} \right) = 0$$

ovvero se:

$$\frac{k_1}{l} - F \cdot \left(1 - \frac{F}{l \cdot k_2} \right) = 0$$

ed essendo:

$$\frac{F}{l \cdot k_2} = \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$$

si ha:

$$\frac{k_1}{l} - F \cdot (1 - \varepsilon) = 0$$

da cui:

$$F_c = \frac{k_1}{l} \cdot \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} \right)$$

Poichè risulta sempre $0 < \varepsilon < 1$ e dunque $\left(\frac{1}{1 - \varepsilon} \right) > 1$, il carico critico, determinato tenendo conto della deformazione assiale, risulta più alto di quello calcolato trascurandola.

Ove si voglia adottare una teoria linearizzata, partendo dall'espressione dell'energia totale:

$$T = \frac{1}{2} \cdot (k_1 \cdot q_1^2 + k_2 \cdot q_2^2) - F \cdot (l - l \cdot \cos q_1 + q_2 \cdot \cos q_1)$$

e sostituendo a $\cos q_1$ il suo sviluppo in serie fino al secondo grado si può scrivere:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot (k_1 \cdot q_1^2 + k_2 \cdot q_2^2) - F \cdot \left(\frac{l \cdot q_1^2}{2} + q_2 \right) = \frac{1}{2} \left[q_1^2 \cdot (k_1 - F \cdot l) + q_2 (k_2 \cdot q_2 - 2F) \right]$$

La condizione $\delta^{(1)}T = 0$ dà luogo alle equazioni di equilibrio:

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial q_1} = k_1 \cdot q_1 - F \cdot l \cdot q_1 = q_1 \cdot (k_1 - F \cdot l) = 0$$

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial q_2} = k_2 \cdot q_2 - F = 0$$

La variazione seconda dell'energia vale:

$$\delta^{(2)}T^{(2)} = (k_1 - F \cdot l) \cdot dq_1^2 + k_2 \cdot dq_2^2$$

Le soluzioni del sistema:

$$q_1 = 0$$

$$q_2 = \frac{F}{k_2}$$

corrispondono alle configurazioni di equilibrio principale e, come si nota, sono identiche a quelle ottenibili mediante una teoria completa; tali configurazioni sono stabili risultando per esse sempre:

$$\delta^{(2)}T = k_2 \cdot dq_2^2 > 0$$

Per $q_1 \neq 0$, ovvero in campo post-critico, le configurazioni di equilibrio corrispondono ai valori:

$$q_2 = \frac{F}{k_2}$$

ed:

$$F = \frac{k_1}{l}$$

per cui la legge $F - q_1$ è costante con ordinata $F = \frac{k_1}{l}$ pari al carico critico.

L'adozione della teoria ibrida consente, dunque, il calcolo del carico critico, ma non evidenzia l'esistenza del ramo stabile post-critico.

3.7.2 - Secondo esempio.

Si prenda in esame il sistema costituito da una sola asta vincolata ad un estremo con una cerniera liscia ed all'altro con un pendolo elastico di rigidezza k , caricata da una forza assiale F .

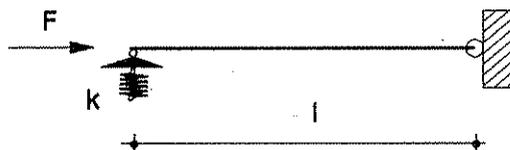


fig. 14.3

3.7.2.a - Modello elasto-rigido ad un grado di libertà.

Si suppone l'asta rigida e si assume quale coordinata lagrangiana la rotazione dell'asta intorno alla cerniera. Risulta in una teoria completa:

$$f = l \cdot (1 - \cos q_1)$$

$$s = l \cdot \sin q_1$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot (l \cdot \sin q_1)^2$$

$$U = -F \cdot l \cdot (1 - \cos q_1)$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot l^2 \cdot \sin^2 q_1 - F \cdot l \cdot (1 - \cos q_1)$$

Essendo:

$$\delta^{(1)}T = k_1 \cdot l^2 \cdot \sin q_1 \cdot \cos q_1 - F \cdot l \cdot \sin q_1$$

$$\delta^{(2)}T = k_1 \cdot l^2 \cdot \cos^2 q_1 - k_1 \cdot l^2 \cdot \sin^2 q_1 - F \cdot l \cdot \cos q_1$$

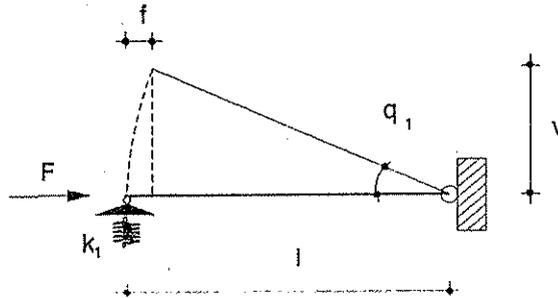


fig. 15.3

L'equazione di equilibrio:

$$l \cdot \sin q_1 \cdot (k_1 \cdot l \cdot \cos q_1 - F) = 0$$

ammette la soluzione relativa alla configurazione naturale $q_1 = 0$ in corrispondenza della quale si ha:

$$\delta^{(2)}T = k_1 \cdot l^2 - F \cdot l$$

e, dunque, dalla condizione di nullo, il valore del carico critico: $F_c = k_1 \cdot l$.

Le configurazioni naturali risultano stabili per $F < F_c$ ed instabili per $F > F_c$. Per $q_1 \neq 0$, in campo post-critico, l'equilibrio è soddisfatto per:

$$F = k_1 \cdot l \cdot \cos q_1$$

in corrispondenza del quale è $\delta^{(2)}T = -k_1 \cdot l^2 \cdot \sin^2 q_1 < 0$ sempre: l'equilibrio post-critico è, dunque, sempre instabile.

I risultati conseguiti sono evidenziati nel diagramma $F - q_1$.

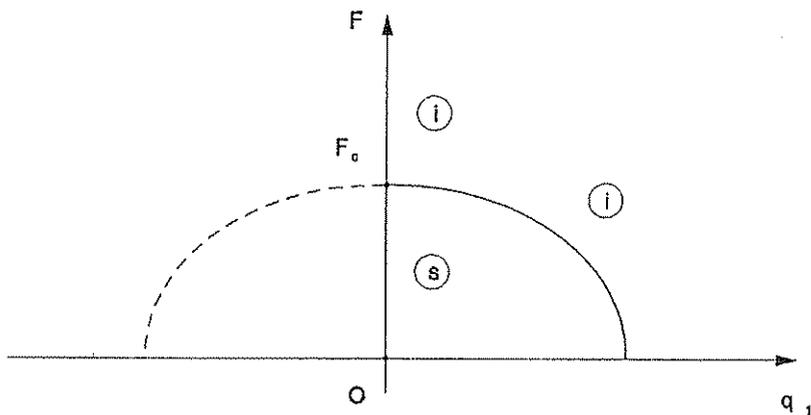


fig. 16.3

È, quello trattato, un caso di *instabilità simmetrica reale*.

Volendo adottare una teoria linearizzata si possono sostituire alle funzioni armoniche i loro sviluppi in serie arrestati al secondo grado:

$$\text{sen } q_1 = q_1 - \frac{q_1^3}{6} + \dots \quad \text{e} \quad \text{cos } q_1 = 1 - \frac{q_1^2}{2} + \frac{q_1^4}{24} - \dots$$

da cui:

$$T = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot l^2 \cdot q_1^2 - F \cdot l \cdot \left(\frac{q_1^2}{2} - \frac{q_1^4}{24} \right) + \dots$$

ovvero:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot (l \cdot k_1 - F) \cdot q_1^2$$

La condizione di equilibrio porge:

$$q_1 \cdot (k_1 \cdot l^2 - F \cdot l) = 0$$

ed ancora risulta:

$$\delta^{(2)}T^{(2)} = k_1 \cdot l^2 - F \cdot l$$

Mentre le configurazioni di equilibrio fondamentale corrispondono alla soluzione $q_1 = 0$, quelle post-critiche, per $q_1 \neq 0$ danno luogo alla relazione:

$$F = k_1 \cdot l = F_c$$

Si osserva che l'equilibrio è:

stabile per $F < F_c$

instabile per $F > F_c$

La legge $F - q_1$ è rappresentata in figura.

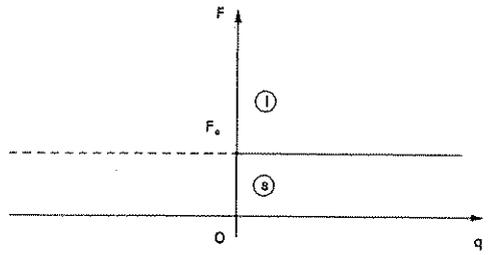


fig. 17.3

Si vede, anche in tale caso, come una teoria linearizzata fornisca il solo valore del carico critico ma nulla dica circa l'equilibrio deviato che, a causa delle approssimazione fatte, appare sempre di equilibrio indifferente.

3.7.2.b - Modello elastico a due gradi di libertà

Rimuovendo l'ipotesi di rigidità estensionale dell'asta si può tenere conto della deformabilità assiale caratterizzando tali spostamenti tramite la coordinata

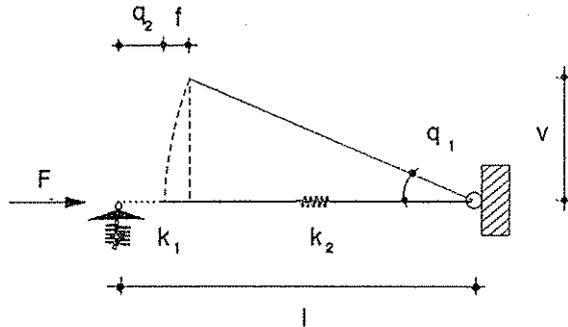


fig. 18.3

lagrangiana q_2 . La rigidità del vincolo elastico concentrato, che simula l'elasticità vale $k_2 = E \cdot A / l$ e si assume costante solamente in una teoria di primo ordine mentre nella realtà è decrescente all'aumentare del carico F . Risulta in tale caso:

$$v = (l - q_2) \cdot \text{sen } q_1$$

$$f = (l - q_2) \cdot (1 - \text{cos } q_1)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot (l - q_2)^2 \cdot \text{sen}^2 q_1 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot q_2^2$$

$$U = F \cdot [q_2 + (l - q_2) \cdot (1 - \text{cos } q_1)]$$

L'espressione esatta dell'EPT si scrive:

$$T = \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot q_2^2 + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot \text{sen}^2 q_1 \cdot (l^2 + q_2^2 - 2 \cdot l \cdot q_2) - F \cdot (l - l \cdot \text{cos } q_1 + q_2 \cdot \text{cos } q_1)$$

La condizione $\delta_1 T = 0$ dà luogo alle equazioni:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = k_1 \cdot \text{sen } q_1 \cdot \cos q_1 \cdot (l^2 + q_2^2 - 2 \cdot l \cdot q_2) - F \cdot (l - q_2) \cdot \text{sen } q_1 = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = k_1 \cdot \text{sen}^2 q_1 \cdot (q_2 - l) - F \cdot \cos q_1 + k_2 \cdot q_2 = 0$$

ovvero:

$$\text{sen } q_1 \cdot \left[k_1 \cdot \cos q_1 \cdot (l^2 + q_2^2 - 2 \cdot l \cdot q_2) - F \cdot (l - q_2) \right] = 0$$

$$k_2 \cdot q_2 + k_1 \cdot \text{sen}^2 q_1 \cdot (q_2 - l) - F \cdot \cos q_1 = 0$$

Una soluzione del sistema si ha per $q_1 = 0$ in corrispondenza della quale si ha $F = k_2 \cdot q_2$ ed essendo k_2 decrescente all'aumentare di F l'equilibrio fondamentale risulta di prima specie.

In corrispondenza di tale soluzione la variazione seconda:

$$\delta^{(2)} T = \frac{\partial^2 T}{\partial q_1^2} \cdot dq_1^2 + \frac{\partial^2 T}{\partial q_2^2} \cdot dq_2^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial q_1 \cdot \partial q_2} \cdot dq_1 \cdot dq_2$$

assume l'espressione:

$$\delta^{(2)} T = l \cdot \left\{ k_1 \cdot l \cdot \left[1 + \left(\frac{F}{k_2 \cdot l} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{F}{k_2 \cdot l} \right) \right] - F \cdot \left[1 - \left(\frac{F}{k_2 \cdot l} \right) \right] \right\} \cdot dq_1^2 + k_2 \cdot dq_2^2 + 4 \cdot k_1 \cdot dq_1 \cdot dq_2$$

ed essendo:

$$\frac{F}{k_2 \cdot l} = \frac{F}{E \cdot A} = \varepsilon$$

risulta:

$$\delta^{(2)} T = l \cdot \left\{ k_1 \cdot l \cdot [1 + \varepsilon^2 - 2 \cdot \varepsilon] - F \cdot [1 - \varepsilon] \right\} \cdot dq_1^2 + k_2 \cdot dq_2^2 + 4 \cdot k_1 \cdot dq_1 \cdot dq_2$$

La condizione $\delta^{(2)} T = 0$ è soddisfatta, per $dq_1 \neq 0$ e $dq_2 = 0$, solo se il contenuto della parentesi graffa è nullo, condizione che fornisce il valore del carico critico:

$$F_c = k_1 \cdot l \cdot \frac{1 + \varepsilon^2 - 2 \cdot \varepsilon}{1 - \varepsilon} = k_1 \cdot l \cdot (1 - \varepsilon)$$

Si nota immediatamente che essendo $0 < \varepsilon < 1$, e dunque $0 < (1 - \varepsilon) < 1$, il carico critico determinato sul modello di calcolo in esame risulta più piccolo di quello che si ottiene trascurando la deformabilità assiale dell'asta.

Volendo operare in una teoria linearizzata si sostituiscono nell'espressione di T gli sviluppi in serie delle funzioni $\text{sen } q_1$ e $\cos q_1$ arrestati al secondo ordine:

$$\text{sen } q_1 \approx q_1 \qquad \cos q_1 \approx 1 - \frac{q_1^2}{2}$$

da cui:

$$T = \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot q_2^2 + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot q_1^2 \cdot (l^2 + q_2^2 - 2 \cdot l \cdot q_2) - F \cdot \left(l - l + \frac{l \cdot q_1^2}{2} + q_2 - q_2 \cdot \frac{q_1^2}{2} \right)$$

ed eliminando i termini di grado superiore al secondo:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot q_2^2 + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot l^2 \cdot q_1^2 - \frac{F \cdot l}{2} \cdot q_1^2 - F \cdot q_2$$

la condizione $\delta^{(1)}T = 0$ porge:

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial q_1} = k_1 \cdot q_1 \cdot l^2 - F \cdot l \cdot q_1 = 0$$

$$\frac{\partial T^{(2)}}{\partial q_2} = k_2 \cdot q_2 - F = 0$$

da cui:

$$q_1 \cdot l \cdot (k_1 \cdot l - F) = 0$$

$$k_2 \cdot q_2 - F = 0$$

che ammette soluzioni

$$\text{per: } q_1 = 0 \quad \text{con: } q_2 = \frac{F}{k_2}$$

$$\text{per: } q_1 \neq 0 \quad \text{con: } q_2 = \frac{F}{k_2} \quad \text{ed } F = F_c = k_1 \cdot l$$

che rappresentano rispettivamente l'equilibrio pre e post-critico.

Essendo:

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}T^{(2)} &= \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial q_1^2} \cdot dq_1^2 + \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial q_2^2} \cdot dq_2^2 + 2 \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial q_1 \cdot \partial q_2} \cdot dq_1 \cdot dq_2 = \\ &= (k_1 \cdot l^2 - F \cdot l) \cdot dq_1^2 + k_2 \cdot dq_2^2 \end{aligned}$$

per $dq_2 = 0$ l'equilibrio risulta:

instabile per $F > F_c$

indifferente per $F = F_c$

Anche nel caso esaminato l'instabilità è di tipo *teorico* ed il ramo post-critico è rappresentato dalla sola tangente iniziale.

3.7.3 - Terzo esempio.

Si considera un sistema costituito da due aste di cui una verticale e l'altra inclinata a 45° , collegate fra loro e con il suolo da cerniere lisce e caricate da una forza verticale F .

3.7.3.a - Modello ad un grado di libertà elasto-rigido.

Si consideri rigida l'asta verticale e deformabile estensionalmente l'asta inclinata, mediante l'introduzione di un vincolo interno avente elasticità k_1 ; si assuma come coordinata lagrangiana la rotazione q_1 dell'asta verticale.

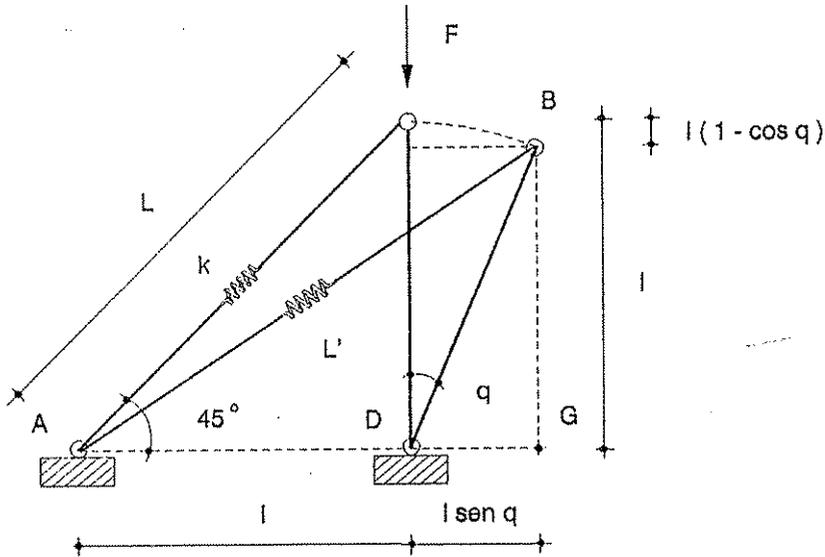


fig. 19.3

Da considerazioni geometriche risulta:

$$L' = \overline{AB} = \sqrt{BG^2 + AG^2} = \sqrt{(l \cdot \cos q_1)^2 + (l + l \cdot \sin q_1)^2} = l \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \sin q_1}$$

e dunque:

$$\Delta L = L' - L = \sqrt{2} \cdot l \cdot (\sqrt{1 + \sin q_1} - 1)$$

Le quote energetiche valgono pertanto:

$$W = \frac{1}{2} \cdot k_1 \Delta L^2 = k_1 \cdot l^2 \cdot (2 + \sin q_1 - 2 \cdot \sqrt{1 + \sin q_1})$$

$$U = -F \cdot l \cdot (1 - \cos q_1)$$

$$T = k_1 \cdot l^2 \cdot \left[2 + \sin q_1 - 2 \cdot (1 + \sin q_1)^{\frac{1}{2}} \right] - F \cdot l \cdot (1 - \cos q_1)$$

La condizione di equilibrio $\delta^{(1)}T = 0$ porge:

$$k \cdot l^2 \left(\cos q_1 - \frac{\cos q_1}{\sqrt{1 + \sin q_1}} \right) - F \cdot l \cdot \sin q_1 = 0$$

e dunque:

$$F = k_1 \cdot l \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} q_1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} q_1}} \right)$$

La variazione seconda si scrive:

$$\delta^{(2)}T = k \cdot l^2 \cdot \left[-\operatorname{sen} q_1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + \operatorname{sen} q_1)^{-\frac{3}{2}} \cdot \cos^2 q_1 + (1 + \operatorname{sen} q_1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sen} q_1 \right] - F \cdot l \cdot \cos q_1$$

e nel punto critico di biforcazione

$$\delta^{(2)}T(0) = \frac{k_1 \cdot l^2}{2} - F \cdot l$$

da cui per $\delta^{(2)}T = 0$ si ottiene il valore del carico critico:

$$F_c = \frac{k_1 \cdot l}{2}$$

e per $k_1 = \frac{E \cdot A_1}{l \cdot \sqrt{2}}$ si ha :

$$F_c = \frac{E \cdot A_1}{2 \sqrt{2}}$$

Dal segno della variazione seconda risulta inoltre che:

l'equilibrio è stabile per $F < F_c$

l'equilibrio è instabile per $F > F_c = \frac{k \cdot l}{2}$

L'andamento della legge carichi-spostamenti viene riportata in figura.

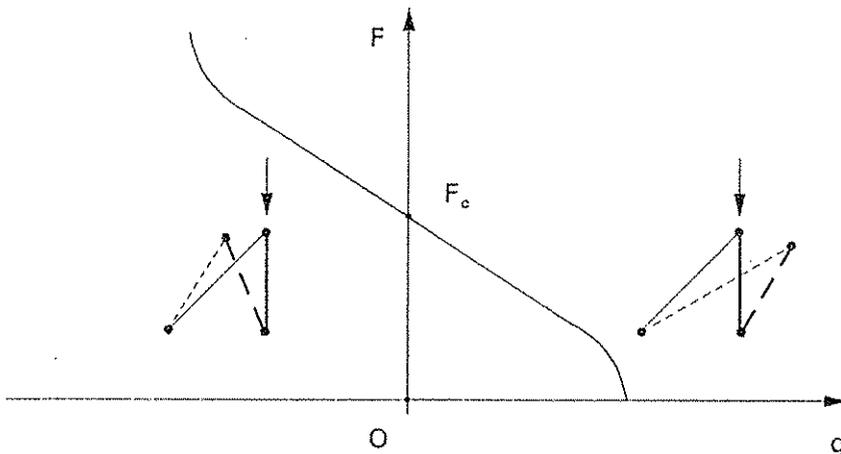


fig. 20.3

E' questo, dunque, un caso di instabilità di prima specie *asimmetrica* nella quale il comportamento per q positive e negative è diverso. Dall'osservazione della curva di equilibrio deviato si evince che la tendenza naturale della struttura oltre il carico critico è quella di assumere le configurazioni corrispondenti a $q > 0$ che sono instabili.

3.7.3.b - Modello elastico a due gradi di libertà.

In effetti il tipo di instabilità testè esaminato è del tutto teorica e non riscontrabile in alcun sistema reale. Considerato, infatti, che nella realtà l'asta considerata rigida avrà una, seppur minima, deformabilità rispetto all'altra, consegue la presenza di sforzi che non possono essere trascurati: non è possibile procedere in tal caso alle variazioni euleriane confondendo \bar{C} con C_0 e ciò per non poter essere il sistema equilibrato in C_0 sotto le forze \bar{F} corrispondenti alla configurazione di biforcazione \bar{C} . Nella realtà, pertanto, non si può prescindere dalla elasticità dell'asta verticale e volendo tenere conto anche di ciò si può pensare di introdurre un secondo vincolo elastico interno di rigidezza $k_2 = \frac{EA}{2}$ e di assumere come seconda coordinata lagrangiana la componente verticale dello spostamento q_2 .

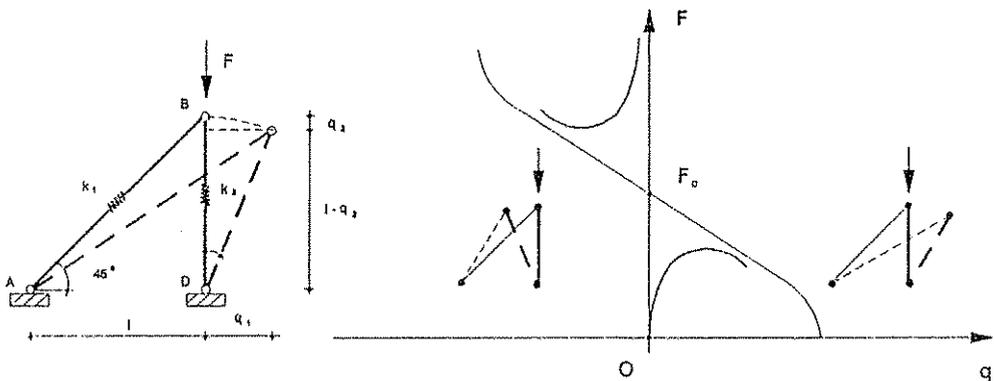


fig. 21.3

Ove si ponga $\rho = \frac{k_2}{k_1} = \frac{E \cdot A_2}{E \cdot A_1}$ rapporto fra le rigidezze, risolvendo il sistema delle due equazioni di equilibrio in q_1 e q_2 cui dà luogo la condizione $\delta^{(1)}T = 0$ si hanno gli andamenti della legge $F - q_1$ al variare di ρ rappresentati in fig. 21.3.

Da quanto sin qui esposto si può concludere che:

- Tenendo conto della deformabilità assiale dell'asta BD risulta che l'equilibrio del sistema è sempre di seconda specie con fase instabile^(*) e dunque in realtà la struttura presenta una instabilità progressiva e non improvvisa ammettendo un carico limite tanto più basso del carico critico calcolato quanto più l'asta BD è deformabile: si pensi che per un rapporto di rigidezza elevatissimo come $\rho = 1000$ risulta $F_l/F_c = 0,888$
- La curva di equilibrio reale si differenzia nettamente da quella del modello elasto-rigido ideale.
- Il ramo di equilibrio corrispondente a valori positivi di q_1 si definisce *spontaneo* mentre quello che si ottiene per q_1 negative è detto *innaturale* e rappresenta configurazioni che il sistema può assumere solo in seguito ad azioni forzanti esterne.

Il comportamento spontaneo è dovuto al fatto che essendo nel second'ordine:

$$\varepsilon = w' + \frac{1}{2} \cdot v'^2$$

il lavoro connesso con la deformazione della molla è diverso a seconda che lo spostamento sia positivo o negativo: mentre, infatti, il secondo addendo è sempre maggiore di zero, il primo cambia segno con lo spostamento e, dunque, alle due configurazioni corrisponde una diversa energia di deformazione.

^(*) Almeno per $\rho > 1,7$

3.8 - L'INFLUENZA DELLE IMPERFEZIONI

Per lungo tempo lo studio della stabilità è stato limitato alla sola determinazione del carico critico e ciò perchè gli studi di Eulero avevano dimostrato che le aste compresse hanno un comportamento post-critico stabile per cui risultava sufficiente all'ingegnere determinare il solo valore del carico critico, anche in presenza di imperfezioni. In effetti tale convincimento, suffragato dalla rispondenza fra teoria e sperimentazione per colonne o piastre (che hanno un comportamento post-critico stabile), si fece strada anche per l'impossibilità di studiare anche in forma chiusa l'equilibrio post-critico.

Ai primi del novecento, però, prove eseguite su strutture a guscio particolarmente sensibili alle imperfezioni a causa del proprio comportamento post-critico instabile provarono che il carico per il quale si verifica l'instabilità poteva essere anche il 25% di quello determinato sulle strutture ipotizzate perfette.

La constatazione che le imperfezioni determinano una sensibile riduzione del collasso se confrontato con il classico carico di biforcazione, risale agli inizi del XIX secolo ed è dovuta a Joung che per primo prese in esame la *colonna imperfetta*.

Nel 1930 ebbero inizio gli studi sul comportamento post-critico con Wagner che impostò una teoria della stabilità per le piastre piane, seguita dagli studi di Cox, Marguerre e Trefftz, ma solo nel 1963 fu pubblicata la tesi di Koiter del 1945 che chiariva il comportamento post-critico delle strutture: applicando il metodo delle variazioni a sistemi dotati di imperfezioni iniziali egli dimostrò che l'effetto di queste è strettamente legato al comportamento post-critico della struttura.

Tali concetti dimostrarono la necessità di studiare il comportamento post-critico per conoscere la sensibilità delle strutture alle imperfezioni e costituiscono certamente il più importante contributo alla materia dopo i primi studi di Eulero e di Poincaré.

Nel 1963, Thompson impostò una nuova teoria non lineare della stabilità elastica, in termini di coordinate generalizzate, presso l'University College London e nel 1973 Thompson e Hunt pubblicarono "A general theory of elastic stability".

Rinviando alla bibliografia consigliata la trattazione teorica delle strutture imperfette nonché l'influenza delle imperfezioni, si riportano di seguito alcuni esempi semplici di sistemi elasto-rigidi già trattati ma resi imperfetti per comprendere quale sia la differenza di comportamento nei diversi casi.

3.8.1.a - Primo esempio del sistema imperfetto.

Si prende in esame il modello già trattato in 3.7.1.a supponendo l'esistenza di una *imperfezione geometrica* di montaggio costituita dalla rotazione q_0 dell'asta rispetto alla configurazione iniziale.

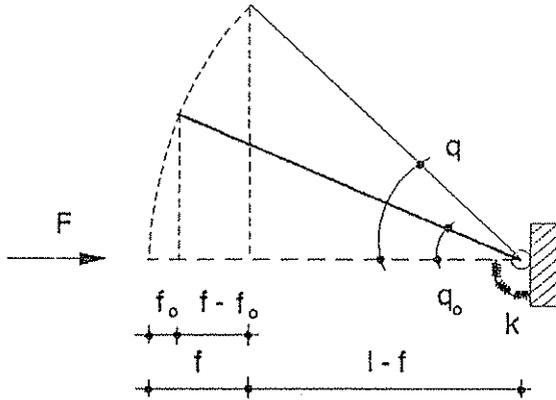


fig. 22.3

Risultando:

$$f_0 = l \cdot (1 - \cos q_0)$$

$$f = l \cdot (1 - \cos q_1)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot (q_1 - q_0)^2$$

$$U = -F \cdot (f - f_0) = -F \cdot l \cdot (\cos q_0 - \cos q_1)$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot q_0^2 - k_1 \cdot q_0 \cdot q_1 + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot q_1^2 + F \cdot l \cdot \cos q_1 - F \cdot l \cdot \cos q_0$$

La condizione $\delta^{(1)}T = 0$ porge l'equazione di equilibrio:

$$\frac{dT}{dq_1} = k_1 \cdot (q_1 - q_0) - F \cdot l \cdot \sin q_1 = 0$$

da cui:

$$F = \frac{k_1}{l} \cdot \frac{(q_1 - q_0)}{\sin q_1}$$

La legge carichi-spostamenti si presenta come in figura 23.3 ove si può osservare come l'imperfezione q_0 attivi immediatamente la coordinata libera q_1 dando luogo ad un unico *ramo di equilibrio imperfetto*.

Volendo operare una teoria linearizzata si può sviluppare la funzione $\cos q$ fino al secondo grado ottenendo così:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot (q_1^2 + q_0^2 - 2 \cdot q_1 \cdot q_0) - \frac{1}{2} \cdot F \cdot l \cdot (q_1^2 - q_0^2)$$

La condizione di equilibrio porge:

$$\frac{dT^{(2)}}{dq_1} = k_1 \cdot (q_1 - q_0) - F \cdot l \cdot q_1 = 0$$

da cui:

$$F = \frac{k_1}{l} \cdot \frac{q_1 - q_0}{q_1}$$

La legge $F - q$ è, dunque, una curva del tipo in fig. 24.4 avente per asintoto la retta $F_c = \frac{k_1}{l}$.

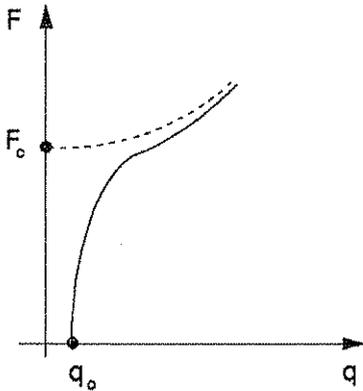


fig. 23.3

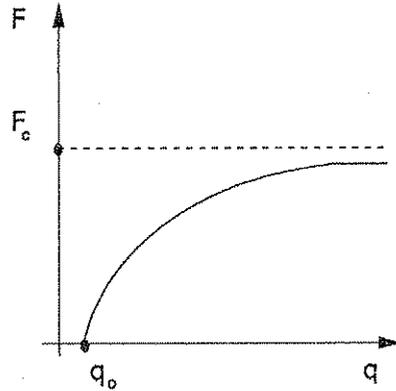
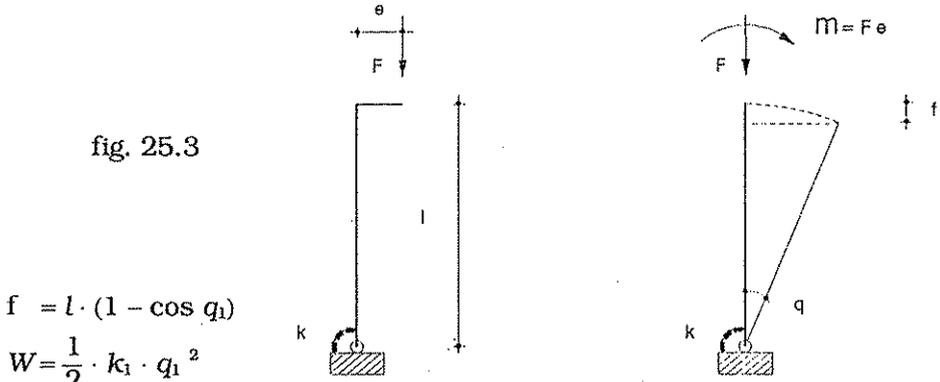


fig. 24.3

Con tale trattazione si configura, quindi, un caso di *instabilità teorica* e si ignora la tendenza post-critica.

Nel caso in cui lo stesso modello sia affetto da una *imperfezione di carico*, ovvero supponendo che il carico assiale F sia applicato con eccentricità iniziale e , risulta:

fig. 25.3



$$f = l \cdot (1 - \cos q_1)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot q_1^2$$

$$U = -F \cdot l \cdot (1 - \cos q_1) - F \cdot e \cdot q_1$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot q_1^2 - F \cdot (l - l \cdot \cos q_1 + e \cdot q_1)$$

Dalla condizione di equilibrio $\delta^{(1)}T = 0$ si evince l'equazione:

$$F = k_1 \cdot \frac{q_1}{l \cdot \sin q_1 + e}$$

cui corrisponde il ramo di equilibrio naturale, rappresentato in fig. 26.3, di seconda specie senza fase instabile.

Operando in una teoria approssimata risulta:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot q_1^2 - F \left(\frac{l \cdot q_1^2}{2} + e \cdot q_1 \right)$$

e per la condizione di equilibrio, la relazione:

$$F = k_1 \cdot \frac{q_1}{l \cdot q_1 + e}$$

che dà luogo alla legge asintotica, diagrammata in fig. 27.3, che parte dall'origine ed ha per asintoto la retta $F = F_c$.

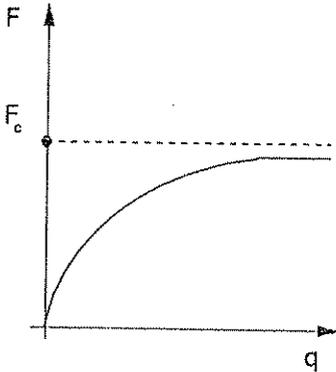


fig. 26.3

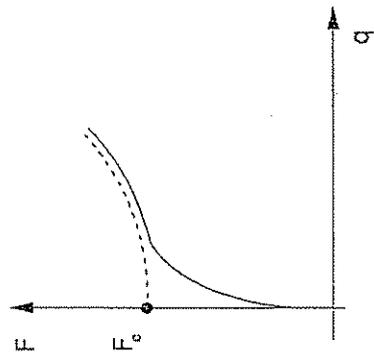


fig. 27.3

3.8.2 - Secondo esempio di sistema imperfetto.

Si prenda ora in esame il modello già trattato in 3.7.2.a supponendo questo affetto da una *imperfezione geometrica* costituita da una rotazione iniziale q_0 dell'asta.

Risulta in tale caso:

$$f - f_0 = l \cdot (\cos q_0 - \cos q_1)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot l^2 \cdot (\sin q_1 - \sin q_0)^2$$

$$U = -F \cdot l \cdot (\cos q_0 - \cos q_1)$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot l^2 \cdot (\sin q_1 - \sin q_0)^2 + F \cdot l \cdot (\cos q_1 - \cos q_0) =$$

$$= -k_1 \cdot l^2 \cdot \sin q_0 \cdot \sin q_1 + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot l^2 \cdot \sin^2 q_1 + F \cdot l \cdot \cos q_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot l^2 \cdot \sin^2 q_0 - F \cdot l \cdot \cos q_0$$

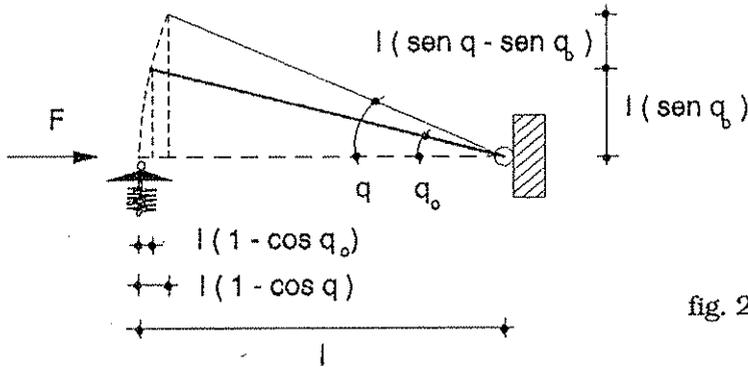


fig. 28.3

La condizione di equilibrio $\delta^{(1)}T = 0$ porge:

$$\frac{dT}{dq_1} = k_1 \cdot l^2 \cdot \sin q_1 \cdot \cos q_1 - k_1 \cdot l^2 \cdot \sin q_0 \cdot \cos q_1 - F \cdot l \cdot \sin q_1 = 0$$

da cui il legame carichi-spostamenti:

$$F = k_1 \cdot l \cdot \frac{\sin q_1 - \sin q_0}{\operatorname{tg} q_1}$$

che definisce l'unico *ramo di equilibrio imperfetto*, il cui andamento è presentato in fig. 29.3.

Nel caso, dunque, di imperfezione geometrica il sistema in esame si trova in equilibrio di seconda specie e non solo la instabilità non è più improvvisa ma progressiva, ma essa si verifica in corrispondenza di un valore F_l del carico cer-

tamente minore di F_c : la differenza $F_c - F_l$ risulta tanto più grande quanto maggiore è l'entità dell'imperfezione.

Volendo operare in una teoria linearizzata mediante la procedura già nota, risulta:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot l^2 \cdot (q_1 - q_0)^2 - \frac{1}{2} F \cdot l \cdot (q_1^2 - q_0^2)$$

e da questa per $\delta^{(1)}T^{(2)} = 0$ si ottiene la funzione:

$$F = k_1 \cdot l \cdot \frac{q_1 - q_0}{q_1}$$

il cui andamento è rappresentato in fig. 30.3.

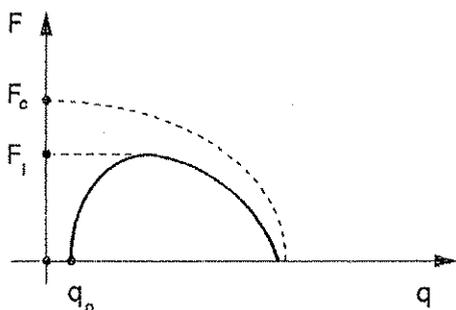


fig. 29.3

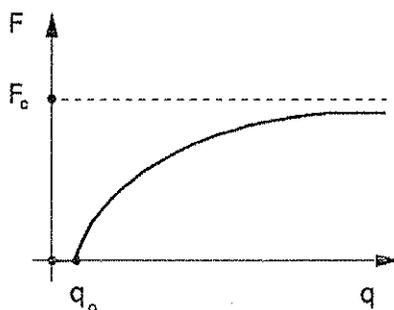


fig. 30.3

PARTE SECONDA

INSTABILITA' DELLE STRUTTURE

4 - LE ASTE PIANE RETTILINEE

4.1 - ANALISI DELLA DEFORMAZIONE NEL SECOND'ORDINE

Si prenda in esame il caso di una trave piana rettilinea dotata di sezione generica e caricata in modo qualunque da azioni ripartite e concentrate.

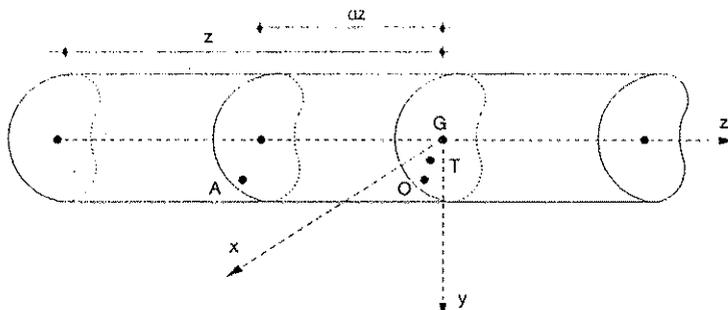


fig. 1.4

Si assuma il sistema di riferimento x, y, z , cartesiano ortogonale, di origine G , ove:

z coincide con l'asse della trave;

x ed y sono assi centrali di inerzia;

$G(0,0,z)$ è il baricentro della sezione generica di ascissa z , le cui componenti di spostamento sono u, v, w .

Indichiamo inoltre con:

$O(x_0, y_0, z)$ il punto generico della sezione di ascissa z le cui componenti di spostamento siano u_0, v_0, w_0 ;

$T(x_T, y_T, z)$ il centro di taglio della generica sezione all'ascissa z , coincidente con il centro di rotazione;

φ_x e φ_y le rotazioni della generica sezione rispettivamente intorno agli assi x ed y ;

θ la rotazione della generica sezione intorno ad un asse parallelo a z passante per T .

La trave può ritenersi come costituita da infinite sezioni rigide mutuamente collegate da conci deformabili di lunghezza dz ; la rigidità della sezione va considerata nel senso della conservazione della planarità (ipotesi di Navier) conseguente all'ingobbamento da taglio e della forma legata alla contrazione trasversale.

In tali ipotesi, le componenti di deformazione risultano così condizionate:

$$\varepsilon_x = 0 ; \varepsilon_y = 0 ; \gamma_{xy} = 0^{(*)}$$

$$\varepsilon_z \neq 0 ; \gamma_{zx} \neq 0 ; \gamma_{zy} \neq 0^{(**)}$$

Si prenda in esame, l'elemento di lunghezza dz corrispondente alla generica fibra di traccia O nella sezione di ascissa z .

Si determina la componente di deformazione ε_z in funzione delle componenti u_0, v_0, w_0 dello spostamento del generico punto O .

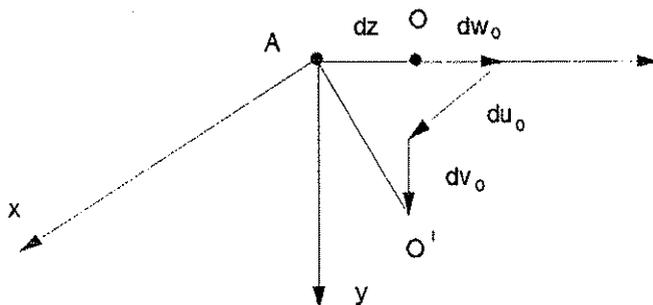


fig. 2.4

Detto AO l'elemento di lunghezza dz , a seguito degli spostamenti relativi (variazioni di spostamento) du_0, dv_0, dw_0 dell'estremo O , esso assume la lunghezza:

$$\begin{aligned} \overline{AO^*} &= \sqrt{(dz + dw_0)^2 + du_0^2 + dv_0^2} = \sqrt{(dz + w'_0 \cdot dz)^2 + (u'_0 \cdot dz)^2 + (v'_0 \cdot dz)^2} = \\ &= dz \sqrt{(1 + w'_0)^2 + u'_0{}^2 + v'_0{}^2} \end{aligned}$$

da cui la dilatazione media:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\overline{AO^*} - \overline{AO}}{\overline{AO}} = \frac{dz \sqrt{(1 + w'_0)^2 + u'_0{}^2 + v'_0{}^2} - dz}{dz} = \sqrt{(1 + w'_0)^2 + u'_0{}^2 + v'_0{}^2} - 1 = \\ &= \sqrt{1 + (w'_0{}^2 + 2 \cdot w'_0 + u'_0{}^2 + v'_0{}^2)} - 1 \end{aligned}$$

che si può scrivere nella forma: $\varepsilon_z = \sqrt{1 + R} - 1$

avendo posto: $R = w'_0{}^2 + 2 \cdot w'_0 + u'_0{}^2 + v'_0{}^2$

Sviluppando in serie di Mac Laurin la funzione:

$$f(R) = \sqrt{1 + R} = (1 + R)^{\frac{1}{2}}$$

(*) Avendo trascurato la contrazione trasversale.

(**) Delle ultime due si trascura l'aliquota dovuta al taglio ma non quella legata alla torsione.

si ha:

$$f(R) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot R + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot R^2 + \frac{1}{3!} f'''(0) R^3 + \dots$$

Risultando:

$$f(R) = (1 + R)^{\frac{1}{2}} \quad \text{da cui: } f(0) = 1$$

$$f'(R) = \frac{1}{2} \cdot (1 + R)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{da cui: } f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(R) = -\frac{1}{4} \cdot (1 + R)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{da cui: } f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(R) = \frac{3}{8} \cdot (1 + R)^{-\frac{5}{2}} \quad \text{da cui: } f'''(0) = \frac{3}{8}$$

la funzione $f(R)$ si può scrivere nella forma:

$$f(R) = 1 + \frac{1}{2} \cdot R - \frac{1}{8} \cdot R^2 + \frac{1}{16} \cdot R^3 - \dots$$

Sostituendo l'espressione di R ed arrendendosi ai termini del secondo grado nelle componenti u_0, v_0, w_0 si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z = \sqrt{(1 + R)} - 1 \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot w_0'^2 + w_0' + \frac{1}{2} \cdot u_0'^2 + \frac{1}{2} \cdot v_0'^2 - \\ - \frac{1}{8} \cdot (w_0'^2 + 2 \cdot w_0' + u_0'^2 + v_0'^2)^2 + \dots - 1 \end{aligned}$$

da cui:

$$\varepsilon_z = w_0' + \frac{1}{2} \cdot (u_0'^2 + v_0'^2) = \varepsilon_z^{(1)} + \varepsilon_z^{(2)} = \varepsilon_z$$

Poichè nello studio della trave i parametri di deformazione sono relativi all'asse, luogo dei baricentri delle singole sezioni, sarà necessario esprimere le componenti dello spostamento u_0, v_0, w_0 , del punto generico in funzione delle componenti dello spostamento del baricentro u, v, w .

Operando per sovrapposizione degli effetti risulta che:

a) - le traslazioni u, v, w di G comportano uguali traslazioni del generico punto O della sezione per cui:

$$u_0 = u, \quad v_0 = v, \quad w_0 = w,$$

b) - la rotazione torsionale θ della sezione intorno a T dà luogo alle componenti di spostamento:

$$u_0 = -\theta \cdot (y - y_T) - \frac{1}{2} \cdot \theta^2 \cdot (x - x_T)$$

$$v_0 = +\theta \cdot (x - x_T) - \frac{1}{2} \cdot \theta^2 \cdot (y - y_T)$$

ottenibili, anche, scrivendo l'equazione della circonferenza di centro T e sviluppando in serie le funzioni trigonometriche;

c) - gli ingobbamenti da torsione non uniforme comportano:

$$u_0 = -\theta' \cdot \lambda$$

d) - la rotazione flessionale della sezione $\varphi_y = u'$ nel piano xz determina:

$$u_0 = -\frac{1}{2} \cdot u'^2 \cdot x$$

$$v_0 = -u' \cdot x$$

e) - La rotazione $-\varphi_x = -v'$ flessionale della sezione nel piano yz dà luogo a^(*):

$$v_0 = -\frac{1}{2} \cdot v'^2 \cdot y$$

$$u_0 = -v' \cdot y$$

In definitiva le componenti dello spostamento del generico punto O in funzione delle componenti di spostamento del baricentro G , si scrivono:

$$u_0 = u - \frac{1}{2} \cdot u'^2 \cdot x - \theta \cdot (y - y_T) - \frac{1}{2} \cdot \theta^2 \cdot (x - x_T)$$

$$v_0 = v - \frac{1}{2} \cdot v'^2 \cdot y + \theta \cdot (x - x_T) - \frac{1}{2} \cdot \theta^2 \cdot (y - y_T)$$

$$w_0 = w - u' \cdot x - v' \cdot y - \theta' \cdot \lambda$$

e separando i termini si hanno:

componenti dello spostamento del primo grado

$$u_0^{(1)} = u - \theta \cdot (y - y_T)$$

$$v_0^{(1)} = v + \theta \cdot (x - x_T)$$

$$w_0^{(1)} = w - u' \cdot x - v' \cdot y - \theta' \cdot \lambda$$

(*) Lo stesso risultato si otterrebbe imprimendo una rotazione φ_x positiva essendo in tal caso

$$\varphi_x = -v'$$

componenti dello spostamento del secondo grado:

$$u_0^{(2)} = -\frac{1}{2} \cdot u'^2 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \theta^2 \cdot (x - x_T)$$

$$v_0^{(2)} = -\frac{1}{2} \cdot v'^2 \cdot y - \frac{1}{2} \cdot \theta^2 \cdot (y - y_T)$$

$$w_0^{(2)} = 0$$

Ancora per sostituzione è possibile ottenere le espressioni di ε_z nel primo e nel secondo ordine in funzione di u, v, w .

Essendo: $\varepsilon_z^{(1)} = w'_0$

risulta, derivando l'espressione di u_0 rispetto a z :

$$\varepsilon_z^{(1)} = w' - u'' \cdot x - v'' \cdot y - \theta'' \cdot \lambda$$

Essendo ancora: $\varepsilon_z^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot u'_0{}^2 + \frac{1}{2} \cdot v'_0{}^2$

si avrà, per sostituzione, la componente di deformazione del secondo grado:

$$\varepsilon_z^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \left[u'^2 + \theta'^2 \cdot (y - y_T)^2 - 2 \cdot u' \cdot \theta' \cdot (y - y_T) + v'^2 + \theta'^2 \cdot (x - x_T)^2 + 2 \cdot v' \cdot \theta' \cdot (x - x_T) + \dots \right]$$

ed eliminando i termini di ordine superiore:

$$\varepsilon_z^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ (u'^2 + v'^2) + \theta'^2 \cdot [(x - x_T)^2 + (y - y_T)^2] + 2 \cdot \theta' \cdot [v' \cdot (x - x_T) - u' \cdot (y - y_T)] \right\}$$

Per quanto riguarda gli scorrimenti è sufficiente adottare le note espressioni del primo ordine in funzione delle componenti di spostamento:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

Sostituendo le espressioni di u_0, v_0, w_0 del primo ordine in funzione di u, v, w , si ha:

$$\gamma_{xz}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x} (w - u' \cdot x - v' \cdot y - \theta' \cdot \lambda) + \frac{\partial}{\partial z} [u - \theta \cdot (y - y_T)]$$

$$\gamma_{yz}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial y} (w - u' \cdot x - v' \cdot y - \theta' \cdot \lambda) + \frac{\partial}{\partial z} [v + \theta \cdot (x - x_T)]$$

ed esplicitando le derivate:

$$\gamma_{xz}^{(1)} = -u' - \theta' \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x} + u' - \theta' \cdot (y - y_T)$$

$$\gamma_{yz}^{(1)} = -v' - \theta' \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y} + v' + \theta' \cdot (x - x_T)$$

da cui in definitiva:

$$\gamma_{xz}^{(1)} = -\theta \cdot \left(y - y_T + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{yz}^{(1)} = +\theta \cdot \left(x - x_T - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)$$

Le espressioni di $\varepsilon_z^{(1)}$ ed $\varepsilon_z^{(2)}$ testè ricavate esprimono le aliquote di primo e secondo grado della componente di deformazione ε_z relativa a qualunque punto $O(x,y)$ della sezione generica all'ascissa z in funzione delle componenti di deformazioni baricentriche.

Si osserva subito che per una sezione il cui centro di taglio coincida con il baricentro, la deformazione specifica vale :

$$\varepsilon_z^{(1)} = w'$$

$$\varepsilon_z^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot (u'^2 + v'^2)$$

ovvero, in una teoria del primo ordine:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = w'$$

mentre in una teoria del secondo ordine risulta:

$$\varepsilon = \varepsilon_2 = w' + \frac{1}{2} \cdot (u'^2 + v'^2)$$

4.2 - IL CASO DELLE TRAVI CHE SI INSTABILIZZANO IN UN PIANO DI SIMMETRIA

Nel caso in cui la trave si deformi in un piano di simmetria, e sia questo per ipotesi il piano $y-z$, una delle componenti di traslazione, nel caso specifico la u , risulta nulla, per cui la componente di deformazione baricentrica ε_z espressa in forma completa vale:

$$\varepsilon_z = \sqrt{(1+w')^2 + v'^2} - 1 = \sqrt{1 + (w'^2 + 2w' + v'^2)} - 1$$

$$\text{Ponendo: } w'^2 + 2w' + v'^2 = R$$

e sviluppando in serie di Mac Laurin la funzione:

$$\sqrt{1+R} = 1 + \frac{1}{2} \cdot R - \frac{1}{8} \cdot R^2 + \frac{1}{16} \cdot R^3$$

risulta a sostituzioni avvenute:

$$\varepsilon_z = 1 + \frac{1}{2} \cdot w'^2 + w' + \frac{1}{2} \cdot v'^2 - \frac{1}{8} \cdot (w'^2 + 2w' + v'^2)^2 + \frac{1}{16} \cdot (w'^2 + 2w' + v'^2)^3 - \dots - 1$$

Arrestandosi ai termini del quarto grado in w e v si si ha:

$$\varepsilon_z = w' + \frac{1}{2} \cdot v'^2 - \frac{1}{2} \cdot w' \cdot v'^2 - \frac{1}{8} \cdot v'^4 + \frac{3}{4} \cdot w'^2 \cdot v'^2$$

ove separando le quote di ordine diverso si riconosce:

$$\varepsilon_z^{(1)} = w'$$

$$\varepsilon_z^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot v'^2$$

$$\varepsilon_z^{(3)} = -\frac{1}{2} \cdot w' \cdot v'^2$$

$$\varepsilon_z^{(4)} = -\frac{1}{8} \cdot v'^4 + \frac{3}{4} \cdot w'^2 \cdot v'^2$$

4.3 - IPOTESI DI DEFORMAZIONI FLESSIONALI

Limitandoci, per semplicità, al caso in cui la trave sia infletta in un piano di simmetria, si ipotizza che detta deformazione possa avvenire in due, differenti, possibili modi.

A) - Deformazione di tipo *estensionale*

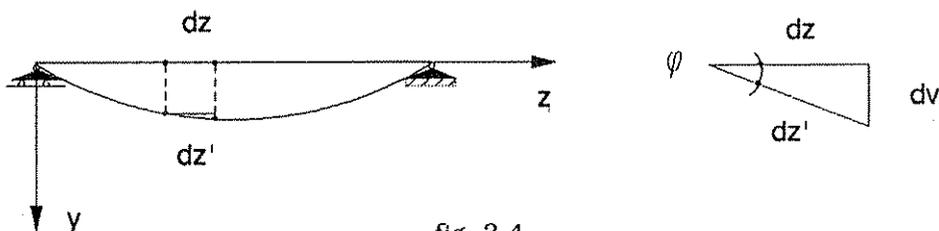


fig. 3.4

Si può pensare che l'estremo libero dell' asta, a seguito degli spostamenti flessionali v , non subisca traslazioni orizzontali e che, dunque, la trave subisca un allungamento tale che il generico elemento dz , ruotato di $\varphi = v'$ per effetto dell' inflessione, assuma la lunghezza $dz^* = dz / \cos \varphi$.

Risulta dunque:

$$dv = dz \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

ovvero:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{dz} = v'$$

da cui:

$$\varphi = \operatorname{arctg} v' \quad \text{e} \quad y' = \frac{1}{1 + v'^2} \cdot v'' = \chi$$

che rappresentano rispettivamente rotazione e curvatura in tale ipotesi.

B) - Deformazione di tipo *inestensionale*

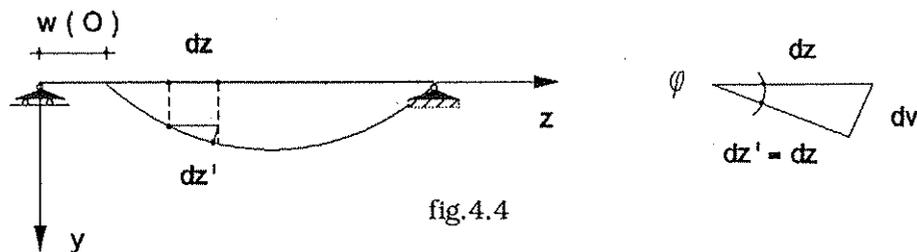


fig.4.4

In un campo di deformazioni più ampie si può pensare che la generica sezione subisca non solo lo spostamento $v(z)$ ma anche quello $w(z)$ tale che, perlomeno nel second'ordine risulti:

$$\varepsilon_z^{(1)} + \varepsilon_z^{(2)} = w' + \frac{1}{2} \cdot v'^2 = 0$$

La trave, a deformazione avvenuta, non muta la sua lunghezza per cui l'elemento dz conserva la propria dimensione e l'estremo libero della trave trasla orizzontalmente della quantità:

$$f = \int_l \frac{1}{2} \cdot v'^2 \cdot dz$$

In tale ipotesi risulta dunque:

$$dv = dz \cdot \text{sen } \varphi \quad \text{ovvero:} \quad \text{sen } \varphi = \frac{dv}{dz} = v'$$

da cui le espressioni della rotazione e della curvatura:

$$\varphi = \text{arcsen } v' \quad \text{e} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2}} \cdot v'' = \chi$$

Si può osservare immediatamente che quando si operi in una teoria del primo ordine, v'^2 risulta trascurabile e con ciò i due casi esaminati danno luogo agli stessi risultati:

$$y = v' \quad \text{e} \quad y' = v'' = \chi$$

4.4 - L'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE NEL PRIMO ORDINE

Essendo, come è noto, per una trave:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_V [\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}] \cdot dV$$

che nell'ipotesi di contrazione trasversale trascurabile assume la forma:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \left[\int_V E \cdot \varepsilon_z^2 \cdot dV + \int_V G \cdot (\gamma_{zx}^2 + \gamma_{zy}^2) \cdot dV \right]$$

da cui:

$$W^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \int_V E \cdot \varepsilon_z^{(1)2} \cdot dV + \frac{1}{2} \cdot \int_V G \cdot (\gamma_{zx}^{(1)2} + \gamma_{zy}^{(1)2}) \cdot dV$$

Sostituendo le espressioni di $\varepsilon_z^{(1)}, \gamma_{zx}^{(1)}, \gamma_{zy}^{(1)}$ si ha:

$$\begin{aligned} W^{(2)} &= \frac{1}{2} \cdot \int_V E \cdot (w' - v'' \cdot y - u'' \cdot x - \theta'' \cdot y)^2 \cdot dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V G \cdot \theta'^2 \cdot \left[\left(y - y_T + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(x - x_T - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_l E \cdot \left[w'^2 \cdot \int_A dA + v''^2 \cdot \int_A y^2 \cdot dA + u''^2 \cdot \int_A x^2 \cdot dA + \theta''^2 \cdot \int_A \lambda^2 \cdot dA + \right. \\ &- 2w' \cdot v'' \cdot \int_A y \cdot dA - 2 \cdot w' \cdot u'' \cdot \int_A x \cdot dA - 2w' \cdot \theta'' \cdot \int_A \lambda \cdot dA + \\ &+ 2 \cdot v'' \cdot u'' \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA + \\ &+ 2v'' \cdot \theta'' \cdot \int_A y \cdot \lambda \cdot dA + 2 \cdot u'' \cdot \theta'' \cdot \int_A x \cdot \lambda \cdot dA \left. \right] \cdot dz \\ &+ \frac{1}{2} \int_l G \cdot \theta'^2 \cdot \int_A \left[\left(y - y_T + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(x - x_T - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot dA \cdot dz \end{aligned}$$

Essendo:

$$\int_A dA = A$$

$$\int_A y^2 \cdot dA = I_{yy}$$

$$\int_A x^2 \cdot dA = I_{xx}$$

$$\int_A \lambda^2 \cdot dA = I_{\lambda\lambda}$$

$$\int_A y \cdot dA = I_y = 0$$

$$\int_A x \cdot dA = I_x = 0$$

$$\int_A \lambda \cdot dA = I_\lambda = 0$$

$$\int_A x \cdot y \cdot dA = I_{xy} = 0$$

$$\int_A y \cdot \lambda \cdot dA = I_{y\lambda} = 0$$

$$\int_A x \cdot \lambda \cdot dA = I_{x\lambda} = 0$$

$$\int_A \left[\left(y - y_T + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + \left(x - x_T - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot dA = I^*$$

l'energia elastica di deformazione si scrive, nel primo ordine:

$$W^{(2)} = \frac{1}{2} \int_l \left(E \cdot A \cdot w'^2 + E \cdot I_{xx} \cdot u''^2 + E \cdot I_{yy} \cdot v''^2 + E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta''^2 \cdot G \cdot I^* \cdot \theta'^2 \right) \cdot dz$$

ove si riconoscono i termini estensionale, flessionali, torsionale secondario e torsionale primario.

4.5 - CENNI DI CALCOLO VARIAZIONALE:

LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO PER I SISTEMI CONTINUI

Si è visto come per i sistemi elasto-rigidi in genere, schematizzabili come sistemi olonomi ad n gradi di libertà, la condizione di equilibrio $\delta^{(1)}T = 0$ dà luogo ad un sistema di n equazioni algebriche.

Nel caso di sistemi elastici condizionati ad infiniti gradi di libertà rappresentati da funzioni di spostamento incognite come u, v, w, θ l'EPT risulta espressa da un integrale definito delle funzioni incognite con le loro derivate e delle variabili indipendenti. Nel caso più semplice in cui la EPT dipenda da una sola funzione (ad es. u) e dalle sue derivate prima e seconda in una sola variabile (ad es. x), essa si può esprimere nella forma:

$$T = \int_l R(u, u_x, u_{xx}, x) \cdot dx$$

Si dimostra come la condizione di equilibrio $\delta^{(1)}T = 0$ è soddisfatta se risulta verificata l'equazione:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial R}{\partial u_{xx}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial R}{\partial u_x} + \frac{\partial R}{\partial u} = 0$$

che prende anche nome di *equazione di Eulero* o *Euleriana del problema*; ad essa vanno affiancate le condizioni al contorno relative al caso in esame.

Nella evenienza che la EPT dipenda da due variabili (ad es. $u(x,y)$) l'*Euleriana* che soddisfa la condizione di equilibrio $\delta^{(1)}T = 0$, si scrive:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial R}{\partial u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial R}{\partial u_{yy}} + 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial R}{\partial u_{xy}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial R}{\partial u_y} + \frac{\partial R}{\partial u} = 0$$

Nel caso in cui la EPT dipenda da $m > 1$ funzioni (ad es.: u, v, w, θ) con le sue derivate, in una o più variabili, la condizione di equilibrio $\delta^{(1)}T = 0$ darà luogo ad m equazioni differenziali ognuna delle quali si ottiene considerando la R dipendente da una funzione per volta.

Ad esempio, se T dipende da $u(x)$ e $v(x)$, entrambe funzioni di una variabile, si può scrivere:

$$T = \int_l R(u, u_x, u_{xx}, v, v_x, v_{xx}, x) dx$$

da cui le *Euleriane*:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial R}{\partial u_{xx}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial R}{\partial u_x} + \frac{\partial R}{\partial u} = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial R}{\partial v_{xx}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial R}{\partial v_x} + \frac{\partial R}{\partial v} = 0$$

4.6 - LA TRAVE DI EULERO

Si prende in esame una trave piana rettilinea semplicemente appoggiata, a sezione costante e doppiamente simmetrica, caricata di punta.

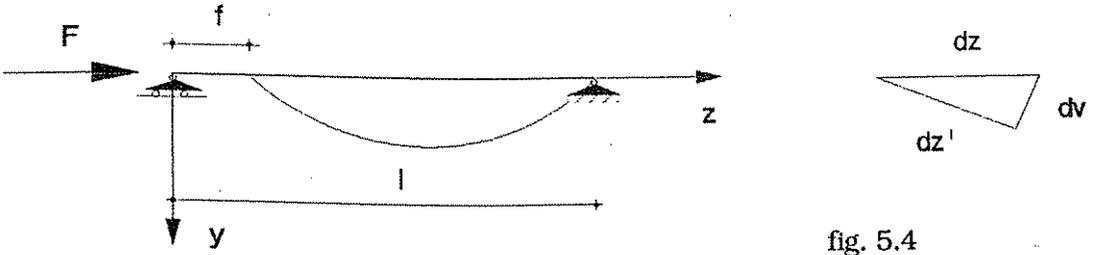


fig. 5.4

Si ipotizza che la prima instabilità avvenga per flessione nel piano $y - z$.

Se non interessa la descrizione del ramo naturale si possono ignorare sia la componente di spostamento w , perchè legata all'equilibrio fondamentale che le componenti u e θ perchè si è esclusa l'esistenza di tali spostamenti.

Ci si pone pertanto, direttamente, nella configurazione di biforcazione \bar{C} , che, trascurando la deformazione assiale verificatasi, si fa coincidere con la configurazione iniziale C_0 ed in essa si valuta l'EPL.

Ove interessi la sola determinazione del carico critico si può adottare una *teoria linearizzata* esprimendo energia elastica di deformazione ed energia di posizione dei carichi fino al secondo grado nelle funzioni incognite.

Essendo in tali ipotesi:^(*)

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{2} \int_l E \cdot I \cdot v''^2 \cdot dz$$

$$L_{\bar{F}} = \bar{F} \cdot f = -F \cdot \int_l \frac{1}{2} \cdot v'^2 \cdot dz$$

risulta:

$$L^{(2)} = \frac{1}{2} \int_l \left(E \cdot I \cdot v''^2 - \bar{F} \cdot v'^2 \right) \cdot dz$$

Applicando l'equazione di Eulero, che esprime la condizione di equilibrio, risulta:

$$\frac{d^2}{dz^2} (E \cdot I \cdot v'') + \frac{d}{dz} (\bar{F} \cdot v') = 0$$

^(*) Per semplicità, non potendosi dare luogo ad equivoci, si pone $I_{yy} = I$.

da cui, avendo ipotizzato $E \cdot I$ ed \overline{F} costanti, risulta l'equazione di equilibrio:

$$E \cdot I \cdot v'''' + \overline{F} \cdot v'' = 0$$

differenziale lineare del quarto ordine a coefficienti costanti omogenea, che può scriversi anche nella forma:

$$v'''' + \gamma^2 \cdot v'' = 0 \quad \text{con: } \gamma^2 = \frac{\overline{F}}{E \cdot I}$$

La soluzione di tale equazione è del tipo:

$$v(z) = A \cdot \text{sen } \gamma z + B \cdot \text{cos } \gamma z + C \cdot z + D$$

Imponendo le condizioni ai limiti si deducono i valori delle quattro costanti:

$$M(0) = -E \cdot I \cdot v''(0) = 0 \quad \text{ovvero: } +B \cdot \gamma^2 = 0$$

$$v(0) = 0 \quad \text{ovvero: } B + D = 0$$

$$M(l) = -E \cdot I \cdot v''(l) = 0 \quad \text{ovvero: } A \gamma^2 \cdot \text{sen } \gamma l = 0$$

$$v(l) = 0 \quad \text{ovvero: } -A \cdot \text{sen } \gamma l + C \cdot l = 0$$

da cui:

$$B = 0$$

$$D = 0$$

$A \text{ sen } \gamma l = 0$ che implica: $A = 0$, oppure: $\text{sen } \gamma l = 0$

$$C = 0$$

Dunque l'equazione differenziale di equilibrio ammette:

- la soluzione banale $A=B=C=D=0$ da cui: $v(z) = 0$

che esprime le configurazioni di equilibrio fondamentale;

- la soluzione corrispondente alle configurazioni di biforcazione:

$$\text{sen } \gamma l = 0 \rightarrow \gamma l = n \cdot \pi \rightarrow \gamma^2 = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2}$$

con n numero naturale e, per le posizioni fatte inizialmente...

$$\overline{F} = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

Tale espressione fornisce, al variare di n , gli autovalori del problema ovvero i valori dei carichi di biforcazione che sono infiniti, tali essendo i parametri che individuano le configurazioni del sistema.

Per ogni carico \overline{F} la *forma critica* corrispondente è individuata dall'autofunzione:

$$v = A \cdot \text{sen } \gamma z = A \cdot \text{sen} \cdot \frac{n \cdot \pi \cdot z}{l}$$

che rappresenta una sinusoide avente semilunghezza d'onda:

$$l_0 = \pi \cdot \frac{l}{n \cdot \pi} = \frac{l}{n}$$

e prende nome di *lunghezza caratteristica* o *lunghezza libera di inflessione*.

Degli infiniti carichi suddetti, ai fini tecnici, interessa il minore corrispondente al valore $n = 1$:

$$F_c = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

che come è noto prende nome di *carico critico Euleriano*.

Dipendendo F_c dal solo modulo di elasticità normale del materiale, a parità di esso non vi è alcuna convenienza, nei riguardi dei pericoli di instabilità, ad utilizzare materiali di elevata resistenza specifica.

Va osservato ancora, in linea generale, come il carico critico aumenti con il grado di vincolo al pari di come la frequenza propria di vibrazione aumenta con la rigidezza nei problemi di dinamica.

Introducendo la nozione di *lunghezza libera d'inflessione* l_0 come la distanza, misurata secondo l'asse z , fra due punti di flesso successivi della deformata, il carico critico di Eulero assume l'espressione generale:

$$F_c = \frac{\pi^2}{l_0^2} \cdot E \cdot I$$

valida per travi ad unica campata comunque vincolate.

Si riportano di seguito i valori l_0 per le diverse condizioni di vincolo:

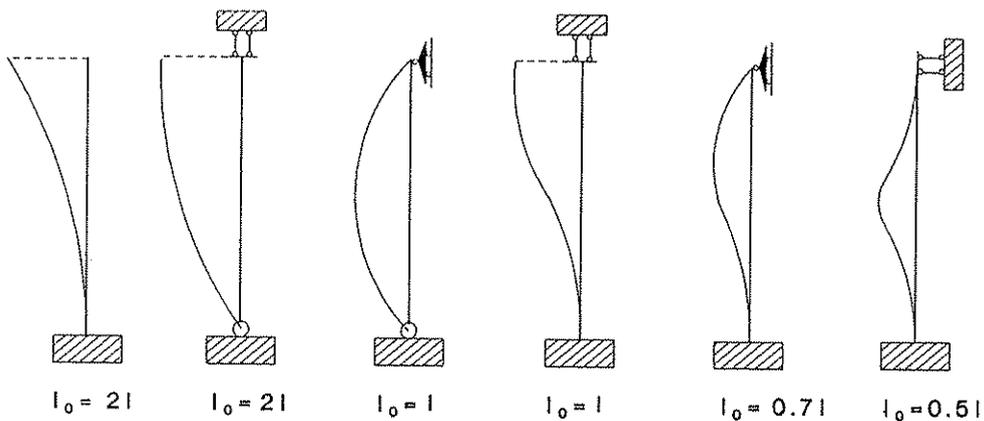


fig. 6.4

Dovendosi valutare il carico critico minore in ogni possibile piano di inflessione, nella formula di Eulero dovrà essere assunto il momento d'inerzia minimo.

Ricordando che $I \cong A \cdot \rho^2$ e ponendo:

$$\frac{l_0}{\rho} = \lambda \text{ snellezza dell'asta}$$

il carico critico euleriano assume anche la forma:

$$F_c = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{\lambda^2}$$

La tensione critica vale pertanto:

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

La validità di tale espressione è legata a quella della legge di Hooke e, dunque, alla condizione $\sigma_c \leq \sigma_p$, con σ_p tensione al limite di proporzionalità.

Il caso $\sigma_c = \sigma_p$ si verifica in corrispondenza del valore di:

$$\lambda_l = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \text{ snellezza limite}$$

che rappresenta l'elemento di separazione fra *travi snelle*, per le quali è valida la formula di Eulero, e *travi tozze*.

In un diagramma $\sigma - \lambda^2$, dunque, l'*iperbole di Eulero*^(*), rappresentata dall'equazione $\sigma_c = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$, è significativa solamente per valori di $\lambda \geq \lambda_l$.

Nel campo definito da $\lambda < \lambda_l$ tale iperbole non è più valida e va sostituita da un'altra curva che abbia per $\lambda = \lambda_l$ la stessa ordinata (per continuità) e $\sigma(0) = \sigma_c$, con σ_c tensione di crisi per compressione del solido tozzo.

Gli andamenti della curva nell'intervallo $0 < \lambda < \lambda_l$ sono stati suggeriti in maniera diversa dai vari Autori anche su basi sperimentali.

Per completezza di esposizione va ricordato che partendo dall'espressione del carico critico di Eulero è possibile determinare, in via sufficientemente approssimata (errore del 4% circa), il carico critico di un'asta di luce l e rigidezza flessionale $E \cdot I$ comunque vincolata agli estremi elasticamente, tramite la formula empirica di Newmark:

$$F_N = C \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

$$\text{ovve: } C = \frac{(0,4 + \lambda_A) \cdot (0,4 + \lambda_B)}{(0,2 + \lambda_A) \cdot (0,2 + \lambda_B)}; \quad \lambda_A = \frac{E \cdot I}{K_A \cdot l}; \quad \lambda_B = \frac{E \cdot I}{K_B \cdot l}$$

essendo K_A e K_B le rigidzze dei vincoli elastici nei due estremi.

(*) Luogo delle configurazioni di biforcazione

Tale procedimento consente una determinazione preliminare approssimata del carico critico evitando l'integrazione dell'equazione fondamentale.

4.7 - INTRODUZIONE AL PROBLEMA DELL'ASTA DI EULERO IN CAMPO ELASTO-PLASTICO

Si prenda in esame la già considerata asta di Eulero supponendo, per semplicità, che questa abbia sezione "rettangolare".

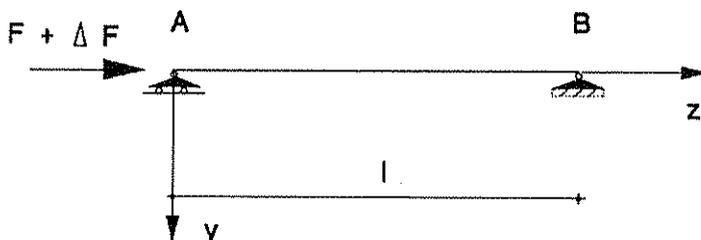


fig. 7.4

Il materiale di cui è costituita la trave sia caratterizzato da un comportamento elasto-plastico con inclinazione del tratto lineare pari ad $\arctg E$ ed inclinazione del tratto al di sopra della tensione di proporzionalità pari ad $\arctg E_t$, avendo indicato con E e con E_t rispettivamente i moduli di elasticità normale iniziale e tangente.

In campo non proporzionale, pertanto, il legame tensioni-deformazioni del materiale è caratterizzato dalla presenza di due distinti moduli elastici: il *modulo di elasticità tangente* E_t , variabile da punto a punto nella curva rappresentativa del legame menzionato, esprime il rapporto fra tensioni e deformazioni unitarie di compressione entrambe crescenti; il *modulo di elasticità iniziale*, costante, segna il comportamento del materiale a seguito di decrementi delle tensioni e delle deformazioni.

Nell'ipotesi che la tensione critica sia maggiore della tensione al limite di proporzionalità, il carico critico dovrà essere ricercato con procedimento diverso da quello di Eulero.

In corrispondenza delle configurazioni di equilibrio deviato, potendo essere $F > F_c$ si ponga: $F = F_c + \Delta F$. In tale situazione il diagramma delle tensioni nella generica sezione può considerarsi costituito da una parte costante $\sigma_c = F_c/A$ ed una $\Delta\sigma$ variabile con valori estremi $\Delta\sigma_2$ e $\Delta\sigma_1$ che si annulla sull'asse neutro distante h_1 dalla fibra inferiore e h_2 dalla fibra superiore della sezione.

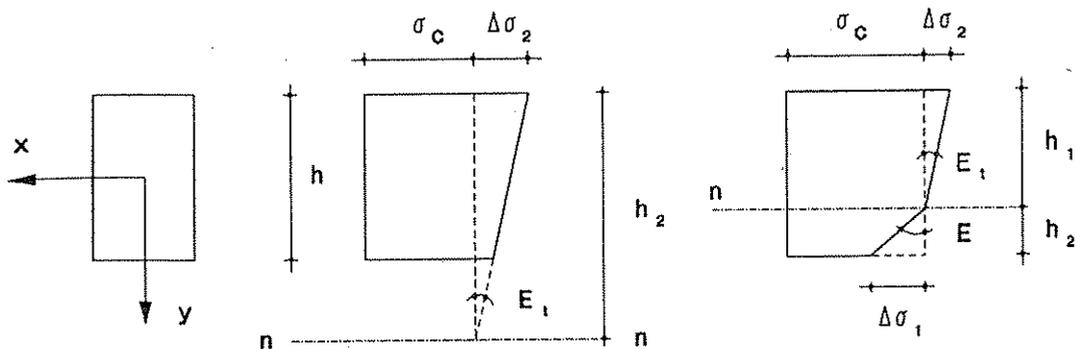


fig. 8.4

Se si ammette che le sezioni restino piane, il rapporto tra le inclinazioni dei diagrammi, rappresentative degli incrementi di tensione, è pari a quello tra i moduli elastici.

La trattazione analitica dell'asta di Eulero in campo elasto-plastico conduce, allo stato, a due diverse formulazioni del carico critico: quella di *Shanley-Engesser* e quella di *Van Karman*. L'adozione dell'una o dell'altra formula dipende dalla diversa intuizione, da parte di ciascun Autore, del comportamento dell'asta al comparire delle prime configurazioni di equilibrio deviato. Entrambe le espressioni del carico critico conservano la medesima struttura della formula di Eulero e si differenziano unicamente per il diverso valore assunto dal modulo di elasticità ideale E_t secondo l'espressione:

$$F_c = \pi^2 \cdot \frac{I}{l_0^2} \cdot E_t$$

Prendendo in esame la sezione di mezzeria della trave possono verificarsi due casi distinti:

A) - l'asse neutro cade all'esterno della sezione ($h_2 > h$) e, dunque, gli incrementi di tensione al bordo superiore ed inferiore sono entrambi di compressione nulli con identico modulo di elasticità normale E_t (tangente). In tale circostanza lo studio del carico critico in campo non lineare diventa formalmente uguale a quello effettuato in campo elastico essendo il materiale caratterizzato da un unico modulo di elasticità: la differenza sta nel dover considerare al posto del modulo iniziale quello tangente.

L'espressione che fornisce il carico critico:

$$F_s = \pi^2 \cdot \frac{I}{l_0^2} \cdot E_t$$

prende nome di *formula di Shanley-Engesser* e fu ricavata da Engesser già nel 1898 partendo da ipotesi errate, ma dimostrata in rigore da Shanley nel 1947.

Essendo E_t funzione delle tensioni nel materiale in corrispondenza del carico critico, tale formula deve essere applicata per successive approssimazioni.

- B) - L'asse neutro cade all'interno della sezione ($h_r < h_2 < h$) e, dunque, la tensione al bordo superiore si incrementa, con modulo E_t , mentre quella al bordo inferiore si decrementa con modulo E (iniziale); in tale ipotesi, comunque, h_2 non potrà essere minore del valore limite di V. Karman:

$$h_r = h \cdot \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}}$$

In definitiva lo stato di deformazione iniziale è tale da produrre, in ogni sezione, incrementi di tensioni bitriangolari, ad eccezione delle sezioni di estremità dove questi incrementi sono comunque nulli. Poichè gli incrementi negativi delle tensioni, di compressione, si legano alle corrispondenti deformazioni mediante il modulo di elasticità iniziale, i moduli di elasticità, iniziale E e tangente E_t , possono definire un modulo ridotto E_r , idealmente rappresentativo del comportamento di tutto il materiale, che per *sezioni rettangolari* assume la seguente espressione:

$$E_r = \frac{4 \cdot E \cdot E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}$$

e prende il nome di *modulo di elasticità ridotto di V. Karman*.

Il carico critico dell'asta è fornito dalla *formula di V. Karman*:

$$F_k = \pi^2 \cdot \frac{I}{l^2} \cdot E_r$$

In definitiva, risultando:

$$F_c = F_k \text{ per } h_2 = h_r$$

$$F_c = F_s \text{ per } h_2 > h$$

il carico critico dell'asta di Eulero, in campo elasto-plastico, sarà sempre compreso fra quello di Karman e quello di Shanley-Engesser.

Essendo E_t una funzione continua dell'altezza h_2 , quando questa varia tra h_r e h , *il modulo elastico ideale sarà compreso tra i valori del modulo ridotto e di quello tangente*. Essendo il modulo tangente quantitativamente inferiore al modulo ridotto, prudenzialmente si dovrebbe assumere come valore del carico critico, in campo non lineare, quello determinabile mediante la formula di Shanley-Engesser. Considerazioni di carattere deformativo portano, invece, a concludere

che il carico critico in campo elasto-plastico può determinarsi con una formula corrispondente a quella di V. Karman, che si particolarizza in maniera diversa a seconda del grado di discretizzazione della sezione di mezzeria, purchè il valore così dedotto sia superiore al carico limite di proporzionalità; qualora tale condizione non sia verificata il carico critico deve essere assunto coincidente con lo stesso valore del carico limite di proporzionalità.

Tutti questi risultati sono basati sulla teoria della biforcazione, in campo elasto-plastico, riferita ad aste perfette compresse assialmente; le differenze rispetto alle aste reali sono computate nel coefficiente di sicurezza.

4.8 - IL METODO OMEGA

Tale metodo consiste nel ridurre la verifica all'instabilità di un'asta prismatica con sezione costante, ad una verifica a sforzo normale semplice imponendo che sia sempre soddisfatta la disuguaglianza:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_c}{v}$$

essendo: σ_c la tensione critica

v un coefficiente di sicurezza.

Moltiplicando e dividendo la precedente espressione per la tensione ammissibile σ_{am} del materiale si ha:

$$\frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_c}{v \cdot \sigma_{am}} \cdot \sigma_{am}$$

e ponendo:

$$\omega = \frac{v \cdot \sigma_{am}}{\sigma_c}$$

la sicurezza all'instabilità è garantita verificando l'asta alla compressione semplice con uno sforzo normale N amplificato di ω . La condizione da soddisfare è pertanto:

$$\frac{N \cdot \omega}{A} \leq \sigma_{am}$$

Si può osservare che i coefficienti ω dipendono da:

σ_{am} tensione ammissibile del materiale

v coefficiente di sicurezza

σ_c tensione critica o di collasso, funzione della snellezza

e, dunque, sono tabellati in funzione di λ e della qualità del materiale sia per le travi tozze che per quelle snelle variando il solo coefficiente di sicurezza v che aumenta passando dalle une alle altre.

4.9 - LA TRAVE CON VINCOLO CONTINUO ALLA WINKLER

Se consideriamo la stessa trave di Eulero vincolata elasticamente alla Winkler con costante di sottofondo k , tale vincolo, esplicitando la reazione $k \cdot v(z)$, accumulerà l'energia elastica di deformazione:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_l (k \cdot v) \cdot v \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \int_l k \cdot v^2 \cdot dz$$

La EPL del sistema nella configurazione di biforcazione \bar{C} si ottiene, pertanto, aggiungendo tale aliquota a quelle già precedenti calcolate cosicchè risulta, in una teoria linearizzata che tenga conto dei termini fino al secondo grado:

$$L^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \int_l \left(E \cdot I \cdot v''^2 + k \cdot v^2 - \bar{F} \cdot v^2 \right) \cdot dz$$

Applicando a quest'ultima l'operatore di Eulero si ottiene l'equazione:

$$\frac{d^2}{dz^2} (E \cdot I \cdot v'') + \frac{d}{dz} (\bar{F} \cdot v') + k \cdot v = 0$$

e per $E \cdot I$ ed \bar{F} costanti:

$$E \cdot I \cdot v'''' + \bar{F} \cdot v'' + k \cdot v = 0$$

4.9.1 - IL CASO DELL'ASTA SEMPLICEMENTE APPOGGIATA

La funzione spostamento rispettosa delle condizioni di vincolo è del tipo:

$$v = v_s \cdot \text{sen } n \cdot \frac{\pi \cdot z}{l}$$

con v_s ampiezza ed n numero naturale di semionde.

Sostituendo tale funzione nell'equazione di equilibrio, questa è soddisfatta per:

$$E \cdot I \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{l} \right)^4 + \bar{F} \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{l} \right)^2 + k = 0$$

ovvero per gli autovalori:

$$\bar{F} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} + \frac{k \cdot l^2}{n^2 \cdot \pi^2} = EI \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{l} \right)^2 + k \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{l} \right)^{-2}$$

che per $n = 1$ e $k = 0$ riproduce il carico critico Euleriano.

Per ottenere il più piccolo valore delle \overline{F} , e dunque il carico critico, occorre minimizzare rispetto ad n :

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} \cdot n - 2 \cdot \frac{k \cdot l^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^3} = 0$$

da cui:

$$n_c = \frac{l}{\pi} \cdot \sqrt[4]{\frac{k}{E \cdot I}}$$

Sostituendo tale valore nell'espressione di \overline{F} si ricava:

$$F_c = 2 \cdot \sqrt{k \cdot E \cdot I}$$

che, come si vede, risulta indipendente dalla lunghezza della trave.

Tale è il carico critico della trave solamente se n_c è un numero intero, ovvero se la lunghezza della trave è un multiplo della *semionda naturale* o *lunghezza caratteristica* λ .

Quando tale rapporto non è intero, il carico critico risulta lievemente più elevato di quello calcolato: la differenza massima, pari al 25% (che corrisponde al valore $n = \sqrt{2}$) va diminuendo rapidamente all'aumentare di n per cui il valore calcolato di F_c risulta cautelativo comunque.

Per $n_c \rightarrow 0$ il carico critico tende ovviamente a quello di Eulero.

Essendo la lunghezza della *semionda naturale* o *lunghezza caratteristica*:

$$\lambda_c = \frac{l}{n_c} = l \cdot \sqrt[4]{\frac{\pi^4 \cdot E \cdot I}{k \cdot l^4}} = \pi \cdot \sqrt[4]{\frac{E \cdot I}{k}}$$

si può anche scrivere:

$$F_c = 2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\lambda_c^2}$$

da cui si deduce che una trave doppiamente appoggiata, in presenza di vincolo continuo alla Winkler, presenta un carico critico doppio di quello relativo ad una trave priva di tale vincolo avente luce pari alla lunghezza caratteristica.

Si noti ancora come all'aumentare di k la deformata critica si arricchisce di onde fino a che per $k \rightarrow \infty$ queste risultano in numero infinito e, dunque, la trave rimane rettilinea.

Le espressioni conseguite sono applicabili ai pali di fondazione, specie metallici, che lavorino di punta: i risultati sperimentali hanno confermato la soddisfacente rispondenza delle formule per pali immersi in argille soffici ma attestati in roccia.

Le stesse espressioni sono applicabili alle travi di fondazioni caricate di punta, e alle rotaie saldate sollecitate assialmente da variazioni termiche.

La verifica alla stabilità dei pali andrà sempre eseguita quando il carico critico risulta minore del carico di rottura per il c.a. o del carico di snervamento per l'acciaio:

$$F_c < A \cdot f$$

con A area del palo

f tensione di collasso

e dunque, ad esempio, nel caso dell'asta semplicemente incernierata alle estremità quando risulti:

$$4 \cdot E \cdot I \cdot k < f^2 \cdot A^2$$

e cioè:

$$\frac{I}{A^2} < \frac{f^2}{4 \cdot k \cdot E}$$

Poichè, infine, si può dimostrare che il comportamento post-critico delle travi su suolo elastico risulta stabile solamente per :

$$k < \frac{4}{9} \cdot \frac{\pi^4 \cdot E \cdot I}{l^4}$$

nella maggior parte dei casi reali tale comportamento risulta instabile e, perciò, grande è la sensibilità alle imperfezioni. In definitiva, allora, si può concludere che le travi su suolo elastico presentano, sì, un incremento del carico critico rispetto alle travi prive di vincolo continuo alla Winkler ma il comportamento post-critico, generalmente instabile, fa sì che tale maggiore sicurezza sia erosa dalle inevitabili imperfezioni.

4.10 - LE TRAVI CARICATE ASSIALMENTE E FLESSIONALMENTE

Volendo trattare la *trave di Eulero* caricata, oltre che assialmente, anche flessionalmente dal carico ripartito trasversale $p(z)$ agente nel piano $y-z$, ai termini energetici già calcolati nelle trattazioni precedenti si dovrà aggiungere l'energia di posizione dei carichi:

$$U = - \int_1 p \cdot v \cdot dz$$

In tale caso la EPT, prescindendo dalle deformazioni assiali w , in una teoria linearizzata, si esprime nella forma:

$$T = \int_1 \left(\frac{1}{2} \cdot E \cdot I \cdot v'^2 - \frac{1}{2} \cdot F \cdot v^2 - p \cdot v \right) \cdot dz$$

da cui l'euleriana:

$$\frac{d^2}{dz^2} (E \cdot I \cdot v'') + \frac{d}{dz} (f \cdot v) = p(z)$$

Esaminiamo, nel caso di sollecitazione assiale F e rigidezza flessionale EI costanti, due condizioni di carico trasversale particolarmente importanti per le applicazioni alle strutture reali.

Per tali condizioni di carico, perlomeno nel piano di flessione $y-z$, non può verificarsi più alcun fenomeno di instabilità improvvisa essendo le $v(z)$ presenti già dalla prima applicazione della forza assiale la cui presenza non induce, quindi, alcuna instabilità ma determina una variazione di comportamento (rigidezza) della trave.

4.10.1 - IL CASO DELLA TRAVE APPOGGIATA SOLLECITATA DA UN CARICO UNIFORME

L'equazione di equilibrio si scrive:

$$E \cdot I \cdot v'''' + F \cdot v'' = p$$

ovvero:

$$v'''' + \gamma^2 \cdot v'' = \frac{p}{E \cdot I} \quad \text{con:} \quad \gamma^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

La soluzione è del tipo:

$$v(z) = A \cdot \text{sen } \gamma z + B \cdot \text{cos } \gamma z + C \cdot z + D + \frac{p \cdot z^2}{2 \cdot F}$$

Le condizioni ai limiti porgono:

$$M(0) = -E \cdot I \cdot v''(0) = 0 \quad \text{da cui: } -E \cdot I \cdot \left(-B \cdot \gamma^2 + \frac{p}{F} \right) = 0$$

$$v(0) = 0 \quad \text{da cui: } B + D = 0$$

$$M(l) = -E \cdot I \cdot v''(l) = 0 \quad \text{da cui: } -E \cdot I \cdot \left(-A \cdot \gamma^2 \cdot \text{sen } \gamma l - B \cdot \gamma^2 \cdot \text{cos } \gamma l + \frac{p}{F} \right) = 0$$

$$v(l) = 0 \quad \text{da cui: } A \cdot \text{sen } \gamma l + B \cdot \text{cos } \gamma l + C \cdot l + D + \frac{p \cdot l^2}{2 \cdot F} = 0$$

e in definitiva:

$$B = -\frac{p}{\gamma^2 \cdot F}$$

$$D = -B = \frac{p}{\gamma^2 \cdot F}$$

$$A = \frac{p}{F} \cdot \left(\frac{1 - \text{cos } \gamma l}{\gamma^2 \cdot \text{sen } \gamma l} \right)$$

$$C = -\frac{p \cdot l}{2 \cdot F}$$

La soluzione si scrive, pertanto:

$$v(z) = \frac{p}{\gamma^2 \cdot F} \cdot \left[\frac{1 - \text{cos } \gamma l}{\text{sen } \gamma l} \cdot \text{sen } \gamma z + \text{cos } \gamma z - 1 - \frac{\gamma^2}{2} \cdot (l - z) \cdot z \right]$$

Tale espressione indica che:

per $\gamma l \rightarrow \infty$ ovvero per $F \rightarrow F_c = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$ e cioè quando il carico assiale attinge il valore critico, gli spostamenti v tendono al valore infinito e ciò dipende dall'aver adottato una teoria linearizzata.

La rotazione della sezione generica vale:

$$\frac{dv}{dz} = v'(z) = \frac{p}{\gamma \cdot F} \cdot \left[\frac{1 - \text{cos } \gamma l}{\text{sen } \gamma l} \cdot \text{cos } \gamma z - \text{sen } \gamma z - \frac{\gamma}{2} \cdot (l - 2z) \right]$$

e dunque le rotazioni delle sezioni di appoggio valgono:

$$\varphi = v'(0) = \frac{p}{\gamma \cdot F} \cdot \left[\frac{1 - \text{cos } \gamma l}{\text{sen } \gamma l} - \frac{\gamma \cdot l}{2} \right] = \frac{p}{\gamma \cdot F} \cdot \left[\text{tg} \left(\frac{\gamma l}{2} \right) - \frac{\gamma l}{2} \right]$$

Volendo confrontare tali rotazioni con quelle $\varphi = \frac{p \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$ che si verificano per la trave sottoposta al solo carico trasversale costante p (in assenza di carico assiale), si esplicita il valore di $F = \gamma^2 \cdot E \cdot I$, si moltiplica e divide per $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^3$ ottenendo:

$$\varphi = \frac{p}{\gamma^3 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma l}{2}\right) - \frac{\gamma l}{2}}{\frac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3} = \frac{p \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{3 \cdot \left[\operatorname{tg}\frac{\gamma l}{2} + \frac{\gamma l}{2}\right]}{\left(\frac{\gamma l}{2}\right)^3}$$

Adottando la notazione di Timoshenko:

$$\frac{\gamma l}{2} = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{EI}} = u$$

si può scrivere:

$$\varphi = \frac{p \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{3 \cdot (\operatorname{tg} u - u)}{u^3} = \frac{p \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \cdot \chi(u)$$

essendo $\chi(u) = \frac{3 \cdot (\operatorname{tg} u - u)}{u^3}$ il fattore che esprime l'influenza del carico assiale sulla rotazione φ .

Si osservi che:

$$\text{per } F \rightarrow 0 : \gamma = \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \rightarrow 0; \quad u \rightarrow 0; \quad \chi(u) \rightarrow 1$$

$$\text{per } F \rightarrow F_c : \gamma = \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} = \frac{n \cdot \pi}{l}; \quad u \rightarrow \frac{n \cdot \pi}{2}; \quad \chi(u) \rightarrow \infty$$

e dunque l'andamento della funzione $\chi(u)$ è quello rappresentato in figura:

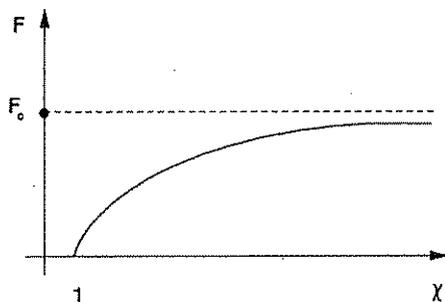


fig.9.4

Da quanto detto si evince che l'applicazione di un carico assiale F agente contemporaneamente a quello trasversale p determina rotazioni crescenti con legge esponenziale all'aumentare di F .

Ponendo nella espressione di u il valore di EI ricavato dalla formula di Eulero, tale parametro può essere posto nella forma:

$$u = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{F_c}}$$

che ne evidenzia la dipendenza dal rapporto fra carico applicato e carico critico.

4.10.2 - IL CASO DELLA TRAVE APOGGIATA SOLLECITATA DA UNA COPPIA DI ESTREMITA'

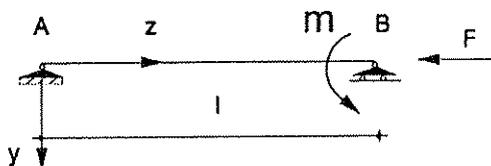


fig. 10.4

L'equazione di equilibrio si scrive:

$$E \cdot I \cdot v'''' + F \cdot v'' = 0$$

ovvero:

$$v'''' + \gamma^2 \cdot v'' = 0 \quad \text{con: } \gamma^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

La soluzione è del tipo:

$$v(z) = A \cdot \text{sen } \gamma z + B \cdot \text{cos } \gamma z + C \cdot z + D$$

Le condizioni ai limiti porgono:

$$M(0) = -E \cdot I \cdot v''(0) = 0 \quad \text{da cui: } -B \cdot \gamma^2 = 0$$

$$v(0) = 0 \quad \text{da cui: } B + D = 0$$

$$M(l) = -E \cdot I \cdot v''(l) = m \quad \text{da cui: } E \cdot I \cdot A \cdot \gamma^2 \cdot \text{sen } \gamma l = m$$

$$v(l) = 0 \quad \text{da cui: } \frac{m}{F} + C \cdot l = 0$$

e in definitiva:

$$B = 0$$

$$D = 0$$

$$A = \frac{m}{F \cdot \text{sen } \gamma l}$$

$$C = -\frac{m}{F \cdot l}$$

La soluzione si scrive pertanto:

$$v(z) = \frac{m}{F} \cdot \left[\frac{\text{sen } \gamma z}{\text{sen } \gamma l} - \frac{z}{l} \right]$$

Anche in tale caso per $\gamma l \rightarrow n\pi$ ovvero $F \rightarrow n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$, e cioè quando il carico assiale attinge il valore critico, gli spostamenti tendono a divenire infiniti.

La rotazione della generica sezione all'ascissa z si scrive:

$$\varphi = v'(z) = \frac{m}{F} \cdot \left[\frac{\gamma \cdot \cos \gamma z}{\operatorname{sen} \gamma l} - \frac{1}{l} \right]$$

e dunque le rotazioni degli estremi valgono:

$$\varphi_A = v'(0) = \frac{m}{F} \left[\frac{\gamma}{\operatorname{sen} \gamma l} - \frac{1}{l} \right]$$

$$\varphi_B = v'(l) = \frac{m}{F} \left[\frac{\gamma}{\operatorname{tg} \gamma l} - \frac{1}{l} \right]$$

Per confrontare tali valori con quelli delle rotazioni che si verificano nella trave caricata dalla sola coppia m , si moltiplichino e divida la prima espressione per $l/6$ e la seconda per $l/3$ ricordando che $F = \gamma^2 \cdot EI$:

$$\varphi_A = + \frac{m \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{6}{\gamma l} \cdot \left[\frac{1}{\operatorname{sen} \gamma l} - \frac{1}{\gamma l} \right]$$

$$\varphi_B = - \frac{m \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{3}{\gamma l} \cdot \left[\frac{1}{\gamma l} - \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma l} \right]$$

Ponendo $\frac{\gamma l}{2} = u$, si può scrivere:

$$\varphi_A = \frac{m \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{6}{2u} \cdot \left[\frac{1}{\operatorname{sen} 2u} - \frac{1}{2u} \right] = \frac{m \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \Phi(u)$$

$$\varphi_B = - \frac{m \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{3}{2u} \cdot \left[\frac{1}{2u} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2u} \right] = - \frac{m \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \Psi(u)$$

essendo:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{F_c}}$$

e avendo posto:

$$\Phi(u) = \frac{3}{u} \cdot \left[\frac{1}{\operatorname{sen} 2u} - \frac{1}{2u} \right]$$

$$\Psi(u) = \frac{3}{2u} \cdot \left[\frac{1}{2u} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2u} \right]$$

Questi ultimi prendono il nome di *coefficienti di Timoshenko*.

Si nota che anche in tale caso:

per: $\gamma l \rightarrow 0$ risulta che $\Phi(u) \rightarrow 1$ e $\Psi(u) \rightarrow 1$;

per: $\gamma l \rightarrow \pi$, ovvero per $F = F_c$ risulta che $\Phi(u) \rightarrow \infty$ e $\Psi(u) \rightarrow \infty$.

L'andamento delle due funzioni è in tutto e per tutto analogo a quello della funzione $\chi(u)$ rappresentato in fig. 9.4.

La rigidezza flessionale della trave vale dunque:

$$W = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l} \cdot \frac{1}{\psi(u)}$$

ed essendo $\psi(u)$ crescente col carico si dimostra che la presenza di una forza assiale di compressione diminuisce tale rigidezza mentre la presenza di una forza di trazione la aumenta.

Le costanti elastiche della trave, in presenza di sforzo assiale, assumono pertanto le espressioni:

$$\alpha_A = \alpha_B = \alpha = \frac{l}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \psi(u)$$

$$\beta = -\frac{l}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \Phi(u)$$

Esse consentono di determinare rigidezze W e coefficienti di trasporto t per travi diversamente vincolate e sollecitate da sforzo assiale.

Ad esempio:

- per la trave doppiamente incastrata risulta:

$$W = \frac{\alpha_A}{\alpha_A \cdot \alpha_B - \beta^2} = \frac{4 \cdot E \cdot I}{l} \cdot \frac{3\psi}{4 \cdot \psi^2 - \Phi^2}$$

$$t = \frac{\beta}{\alpha_A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Phi(u)}{\psi u}$$

- per la trave appoggiata ad un estremo ed incastrata all'altro si ha:

$$W = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l} \cdot \frac{1}{\psi}$$

$$t = 0$$

Le espressioni delle rotazioni determinate in funzione dei coefficienti di Timoshenko, come si può notare, non sono lineari e ciò comporta che per una trave caricata sia assialmente che trasversalmente il principio di sovrapposizione degli effetti non sia, in genere, applicabile. Si può osservare, però, che facendo variare F con m costante la legge carichi-spostamenti risulta asintotica mentre variando m con F costante detta legge è lineare: esistendo, dunque, proporzionalità tra carichi trasversali e spostamenti, il principio di sovrapposizione risulta applicabile solo nel caso di carico assiale costante.

Quanto asserito risulta evidente analizzando una delle due espressioni della rotazione; ad esempio essendo:

$$\varphi_A = \frac{m \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \Phi(u)$$

per $m = \text{costante}$ risulta: $\varphi_A = \text{cost.} \cdot \Phi(u)$ (legge asintotica)

per F costante risulta: $\varphi_A = \text{cost.} \cdot M$ (legge lineare)

4.11 - INSTABILITA' EULERIANA DELLA TRAVE DI SEZIONE GENERICA

Ove sia di interesse la determinazione del solo carico critico è possibile prescindere dalle funzioni che definiscono l'equilibrio fondamentale e adottare una teoria linearizzata del secondo ordine per la quale nell'espressione:

$$W = W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)}$$

$W^{(2)}$ si calcola esattamente;

$$W^{(3)} = \int_V \sigma^{(1)} \cdot \varepsilon^{(2)} dV, \text{ ovvero il lavoro delle tensioni del primo ordine per le}$$

deformazioni del secondo, si calcola determinando lo stato tensionale primario tramite la caratteristiche della sollecitazione interna e non attraverso le deformazioni, ottenendo così un termine energetico del secondo grado che si indica con $W_\sigma^{(2)}$;

$W^{(4)}$ si trascura rispetto ai due termini di secondo grado.

Il lavoro delle forze esterne risulta nullo non avendo tenuto conto delle funzioni di spostamento fondamentali ed avendo ipotizzato che la flessionale sia di tipo *estensionale*.

L'energia totale si scrive dunque:

$$T = W^{(2)} + W_\sigma^{(2)}$$

ovvero, l'energia potenziale locale:

$$L = \Phi^{(2)} + L_\sigma^{(2)}$$

Nei casi di seguito affrontati, essendo di interesse la sola determinazione del carico critico, verrà sempre scritta la EPL nelle configurazioni di biforcazione.

4.11.1 - LA TRAVE SOLLECITATA ASSIALMENTE

L'energia elastica di deformazione vale:

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \int_l \left(E \cdot I_{xx} \cdot u'^2 + E \cdot I_{yy} \cdot v'^2 + G \cdot I^* \cdot \theta'^2 + E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta''^2 \right) dz$$

avendo trascurato il termine in w , spostamento che caratterizza l'equilibrio fondamentale.

Il lavoro delle tensioni per le deformazioni del secondo ordine, potendo assumere:

$$\sigma_z^{(1)} = -\frac{\bar{F}}{A}$$

ed essendo:

$$\varepsilon_z^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ u'^2 + v'^2 + \theta'^2 \cdot \left[(x - x_T)^2 + (y - y_T)^2 \right] + 2 \cdot \theta' \cdot \left[v' \cdot (x - x_T) - u' \cdot (y - y_T) \right] \right\}$$

si può scrivere:

$$\begin{aligned} L_v^{(2)} = & -\frac{1}{2} \cdot \int_l \frac{\bar{F}}{A} \cdot \left\{ (u'^2 + v'^2) \cdot \int_A dA + \right. \\ & + \theta'^2 \cdot \left[\int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA + x_T^2 \cdot \int_A dA + y_T^2 \cdot \int_A dA - 2 \cdot x_T \cdot \int_A x \cdot dA - \right. \\ & \left. \left. - 2 \cdot y_T \cdot \int_A y \cdot dA \right] + 2 \cdot \theta' \cdot \left[v' \cdot \int_A x \cdot dA - v' \cdot x_T \cdot \int_A dA - u' \cdot \int_A y \cdot dA + \right. \right. \\ & \left. \left. + u' \cdot y_T \cdot \int_A dA \right] \right\} \cdot dz \end{aligned}$$

essendo:

$$\int_A x^2 \cdot dA = I_{xx}$$

$$\int_A y^2 \cdot dA = I_{yy}$$

$$\int_A x \cdot dA = I_x = 0$$

$$\int_A y \cdot dA = I_y = 0$$

si ha in definitiva:

$$L_G^{(2)} = -\frac{1}{2} \cdot \int_l \frac{\overline{F}}{A} \cdot \left[A \cdot (u'^2 + v'^2) + \theta'^2 \cdot (I_{xx} + I_{yy} + x_T^2 \cdot A + y_T^2 \cdot A) + 2 \cdot \theta' \cdot (u' \cdot y_T \cdot A - v' \cdot x_T \cdot A) \right] \cdot dz$$

e ricordando che:

$$\frac{I_{xx}}{A} = \rho_x^2 \quad \text{e} \quad \frac{I_{yy}}{A} = \rho_y^2$$

risulta:

$$L_G^{(2)} = -\frac{1}{2} \int_l \overline{F} \cdot \left[u'^2 + v'^2 + \theta'^2 \cdot (\rho_x^2 + x_T^2 + \rho_y^2 + y_T^2) + 2 \cdot \theta' \cdot (u' \cdot y_T - v' \cdot x_T) \right] \cdot dz$$

Essendo:

$$\rho_x^2 + x_T^2 = \rho_{xT}^2$$

il raggio di inerzia rispetto alla parallela all'asse y principale d'inerzia per T ;

$$\rho_y^2 + y_T^2 = \rho_{yT}^2$$

il raggio d'inerzia rispetto alla parallela all'asse x principale d'inerzia per T ;

$$\rho_{xT}^2 + \rho_{yT}^2 = \rho_T^2$$

il raggio d'inerzia polare rispetto a T si ha in definitiva:

$$L_G^{(2)} = -\frac{1}{2} \cdot \int_l \overline{F} \cdot (u'^2 + v'^2 + \theta'^2 \cdot \rho_T^2 + 2 \cdot u' \cdot \theta' \cdot y_T - 2 \cdot v' \cdot \theta' \cdot x_T) \cdot dz$$

Nel caso di sezioni dotate di due assi di simmetria essendo:

$$G \equiv T, \quad \rho_{xT}^2 = \rho_G^2 \quad \text{ed} \quad y_T = x_T = 0$$

risulta:

$$L_G^{(2)} = -\frac{1}{2} \cdot \int_l \overline{F} \cdot (u'^2 + v'^2 + \theta'^2 \cdot \rho_G^2) \cdot dz$$

ove il terzo addendo in ρ_G^2 , come l'analogo in ρ_T^2 della formula precedente, risulta trascurabile.

In definitiva l'energia potenziale locale si scrive:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \left[\int_l (E \cdot I_{xx} \cdot u''^2 + E \cdot I_{yy} \cdot v''^2 + E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta''^2 + G \cdot I' \cdot \theta'^2) \cdot dz - \int_l \overline{F} \cdot (u'^2 + v'^2 + \theta'^2 \cdot \rho_T^2 + 2 \cdot u' \cdot \theta' \cdot y_T - 2 \cdot v' \cdot \theta' \cdot x_T) \cdot dz \right]$$

La condizione di equilibrio $\delta^{(1)}L = 0$ si impone applicando l'operatore di Eulero che dà luogo al sistema di equazioni lineari, differenziali del quarto ordine, indefinite di equilibrio:

$$\frac{d^2}{dz^2} [E \cdot I_{xx} \cdot u''] + \frac{d}{dz} \left[\overline{F} \cdot (u' + \theta' \cdot y_T) \right] = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2} [E \cdot I_{yy} \cdot v''] + \frac{d}{dz} \left[\overline{F} \cdot (v' - \theta' \cdot x_T) \right] = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2} [E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta''] + \frac{d}{dz} \left[\left(\overline{F} \cdot \rho_T^2 - G \cdot I^* \right) \cdot \theta' + \overline{F} \cdot (u' \cdot y_T - v' \cdot x_T) \right] = 0$$

DISCUSSIONE

Caso di sezione avente due assi di simmetria.

Risultando: $T \equiv G$, $x_T = y_T = 0$ e $\rho_T^2 = \rho_G^2$

il sistema assume la forma:

$$[E \cdot I_{xx} \cdot u'']'' + \left[\overline{F} \cdot u' \right]' = 0$$

$$[E \cdot I_{yy} \cdot v'']'' + \left[\overline{F} \cdot v' \right]' = 0$$

$$[E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta'']'' + \left[\left(\overline{F} \cdot \rho_G^2 - G \cdot I^* \right) \cdot \theta' \right]' = 0$$

Le tre equazioni di equilibrio risultano disaccoppiate e, dunque, si possono verificare separatamente due fenomeni di instabilità flessionale, nei due piani di simmetria strutturale, ed un fenomeno di instabilità torsionale, retti ognuno da una equazione: esistono, pertanto, tre carichi critici che caratterizzano i tre diversi comportamenti, il più piccolo dei quali, compatibilmente con la possibilità che si verifichi la corrispondente configurazione di equilibrio deviato, rappresenta il carico da non superare.

Caso di sezione avente un solo asse di simmetria.

Ipotizzando che sia, ad esempio, x l'asse di simmetria risulterà $y_T = 0$ e, dunque, il sistema assumerà la forma:

$$[E \cdot I_{xx} \cdot u'']'' + \left[\overline{F} \cdot u' \right]' = 0$$

$$[E \cdot I_{yy} \cdot v'']'' + \left[\overline{F} \cdot (v' - \theta' \cdot x_T) \right]' = 0$$

$$[E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta'']'' + \left[\left(\overline{F} \cdot \rho_T^2 - G \cdot I^* \right) \cdot \theta' - \overline{F} \cdot v' \cdot x_T \right]' = 0$$

Si nota immediatamente che la prima equazione risulta indipendente mentre le altre due sono accoppiate: ciò traduce il fatto che l'instabilità può verificarsi per sola flessione, nel piano di simmetria, oppure per flesso-torsione.

I carichi critici sono due, uno relativo all'instabilità puramente flessionale e l'altro relativo all'instabilità flesso-torsionale: di questi interesserà ai fini tecnici, ovviamente, il minore.

Caso di sezione avente forma qualunque.

In tale caso il sistema risolvete è quello completo in cui le tre equazioni risultano tutte accoppiate; tale circostanza esprime il fatto che l'instabilità è legata contemporaneamente alle flessioni nei due piani coordinati ed alla torsione. Delle infinite a tre soluzioni che rappresentano le autosoluzioni flesso-torsionali, anche in tale caso, interessa il minore.

Ai fini applicativi si riportano di seguito alcuni casi di interesse tecnico.

Problema 1.4: Calcolare i carichi critici di una trave a sezione costante dotata di doppia simmetria vincolata alle estremità da appoggi torsionali e caricata assialmente da una forza concentrata F .



fig. 11.4

Le equazioni che reggono il problema si scrivono:

$$E \cdot I_{xx} \cdot u'''' + \overline{F} \cdot u'' = 0$$

$$E \cdot I_{yy} \cdot v'''' + \overline{F} \cdot v'' = 0$$

$$E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta'''' + \left(\overline{F} \cdot \rho_G^2 - G \cdot I^* \right) \cdot \theta'' = 0$$

ovvero:

$$u'''' + \alpha^2 \cdot u'' = 0$$

$$v'''' + \beta^2 \cdot v'' = 0$$

$$\theta'''' + \gamma^2 \cdot \theta'' = 0$$

avendo posto:

$$\alpha^2 = \frac{\overline{F}}{E \cdot I_{xx}} ; \quad \beta^2 = \frac{\overline{F}}{E \cdot I_{yy}} ; \quad \gamma^2 = \frac{\overline{F} \cdot \rho_G^2 - G \cdot I^*}{E \cdot I_{\lambda\lambda}}$$

Le soluzioni del sistema sono del tipo:

$$u = A_x \cdot \text{sen } \alpha z + B_x \cos \alpha z + C_x \cdot z + D_x$$

$$v = A_y \cdot \text{sen } \beta z + B_y \cos \beta z + C_y \cdot z + D_y$$

$$\theta = A_z \cdot \text{sen } \gamma z + B_z \cos \gamma z + C_z \cdot z + D_z$$

Le condizioni ai limiti porgono:

$$u'(0) = 0 \text{ da cui: } B_x = 0$$

$$u(0) = 0 \text{ da cui: } D_x = 0$$

$$u'(l_0) = 0 \text{ da cui: } -A_x \text{sen } \alpha l_0 = 0 \text{ che implica: } A_x = 0 \text{ oppure } \text{sen } \alpha l = 0$$

$$u(l_0) = 0 \text{ da cui: } C_x = 0$$

$$v'(0) = 0 \text{ da cui: } B_y = 0$$

$$v(0) = 0 \text{ da cui: } D_y = 0$$

$$v'(l_0) = 0 \text{ da cui: } -A_y \text{sen } \beta l_0 = 0 \text{ che implica: } A_y = 0 \text{ oppure } \text{sen } \beta l = 0$$

$$v(l_0) = 0 \text{ da cui: } C_y = 0$$

$$\theta'(0) = 0 \text{ da cui: } B_z = 0$$

$$\theta(0) = 0 \text{ da cui: } D_z = 0$$

$$\theta'(l_0) = 0 \text{ da cui: } A_z \text{sen } \gamma l_0 = 0 \text{ che implica: } A_z = 0 \text{ oppure } \text{sen } \gamma l = 0$$

$$\theta(l_0) = 0 \text{ da cui: } C_z = 0$$

Le soluzioni diverse dalla banale, corrispondono alle condizioni:

$$\text{sen } \alpha l_0 = 0 \text{ da cui: } \alpha l_0 = n\pi \text{ ovvero: } \alpha^2 = \frac{\overline{F}}{E \cdot I_{xx}} = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{l_0^2}$$

$$\text{sen } \beta l_0 = 0 \text{ da cui: } \beta l_0 = n\pi \text{ ovvero: } \beta^2 = \frac{\overline{F}}{E \cdot I_{yy}} = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2}$$

$$\text{sen } \gamma l_0 = 0 \text{ da cui: } \gamma l_0 = n\pi \text{ ovvero: } \gamma^2 = \frac{\overline{F} \cdot \rho_G^2 - G \cdot I^*}{E \cdot I_{\lambda\lambda}} = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{l_0^2}$$

e da queste:

$$\overline{F}_x = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{xx}}{l_0^2}$$

$$\overline{F}_y = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{yy}}{l_0^2}$$

$$\overline{F}_\theta = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\lambda\lambda}}{\rho_G^2 \cdot l_0^2} + \frac{G \cdot I^*}{\rho_G^2} = \frac{1}{\rho_G^2} \cdot \left(\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{\lambda\lambda}}{l_0^2} + G \cdot I^* \right)$$

I valori dei carichi critici sono in definitiva,

$$F_{cx} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{xx}}{l_0^2} \quad \text{per instabilità flessionale nel piano } x-z$$

$$F_{cy} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{yy}}{l_0^2} \quad \text{per instabilità flessionale nel piano } y-z$$

$$F_{c\theta} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\lambda\lambda}}{\rho_G^2 \cdot l_0^2} + \frac{G \cdot I^*}{\rho_G^2} \quad \text{per instabilità torsionale}$$

Come si vede, esistono tre distinti possibili fenomeni di instabilità, indipendenti l'uno dall'altro, cui corrispondono tre diversi carichi critici il più importante dei quali è, ovviamente, il minore.

Per il carico critico corrispondente all'instabilità torsionale risulta:

- nel caso di sezioni compatte per le quali si possa assumere $I_{\lambda\lambda} \approx 0$

$$F_{c\theta} = \frac{G \cdot I^*}{\rho_G^2} \quad (\text{indipendente dalla luce } l_0)$$

- nel caso di sezioni diffuse per le quali si possa assumere $I^* \approx 0$

$$F_{c\theta} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\lambda\lambda}}{\rho_G^2 \cdot l_0^2}$$

Si dimostra che, intendendo per l_0 la lunghezza libera d'inflessione della trave, è possibile utilizzare le espressioni dei carichi critici innanzi ricavate per qualunque condizione di vincolo.

Ad esempio, nel caso di travi a sezione rettangolare di dimensioni $b \times h$ risultando:

$$I_{xx} = \frac{b^3 \cdot h}{12}; \quad I_{yy} = \frac{h^3 \cdot b}{12}; \quad \rho_G^2 = \frac{h^2 + b^2}{12}$$

$$I_{\lambda\lambda} = \int_b^b \int_h^h x^2 \cdot y^2 \cdot dx \cdot dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy \right) \cdot x^2 \cdot dx = \frac{b^3 \cdot h^3}{144}$$

$$I^* \approx \frac{h \cdot b^3}{3} \quad (\text{per } h \gg b)$$

i carichi critici assumono i valori:

$$F_{cx} = \frac{\pi^2}{12} \cdot E \cdot \frac{b^3 \cdot h}{l_0^2}$$

$$F_{cy} = \frac{\pi^2}{12} \cdot E \cdot \frac{h^3 \cdot b}{l_0^2}$$

$$F_{c\theta} = \frac{\pi^2}{12} \cdot E \cdot \frac{b^3 \cdot h^3}{l_0^2 \cdot (b^2 + h^2)} + 4 \cdot G \cdot \frac{h \cdot b^3}{b^2 + h^2}$$

Problema 2.4: Determinare i valori dei carichi critici per una trave, avente sezione costante di forma qualunque, vincolata alle estremità da appoggi torsionali e caricata assialmente da una forza concentrata F .

Le equazioni che reggono il problema si scrivono:

$$E \cdot I_{xx} \cdot u'''' + \overline{F} \cdot u'' + \overline{F} \cdot y_T \cdot \theta'' = 0$$

$$E \cdot I_{yy} \cdot v'''' + \overline{F} \cdot v'' - \overline{F} \cdot x_T \cdot \theta'' = 0$$

$$E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta'''' + \left(\overline{F} \cdot \rho_T^2 - G \cdot I^* \right) \cdot \theta'' + F \cdot y_T \cdot u'' - F \cdot x_T \cdot v'' = 0$$

ovvero nella forma.

$$u'''' + \alpha^2 \cdot u'' + \alpha^2 \cdot y_T \cdot \theta'' = 0$$

$$v'''' + \beta^2 \cdot v'' - \beta^2 \cdot x_T \cdot \theta'' = 0$$

$$\theta'''' + \gamma^2 \cdot \theta'' + \delta^2 \cdot y_T \cdot u'' - \delta^2 \cdot x_T \cdot v''$$

avendo posto:

$$\alpha^2 = \frac{\overline{F}}{E \cdot I_{xx}}$$

$$\beta^2 = \frac{\overline{F}}{E \cdot I_{yy}}$$

$$\gamma^2 = \frac{\overline{F} \cdot \rho_T^2 - G \cdot I^*}{E \cdot I_{\lambda\lambda}}$$

$$\delta^2 = \frac{\overline{F}}{E \cdot I_{\lambda\lambda}}$$

Le soluzioni saranno del tipo:

$$u = a \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot z}{l_0}$$

$$v = b \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot z}{l_0}$$

$$\theta = c \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot z}{l_0}$$

che, derivate e sostituite nel sistema iniziale porgono a meno dell'irrelevante

fattore $\frac{n^2 \cdot \pi^2}{l_0^2} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot z}{l_0}$:

$$a \cdot \left(\frac{n^2 \cdot \pi^2}{l_0^2} - \alpha^2 \right) - c \cdot \alpha^2 \cdot y_T = 0$$

$$b \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot \pi^2}{l_0^2} - \beta^2 \right) + c \cdot \beta^2 \cdot x_T = 0$$

$$- a \cdot \delta^2 \cdot y_T + b \cdot \delta^2 \cdot x_T + c \cdot \left(\frac{\pi^2 \cdot \pi^2}{l_0^2} - \gamma^2 \right) = 0$$

La condizione perchè tale sistema di equazioni algebriche lineari nelle incognite a, b, c ammetta soluzioni non banali è che sia nullo il determinante dei coefficienti.

Moltiplicando la prima equazione per $E \cdot I_{xx}$, la seconda per $E \cdot I_{yy}$, la terza per $E \cdot I_{\lambda\lambda}$, ricordando le espressioni di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e ponendo:

$$\overline{F_x} = \frac{\pi^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{xx}}{l_0^2}$$

$$\overline{F_y} = \frac{\pi^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{yy}}{l_0^2}$$

$$\overline{F_\theta} = \left(\pi^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot \frac{I_{\lambda\lambda}}{l_0^2} + G \cdot I^* \right) \cdot \frac{1}{\rho_T^2}$$

risulta:

$$a \cdot \left(\overline{F_x} - \overline{F} \right) - c \cdot \left(\overline{F} \cdot y_T \right) = 0$$

$$b \cdot \left(\overline{F_y} - \overline{F} \right) + c \cdot \left(\overline{F} \cdot x_T \right) = 0$$

$$a \cdot \left(\overline{F} \cdot y_T \right) + b \cdot \left(\overline{F} \cdot x_T \right) + c \cdot \left(\overline{F_\theta} - \overline{F} \right) \rho_T^2 = 0$$

La condizione $|\Delta| = 0$ porge, pertanto:

$$\begin{vmatrix} \overline{F} - \overline{F} & 0 & -\overline{F} \cdot y_T \\ 0 & \overline{F_y} - \overline{F} & \overline{F} \cdot x_T \\ -\overline{F} \cdot y_T & \overline{F} \cdot x_T & \left(\overline{F_\theta} - \overline{F} \right) \rho_T^2 \end{vmatrix} = 0$$

Risolvendo il determinante si ottiene un'equazione di terzo grado in \overline{F} le cui radici forniscono i valori dei carichi di biforcazione: quello di interesse è, ovviamente, il minore.

Nel caso particolare di sezione dotata di doppia simmetria ($x_T = y_T = 0$) la matrice diviene diagonale e si ritrovano i tre distinti carichi critici già determinati nell'esempio precedente.

4.11.2 - LA TRAVE SOLLECITATA FLESSIONALMENTE^(*)

Sia $y-z$ il piano di flessione corrispondente all'equilibrio fondamentale.

L'energia elastica di deformazione vale:

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \int_l \left(E \cdot I_{xx} \cdot u''^2 + E \cdot I_{yy} \cdot \theta''^2 + G \cdot I^* \cdot \theta'^2 \right) \cdot dz$$

Avendo trascurato i termini negli spostamenti v e w che caratterizzano le configurazioni di equilibrio fondamentale.

Per quanto riguarda il lavoro delle tensioni per le deformazioni del secondo ordine, nel caso generale di sollecitazione flessionale indotta dai momenti M_x ed M_y (positivi se i vettori sono equiversi agli assi coordinati) la tensione σ_z assume l'espressione:

$$\sigma_z = -\frac{M_x}{I_{xx}} \cdot x + \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot y$$

per cui risulta:

$$\begin{aligned} L_\sigma^{(2)} &= \frac{1}{2} \cdot \int_l \int_A \left[-\frac{M_x}{I_{xx}} \cdot x + \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot y \right] \cdot \left[u^2 + v^2 + \theta^2 \cdot (x^2 + y^2 + x_T^2 + y_T^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot x \cdot x_T - 2 \cdot y \cdot y_T) - 2 \cdot \theta' \cdot u \cdot (y - y_T) + 2 \cdot \theta' \cdot v \cdot (x - x_T) \right] \cdot dA \cdot dz = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_l \frac{M_x}{I_{xx}} \cdot \left[-u^2 \cdot \int_A x \cdot dA - v^2 \cdot \int_A x \cdot dA + \right. \\ &\quad \left. + \theta^2 \cdot \left(-\int_A x^3 \cdot dA - \int_A x \cdot y^2 \cdot dA - x_T^2 \cdot \int_A x \cdot dA - y_T^2 \cdot \int_A x \cdot dA + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \cdot x_T \cdot \int_A x^2 \cdot dA + 2 \cdot y_T \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA \right) + 2 \cdot \theta' \cdot \left(u' \cdot \int_A y \cdot x \cdot dA - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - u' \cdot y_T \cdot \int_A x \cdot dA - v' \cdot \int_A x^2 \cdot dA + v' \cdot x_T \cdot \int_A x \cdot dA \right) \right] \cdot dz + \end{aligned}$$

(*) La trattazione è valida, a rigore, per la sola flessione uniforme e, pertanto, nel seguito i momenti flettenti si assumeranno costanti con z .

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \int_l \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot \left[u'^2 \cdot \int_A y \cdot dA + v'^2 \cdot \int_A y \cdot dA + \theta'^2 \cdot \left(\int_A y^3 \cdot dA + \right. \right. \\
& + x_T'^2 \cdot \int_A y \cdot dA + y_T'^2 \cdot \int_A y \cdot dA + y_T'^2 \cdot \int_A y \cdot dA - 2 \cdot x_T' \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA - \\
& \left. \left. - 2 \cdot y_T' \cdot \int_A y^2 \cdot dA \right) + 2 \cdot \theta' \cdot \left(-u' \cdot \int_A y^2 \cdot dA + u' \cdot y_T' \cdot \int_A y \cdot dA + \right. \right. \\
& \left. \left. + v' \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA - v' \cdot x_T' \cdot \int_A x \cdot dA \right) \right] \cdot dz
\end{aligned}$$

Essendo:

$$\int_A x \cdot dA = I_x = 0$$

$$\int_A y \cdot dA = I_y = 0$$

$$\int_A x^2 \cdot dA = I_{xx}$$

$$\int_A y^2 \cdot dA = I_{yy}$$

$$\int_A x^3 \cdot dA = I_{xxx}$$

$$\int_A y^3 \cdot dA = I_{yyy}$$

$$\int_A x \cdot y \cdot y \cdot dA = I_{xyy}$$

$$\int_A x \cdot x \cdot y \cdot dA = I_{xxy}$$

Risulta dunque:

$$\begin{aligned}
L_{\sigma}^{(2)} = & -\frac{1}{2} \cdot \int_l M_x \cdot \left[\theta'^2 \cdot \left(\frac{I_{xxx} + I_{xyy}}{I_{xx}} - 2 \cdot x_T' \right) + 2 \cdot \theta' \cdot v' \right] \cdot dz + \\
& + \frac{1}{2} \cdot \int_l M_y \cdot \left[\theta'^2 \cdot \left(\frac{I_{xxy} + I_{yyy}}{I_{yy}} - 2 \cdot y_T' \right) - 2 \cdot \theta' \cdot u' \right] \cdot dz
\end{aligned}$$

Ponendo:

$$\frac{I_{xxx} + I_{xyy}}{I_{xx}} - 2 \cdot x_T = 2 \cdot r_x$$

nullo per sezioni aventi y come asse di simmetria e:

$$\frac{I_{xxy} + I_{yyy}}{I_{yy}} - 2 \cdot y_T = 2 \cdot r_y$$

nullo per sezioni aventi x come asse di simmetria, si potrà scrivere:

$$L_{\sigma}^{(2)} = L_{M_x}^{(2)} + L_{M_y}^{(2)} = - \int_l M_x \cdot (\theta'^2 \cdot r_x + v' \cdot \theta') \cdot dz + \int_l M_y \cdot (\theta'^2 \cdot r_y - u' \cdot \theta') \cdot dz$$

ove i termini in r risultano trascurabili rispetto agli altri.

Per sezioni dotate di doppia simmetria:

$$L_{\sigma}^{(2)} = \int_l \theta' \cdot (M_x \cdot v' + M_y \cdot u') \cdot dz$$

Per il particolare caso in esame, trattandosi la sola flessione nel piano y - z indotta dalla coppia M_y , nella configurazione di biforcazione il lavoro assumerà l'espressione:

$$L_{\sigma}^{(2)} = \int_l \overline{M}_y \cdot (\theta'^2 \cdot r_y - u' \cdot \theta') \cdot dz$$

In definitiva l'energia potenziale locale si scrive:

$$L = \frac{1}{2} \int_l (E \cdot I_{xx} \cdot u''^2 + E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta''^2 + G \cdot I^* \cdot \theta'^2) \cdot dz + \int_l \overline{M}_y \cdot (\theta'^2 \cdot r_y - u' \cdot \theta') \cdot dz$$

Applicando gli operatori di Eulero si hanno le equazioni dell'equilibrio deviato:

$$\frac{d^2}{dz^2} (EI_{xx} \cdot u'') + \overline{M}_y \cdot \frac{d}{dz} \theta' = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2} (EI_{\lambda\lambda} \cdot \theta'') - \frac{d}{dz} (GI^* \cdot \theta') + \overline{M}_y \cdot \frac{d}{dz} u' - 2 \cdot \overline{M}_y \cdot \frac{d}{dz} (r_y \cdot \theta') = 0$$

ovvero, in forma più sintetica, indicando con apici le derivazioni rispetto a z :

$$(E \cdot I_{xx} \cdot u'')'' + \overline{M}_y \cdot \theta'' = 0$$

$$(E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta'')'' - (G \cdot I^* \cdot \theta')' + \overline{M}_y \cdot [u'' - 2 \cdot (r_y \cdot \theta')] = 0$$

Poichè le equazioni, anche nel caso di sezione simmetrica ($r_y = 0$), risultano sempre accoppiate, l'instabilità avviene sempre per flessione-torsione e dunque le sezioni, pur conservando la forma, subiscono traslazioni e rotazioni. (*)

Problema 3.4: Determinare il valore del carico critico per la trave su appoggi torsionali, di sezione costante qualunque, semplicemente inflessa da due coppie uguali m applicate all'estremità. Indicando con M il momento flettente costante che si verifica nella trave le equazioni che risolvono il problema si scrivono:

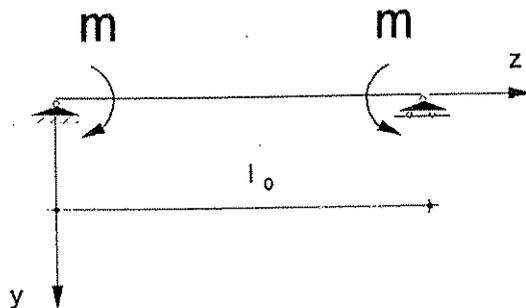


fig. 12.4

$$E \cdot I_{xx} \cdot u'''' + \overline{M} \cdot \theta'' = 0$$

$$E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta'''' - \left(G \cdot I^* + 2 \cdot \overline{M} \cdot r_y \right) \cdot \theta'' + \overline{M} \cdot u'' = 0$$

ovvero:

$$u'''' + \alpha^2 \cdot \theta'' = 0$$

$$\theta'''' - \gamma^2 \cdot \theta'' + \delta^2 \cdot u'' = 0$$

avendo posto:

$$\alpha^2 = \frac{\overline{M}}{E \cdot I_{xx}}$$

$$\gamma^2 = \frac{G \cdot I^* + 2 \cdot \overline{M} \cdot r_y}{E \cdot I_{\lambda\lambda}}$$

(*) Il problema dell'instabilità flessione-torsionale delle travi alte e snelle venne affrontato da Prandtl alla fine del secolo scorso.

Si noti che tale fenomeno è duale di quello dell'imbozzamento (instabilità locale) per il quale la sezione non subisce spostamenti u e v ma perde la forma.

$$\delta^2 = \frac{\overline{M}}{E \cdot I_{\lambda\lambda}}$$

Le soluzioni del sistema saranno del tipo:

$$u = d \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot z}{l_0}$$

$$\theta = e \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot z}{l_0}$$

che, derivate e sostituite nel sistema di equazioni differenziali, a meno dell'

influyente fattore $\frac{n^2 \cdot \pi^2}{l_0} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot z}{l}$ porgono:

$$+ d \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{l_0^2} - e \cdot \alpha^2 = 0$$

$$- d \cdot \delta^2 + e \cdot \left(\frac{n^2 \cdot \pi^2}{l_0^2} + \gamma^2 \right) = 0$$

Moltiplicando la prima equazione per $E \cdot I_{xx}$ e la seconda per $E \cdot I_{\lambda\lambda}$, ricordando le espressioni di α^2 , β^2 , γ^2 e ponendo:

$$\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot EI_{xx}}{l_0^2} = \overline{F_x}$$

$$\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot EI_{\lambda\lambda}}{l_0^2} + G \cdot I^* = \overline{M_0}$$

si può scrivere:

$$d \cdot \overline{F_x} - e \cdot \overline{M} = 0$$

$$- d \cdot \overline{M} + e \cdot \left(\overline{M_0} + 2 \cdot \overline{M} \cdot r_y \right) = 0$$

Tale sistema di equazioni algebriche lineari nelle incognite d ed e ammette soluzioni non nulle solo se è nullo il determinante dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} \overline{F_x} & -\overline{M} \\ -\overline{M} & \overline{M_0} + 2 \cdot \overline{M} \cdot r_y \end{vmatrix} = 0$$

che porge l'equazione di secondo grado in M :

$$\overline{M}^2 - \overline{M} \cdot \left(2 \cdot \overline{F_x} \cdot r_y \right) - \overline{F_x} \cdot \overline{M_0} = 0$$

Le radici dell'equazione forniscono i valori che danno luogo all'instabilità flessio-torsionale, ovvero al cosiddetto fenomeno dello svergolamento: interessa, come sempre, il più piccolo di tali valori:

$$\overline{M} = \overline{F}_x \cdot r_y \pm \sqrt{\left(\overline{F}_x \cdot r_y\right)^2 + \overline{F}_x \cdot \overline{M}_0}$$

Nel caso di sezione simmetrica rispetto al piano $x-z$ e compatta si ha:

$$\overline{M}^2 - \overline{F}_x \cdot \overline{M}_0 = 0$$

da cui:

$$\overline{M} = \pm \sqrt{\overline{F}_x \cdot \overline{M}_0} = \pm \frac{n \cdot \pi}{l_0} \sqrt{E \cdot I_{xx} \cdot G \cdot I^*}$$

e dunque il valore del carico critico:

$$m_c = \pm \frac{\pi}{l_0} \cdot \sqrt{E \cdot I_{xx} \cdot G \cdot I^*}$$

che prende anche nome di formula di Prandtl (1899).

Sviluppi di calcolo che per brevità si omettono consentono di ricavare, sempre per la trave a sezione simmetrica, compatta, vincolata da appoggi torsionali e sollecitata nel piano $y-z$, i valori del carico critico per condizioni di:

Carico uniformemente ripartito su tutta la luce:

$$P_c = \frac{3}{32} \cdot \frac{\pi^5}{l_0^3} \cdot \sqrt{E \cdot I_{xx} \cdot G \cdot I^*}$$

Carico concentrato in mezzeria:

$$P_c = \frac{3}{16} \cdot \frac{\pi^4}{l_0^2} \cdot \sqrt{E \cdot I_{xx} \cdot G \cdot I^*}$$

Le formulazioni riportate possono, in prima approssimazione, considerarsi valide anche per sollecitazioni da flessione e taglio dato il trascurabile contributo di quest'ultimo.

Problema 3.4: Determinare i carichi critici flessionali per la trave, semplicemente appoggiata, di luce 6 m² realizzata con IPE 200.

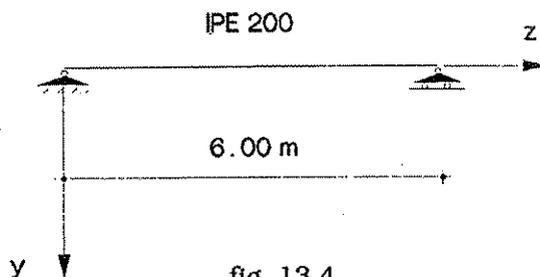


fig. 13.4

Caratteristiche della sezione:

$$H = 200 \text{ mm}$$

$$B = 100 \text{ mm}$$

$$t = 5,6 \text{ mm}$$

$$s = 8,5 \text{ mm}$$

$$I_{xx} = 142 \text{ cm}^4$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$E \cdot I_{xx} = 298 \text{ KN m}^2$$

$$I^* = 5,16 \text{ cm}^4$$

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$G \cdot I^* = 4,20 \text{ KN m}^2$$

$$I_{\lambda\lambda} = 1,3 \cdot 10^4 \text{ cm}^6$$

Coppia critica:

$$M_c = \frac{\pi}{6} \cdot \sqrt{298 \cdot 4,20} = 18,52 \text{ KN m}$$

Carico uniformemente ripartito critico:

$$p_c = \frac{3}{32} \cdot \frac{\pi^5}{6^3} \cdot \sqrt{298 \cdot 4,20} = 4,70 \text{ KN/m}$$

Carico concentrato critico:

$$P_c = \frac{3}{16} \cdot \frac{\pi^4}{6^2} \cdot \sqrt{298 \cdot 4,20} = 17,95 \text{ KN}$$

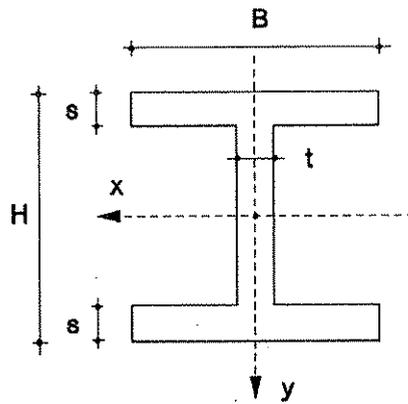


fig. 14.4

Problema 4.4: Determinare il carico critico di una trave in acciaio con sezione a T di luce 2 m caricata da due coppie alle estremità.

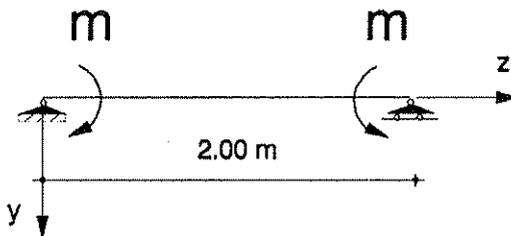


fig. 15.4

Caratteristiche della sezione:

$$B = 100 \text{ mm}$$

$$s = 10 \text{ mm}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Kgcm}^{-2}$$

$$G = 0,4 E = 8 \cdot 10^5 \text{ Kgcm}^{-2}$$

e trascurando le potenze di ordine superiore:

$$I_{xx} = \frac{1}{12} \cdot s \cdot B^3 = 83,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = \frac{5}{24} \cdot s \cdot B^3 = 208,33 \text{ cm}^4$$

$$I_{xxy} = -\frac{B}{4} \cdot \int_B x^2 \cdot s \cdot dx = -\frac{1}{48} s \cdot B^4 = -208,33 \text{ cm}^5$$

$$I_{yyy} = \left(-\frac{B}{4}\right)^3 \cdot s \cdot B + \int_{-\frac{B}{4}}^{\frac{3B}{4}} y^3 \cdot s \cdot dy = \frac{1}{16} \cdot s \cdot B^4 = 625 \text{ cm}^5$$

$$y_T = -\frac{B}{4} = -2,5 \text{ cm}$$

$$r_y = \frac{I_{xxy} + I_{yyy}}{2I_{yy}} - y_T = \frac{7}{20} \cdot B = 3,5 \text{ cm}$$

$$F_{cx} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 83,33}{200^2} = 43178 \text{ kg} = 431,78 \text{ KN}$$

$$I^* = \frac{1}{3} \cdot \Sigma_i h_i b_i^3 = \frac{20}{3} \text{ cm}^4$$

$$E \cdot I_{\lambda\lambda} \approx 0$$

$$M_{c\theta} = G \cdot I^* = 8 \cdot 10^5 \cdot \frac{20}{3} = 5333333 \text{ kgcm}^2 = 5,3 \text{ KNm}^2$$

da cui:

$$\begin{matrix} M_{c1} \\ M_{c2} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} M_{c1} \\ M_{c2} \end{matrix}} \right\} = 15,1123 \pm \sqrt{15,1123^2 + 431,78 \times 5,3}$$

ovvero:

$$M_{c1} = 65 \text{ KN m}$$

$$M_{c2} = -35 \text{ KN m}$$

4.11.3 - LA TRAVE SOLLECITATA TORSIONALMENTE

L'energia elastica di deformazione vale:

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \int_1 \left(E \cdot I_{xx} \cdot u''^2 + E \cdot I_{yy} \cdot v''^2 \right) \cdot dz$$

ove non compaiono i termini in w e θ che caratterizzano l'equilibrio fondamentale.

Il lavoro delle τ da torsione per gli scorrimenti del secondo ordine, omettendo gli sviluppi di calcolo, si scrive nel caso generale:

$$L_{\sigma}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \int_1 \overline{M_z} \cdot \left[(u'' \cdot v' - u' \cdot v'') - 2 \cdot \theta' \cdot w' \right] \cdot dz$$

avendo indicato con $\overline{M_z}$ la caratteristica torcente.

Nel caso particolare qui affrontato, eliminando il termine in θ e w per quanto detto innanzi, si perviene all'espressione:

$$L_{\sigma}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \int_1 \overline{M_z} \cdot (u'' \cdot v' - u' \cdot v'') \cdot dz$$

L'energia potenziale locale presenta, in definitiva, l'espressione:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \int_1 \left[E \cdot I_{xx} \cdot u''^2 + E \cdot I_{yy} \cdot v''^2 + \overline{M_z} \cdot (u'' \cdot v' - u' \cdot v'') \right] \cdot dz$$

ed applicando gli operatori di Eulero si ottengono le equazioni dell'equilibrio deviato:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} (E \cdot I_{xx} \cdot u'') + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dz^2} (\overline{M_z} \cdot v') + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (\overline{M_z} \cdot v'') &= 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} (E \cdot I_{yy} \cdot v'') - \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dz^2} (\overline{M_z} \cdot u') - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (\overline{M_z} \cdot u'') &= 0 \end{aligned}$$

Nel caso in cui risultino $E \cdot I_{xx}$, $E \cdot I_{yy}$, ed $\overline{M_z}$ costanti si ha:

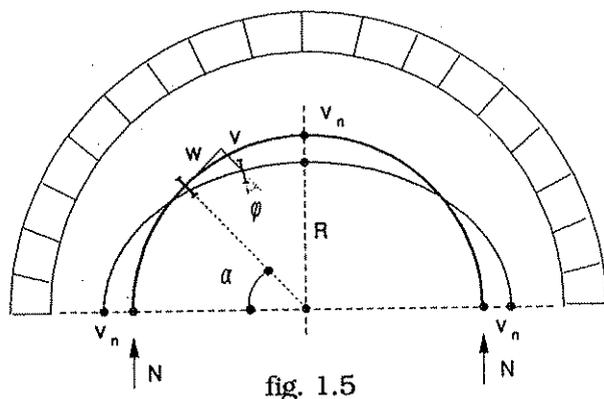
$$EI_{xx} \cdot u'''' + \overline{M_z} \cdot v''' = 0$$

$$EI_{yy} \cdot v'''' - \overline{M_z} \cdot u''' = 0$$

5 - LE ASTE PIANE AD ASSE CURVILINEO

5.1 - LA TRAVE ANULARE COMPRESSA UNIFORMEMENTE

Si consideri una trave piana circolare di raggio R e sezione costante, uniformemente compressa da un carico p ripartito per unità di lunghezza.



La funicolare dei carichi coincide con l'asse della trave e lo sforzo normale, ricavato dall'equazione di equilibrio:

$$\int_0^{\alpha} p \cdot R \cdot d\alpha \cdot \text{sen } \alpha - 2 \cdot N = 0$$

vale:

$$N = -p \cdot R$$

Configurazioni di equilibrio deviato possono corrispondere all'insorgere delle funzioni spostamento, radiali v e tangenziali w .

Analizzando la deformazione dell'elemento di lunghezza dc , le componenti di spostamento w e v danno luogo alle componenti di deformazione:

$$\begin{aligned} \epsilon_w &= \frac{dw}{dc} = \frac{dw}{R \cdot d\alpha} \\ \epsilon_v &= \frac{2 \cdot \pi \cdot (R - v) - 2 \cdot \pi \cdot R}{2 \cdot \pi \cdot R} = -\frac{v}{R} \end{aligned}$$

da cui:

$$\epsilon^{(1)} = \epsilon_w + \epsilon_v = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{dw}{d\alpha} - v \right)$$

ed ancora:

$$\epsilon^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot v'^2 = \frac{1}{2} \cdot \phi^2$$

La consueta ipotesi di deformazione flessionale dell'anello di tipo inestensionale, ossia senza variazione di lunghezza, comporta:

$$\varepsilon^{(1)} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{dw}{d\alpha} = v$$

condizione che consente di ricavare una componente di spostamento in funzione dell'altra.

Proseguendo nello studio della deformazione dell'elemento generico dc , essendo le rotazioni dovute alle componenti di spostamento:

$$\varphi_v = \frac{dv}{dc}$$

$$\varphi_w = \frac{w}{R}$$

si ha la rotazione totale:

$$\varphi = \varphi_v + \varphi_w = \frac{1}{R} \cdot \left(w + \frac{dv}{d\alpha} \right)$$

che per $\varepsilon^{(1)} = 0$ fornisce :

$$\varphi = \frac{1}{R} \cdot \left(\int v \cdot d\alpha + \frac{dv}{d\alpha} \right)$$

La curvatura dell'elemento, ovvero la rotazione relativa tra due sezioni a distanza dc , vale:

$$\chi = \frac{d\varphi}{dc} = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{R^2} \cdot \left(\frac{dw}{d\alpha} + \frac{d^2v}{d\alpha^2} \right)$$

e per $\varepsilon^{(1)} = 0$ si scrive:

$$\chi = \frac{1}{R^2} \cdot \left(v + \frac{d^2v}{d\alpha^2} \right)$$

Assumendo che la deformata flessionale dell'anello sia espressa dalla funzione (che riduce il sistema continuo ad un solo grado di libertà):

$$v = v_n \cdot \cos n\alpha$$

cui corrisponde per deformazione inestensionale :

$$w = \int v \cdot d\alpha = \frac{1}{n} v_n \cdot \text{sen } n\alpha$$

si nota subito che le funzioni deformazione hanno significato solamente per $n > 2$, rappresentando esse per $n = 1$ una semplice traslazione rigida dell'anello.

Esprimendo rotazione e curvatura in funzione di v e w :

$$\varphi = \frac{1}{R} \cdot \left(w + \frac{dv}{d\alpha} \right) = \frac{v_n}{R} \cdot \left(\frac{\text{sen } n\alpha}{n} - n \cdot \text{sen } n\alpha \right) = \frac{1 - n^2}{n} \cdot \frac{v_n}{R} \cdot \text{sen } n\alpha$$

$$\chi = \frac{1}{R^2} \cdot \left(v + \frac{d^2 v}{d\alpha^2} \right) = \frac{v_n}{R^2} \cdot (\cos n\alpha - n^2 \cos n\alpha) = (1 - n^2) \cdot \frac{v_n}{R^2} \cdot \cos n\alpha$$

da cui:

$$\Phi^{(2)} = \frac{E \cdot I}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \chi^2 \cdot R \cdot d\alpha = \frac{\pi \cdot (1 - n^2)^2}{2} \cdot \frac{E \cdot I}{R^3} \cdot v_n^2$$

$$L_s^{(2)} = -\frac{\bar{p} \cdot R^2}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cdot d\alpha = -\frac{\pi \cdot (1 - n^2)^2}{2 \cdot n^2} \cdot \bar{p} \cdot v_n^2$$

Si osserva immediatamente che per $i = 1$ risulta $\Phi^{(2)} = L_s^{(2)} = 0$ e ciò conferma come tale caso non corrisponda ad una deformazione dell'anello ma ad una sua traslazione rigida.

L'EPL si scrive dunque:

$$L = \frac{\pi \cdot (1 - n^2)^2}{2} \cdot v_n^2 \cdot \left[\frac{E \cdot I}{R^3} - \frac{\bar{p}}{n^2} \right]$$

ed imponendo $\delta^{(1)}L = 0$ si ha:

$$v_n \cdot \pi \cdot (1 - n^2)^2 \cdot \left[\frac{E \cdot I}{R^3} - \frac{\bar{p}}{n^2} \right] = 0$$

da cui, avendo escluso la possibilità che sia $n = 1$, il carico critico corrispondente al valore $n = 2$ è:

$$p_c = \frac{4 \cdot E \cdot I}{R^3}$$

da cui lo sforzo normale critico:

$$N_c = -p_c \cdot R = -\frac{4 \cdot E \cdot I}{R^2}$$

che posto nella forma:

$$N_c = -\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\left(\frac{\pi \cdot R}{2} \right)^2}$$

coincide con il carico critico euleriano di un'asta avente lunghezza libera di inflessione pari ad un quarto della lunghezza dell'anello.

Ove l'anello risulti compresso *idrostaticamente*, ovvero il carico p muti la sua direzione con la deformazione dell'anello, questo non può più essere considerato conservativo ma diviene posizionale, essendo caratterizzato da componenti radiali e tangenziali variabili al variare di φ con leggi:

$$p_r = \bar{p} \cdot \cos \varphi \approx \bar{p} \cdot \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) = \bar{p} - \bar{p} \cdot \frac{\varphi^2}{2}$$

$$p_t = \bar{p} \cdot \text{sen } \varphi \approx \bar{p} \cdot \varphi$$

Per quanto attiene p_r , il primo addendo è stato già considerato (forza conservativa) mentre il secondo, essendo quadratico, dà luogo ad un termine di ordine superiore rispetto a quelli di secondo grado che intervengono in $L^{(2)}$.

La componente p_t dà, invece, luogo al lavoro (posizionale) di second'ordine:

$$L_{\text{pos}}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi \cdot \bar{p} \cdot \omega \cdot R \cdot d\alpha$$

che essendo:

$$v = v_n \cdot \cos n\alpha,$$

$$\omega = \frac{1}{n} \cdot v_n \cdot \text{sen } n\alpha$$

$$\varphi = \frac{1 - n^2}{n} \cdot \frac{v_n}{R} \cdot \text{sen } n\alpha$$

si scrive:

$$L_{\text{pos}}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \bar{p} \cdot \frac{\pi \cdot (1 - n^2)}{n^2} \cdot v_n^2$$

In definitiva risulta per tale caso:

$$L^{(2)} = \Phi^{(2)} + L_s^{(2)} + L_{\text{pos}}^{(2)} =$$

$$= \frac{\pi \cdot (1 - n^2)}{2} \cdot v_n^2 \cdot \left\{ \left[\frac{E \cdot I}{R^3} - \frac{\bar{p}}{n^2} \right] \cdot (1 - n^2) + \frac{\bar{p}}{n^2} \right\}$$

da cui, imponendo la condizione di equilibrio:

$$\pi \cdot (1 - n^2) \cdot v_n \cdot \left\{ \frac{E \cdot I}{R^3} \cdot (1 - n^2) + \bar{p} \right\} = 0$$

risulta:

$$\bar{p} = \frac{E \cdot I}{R^3} \cdot (n^2 - 1)$$

e per $n = 2$ il valore del carico critico:

$$p_c = \frac{3 \cdot E \cdot I}{R^3}$$

più piccolo di quello di quello calcolato nel caso di forze conservative.

Entrambe le espressioni del carico critico così ricavate consentono di definire immediatamente il carico critico dei tubi sottoposti a pressione esterna uniforme.

Con riferimento al tronco di lunghezza unitaria assumendo come rigidezza flessionale quella degli elementi bidimensionali:

$$D = \frac{E \cdot s^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

risulta, nei due casi esaminati:

$$p_c = \frac{4 \cdot D}{R^3} = \frac{E}{3 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{s}{R}\right)^3$$

ovvero:

$$p_c = \frac{3 \cdot D}{R^3} = \frac{E}{4 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{s}{R}\right)^3$$

validi sia per le travi rettilinee a sezione tubolare con $R \gg s$ che per i serbatoi cilindrici lunghi.

6 - I SISTEMI DI ASTE PIANE

6.1 - GENERALITA'

Si definiscono *sistemi di travi* quelli costituiti da un insieme di aste collegate con nodi cerniera o incastro: nel primo caso si parla di strutture reticolari, nel secondo caso, ove la condizione di carico appartenga al piano della struttura, i sistemi si definiscono *intelaiati* e di essi si tratterà essenzialmente nel seguito.^(*)

Per quanto attiene le azioni esterne risulta necessario distinguere il caso di sollecitazione puramente assiale da quello in cui sono presenti anche carichi trasversali: nel solo primo caso può verificarsi l'instabilità euleriana e dunque può avere senso parlare di determinazione del carico critico; nel secondo, essendo il sistema in equilibrio di seconda specie, il problema diviene quello di stabilire come la presenza dello sforzo normale influenzi il comportamento flessionale della struttura e quindi, semmai, di ricercare un carico limite.

Il collasso, in generale, può avvenire per instabilità o per plasticizzazione.

^(*) Nel caso di sollecitazione ortogonale a tale piano detti sistemi prendono, comunemente, nome di *graticci*.

6.2 - STRUTTURE RETICOLARI

Al contrario di quelle intelaiate che raggiungono il collasso per condizioni di plasticizzazione, le strutture reticolari, rimanendo elastiche a lungo, pervengono alla crisi per instabilità della aste compresse. Equilibrio e congruenza sono, in tali strutture, compatibili con soli sforzi e deformazioni estensionali valutabili, per la piccolezza degli spostamenti, sul sistema indeformato.

Gli sforzi nelle aste $S(F)$, funzioni del carico nodale applicato, presentano equilibrio fondamentale di prima specie rendendo così lecita una analisi lineare.

Il carico critico, nell'ipotesi di struttura perfetta, è il più basso di quelli relativi alle aste che costituiscono il sistema reticolare.

Ricerche compiute da Massonnet indicano che il collasso ha origine, sempre, per l'instabilità di una sola asta (mentre le altre aste rimangono elastiche) cui consegue la rovina totale.

Anche per le strutture reticolari lo studio del comportamento post-critico risulta indispensabile al fine di valutare la sensibilità alle imperfezioni che in tali casi può essere notevole.

Nel caso dei grigliati a doppio strato molti progettisti credono che, trattandosi di strutture ad elevata iperstaticità, queste posseggono una elevata riserva di sicurezza: l'esperienza ha dimostrato che tale opinione è errata.

La differenza fra i comportamenti a trazione ed a compressione delle aste implica che quando un elemento teso raggiunge il limite di snervamento la sua capacità portante rimane costante e gli ulteriori aumenti di sforzo vengono distribuiti e sopportati dalle aste vicine; quando un'asta compressa, invece, si instabilizza, essa perde ogni capacità e tutto il carico che le competeva deve essere assorbito dalle aste adiacenti.

Per tali strutture, e particolarmente per quelle reticolari spaziali, grande importanza assume il comportamento post-critico in considerazione dell'influenza esercitata dalle imperfezioni che in tali tipologie si sommano nelle fasi di montaggio determinando drastiche riduzioni del carico che induce il collasso per instabilità.

6.3 - STRUTTURE INTELAIATE

Fatta eccezione per alcuni casi particolari di sistemi caricati solo assialmente, l'equilibrio fondamentale di tali strutture è sempre di seconda specie: si rientra così nel problema della determinazione del carico limite e dunque in uno studio, non sempre possibile, mediante una teoria del second'ordine.

Per quanto riguarda i telai a nodi spostabili il fenomeno della instabilità è importante quanto quello della plasticità.

Tali strutture vanno progettate tenendo conto dei momenti addizionali prodotti dalle componenti orizzontali degli spostamenti dei punti di applicazione delle forze, ovvero del cosiddetto effetto $P-\Delta$, e della riduzione di rigidità flessionale dovuta allo sforzo normale.

Per quanto attiene, invece, i telai a nodi fissi se ne può valutare la capacità portante isolando, con le cautele in precedenza menzionate, le singole aste e sottoponendole agli sforzi assiali e flettenti che loro competono.

6.4 - STABILITA' GLOBALE DEI TELAI IN CAMPO NON LINEARE

E' noto come i metodi generali per il calcolo dei sistemi di travi, nel campo dei piccoli spostamenti e nell'ipotesi di materiale ad elasticità lineare, siano due:

- *Metodo delle forze* nel quale si assumono le reazioni iperstatiche come incognite e si procede alla loro determinazione risolvendo delle equazioni di congruenza, ovvero individuando fra le infinite configurazioni equilibrate l'unica congruente.

- *Metodo degli spostamenti*^(*) nel quale si assumono come incognite gli spostamenti nodali e si procede alla loro determinazione risolvendo equazioni di equilibrio, ovvero individuando tra le infinite configurazioni congruenti l'unica equilibrata.

Il secondo procedimento risulta, in generale, più vantaggioso del primo perchè consente una scelta univoca delle incognite, una riduzione del loro numero e dà luogo a sistemi di equazioni ben condizionati.

Si danno nel seguito alcuni cenni di calcolo dei sistemi di travi con il metodo degli spostamenti, rinviando per una trattazione completa dell'argomento ai testi classici di *Scienza e Tecnica delle costruzioni*.

Per semplicità di esposizione verranno trattati i soli sistemi piani che, nella pratica professionale, costituiscono i casi più ricorrenti, anche se nessuna particolare difficoltà presentano i sistemi spaziali per i quali si tratta semplicemente di raddoppiare termini noti ed incognite del problema.

Si consideri, dunque, un qualsiasi sistema piano di aste, costituite da materiale linearmente elastico, caricato solo in corrispondenza dei nodi: tale ipotesi non limita affatto la generalità del problema potendosi riportare qualsiasi azione esterna ad una sollecitazione puramente nodale.

Essendo il sistema piano, ogni nodo possiede tre gradi di libertà v, w, ϕ , che rappresentano rispettivamente: le componenti di traslazione secondo gli assi y ed z di un sistema generale cartesiano ortogonale di riferimento, e la componente di rotazione intorno ad un asse parallelo ad x .

Detto i il generico nodo della struttura, indicheremo con:

$\underline{S}_i = (v_i, w_i, \phi_i)$ il vettore di spostamento del nodo i

$\underline{F}_i = (F_{yi}, F_{zi}, M_{xi})$ il vettore di carico applicato al nodo i

(*) Detto anche delle *deformazioni*.

Per effetto degli spostamenti che la struttura subisce in conseguenza della deformazione si genera in ogni nodo i un vettore di reazione \underline{R}_i che, nell'ipotesi assunta di comportamento elastico lineare, è esprimibile come combinazione lineare degli spostamenti degli n nodi del sistema tramite i coefficienti K_{ij} che prendono nome di *coefficienti di rigidezza globale*:

$$\underline{R}_i = K_{i1} \cdot \underline{s}_1 + \dots + K_{in} \cdot \underline{s}_n$$

Ma per l'equilibrio del nodo i dovrà verificarsi l'eguaglianza:

$$\underline{R}_i = \underline{F}_i$$

e dunque la generica equazione di equilibrio si scriverà:

$$K_{i1} \cdot \underline{s}_1 + \dots + K_{in} \cdot \underline{s}_n = \underline{F}_i$$

Per gli n nodi costituenti il telaio dovrà, quindi, essere soddisfatto il sistema:

$$K_{11} \cdot \underline{s}_1 + \dots + K_{1n} \cdot \underline{s}_n = \underline{F}_1$$

.....

$$K_{n1} \cdot \underline{s}_1 + \dots + K_{nn} \cdot \underline{s}_n = \underline{F}_n$$

esprimibile con simbologia matriciale nella forma:

$$[K] \cdot [s] = [F]$$

avendo indicato con:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

la matrice di rigidezza globale della struttura;

$$[s] = \begin{bmatrix} \underline{s}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{s}_n \end{bmatrix}$$

il vettore di spostamento dei nodi;

$$[F] = \begin{bmatrix} \underline{F}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{F}_n \end{bmatrix}$$

il vettore di carico nodale.

Volendo essere ancora più espliciti:

- nel caso trattato di *sistemi piani*, i vettori $\{S_i\}$ ed $\{F_i\}$ risultano a tre componenti mentre i coefficienti di rigidezza sono sub-matrici 3×3 per cui si può scrivere:

$$[K] = \begin{bmatrix} & \cdot & \\ K_{11} & \cdot & K_{1n} \\ & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \\ K_{n1} & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix} ; \quad \{S\} = \begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \\ w_n \\ \phi_n \end{bmatrix} ; \quad \{F\} = \begin{bmatrix} F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{yn} \\ F_{zn} \\ M_{xn} \end{bmatrix}$$

- nel caso di *sistemi spaziali* i vettori $\{S_i\}$ ed $\{F_i\}$ risulteranno a sei componenti mentre i coefficienti di rigidezza saranno rappresentati da sub-matrici 6×6 per cui sarà:

$$[K] = \begin{bmatrix} & \cdot & \\ K_{11} & \cdot & K_{1n} \\ & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \\ K_{n1} & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\{S\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \phi_{x1} \\ \phi_{y1} \\ \phi_{z1} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \\ v_n \\ w_n \\ \phi_{xn} \\ \phi_{yn} \\ \phi_{zn} \end{bmatrix} ; \quad \{F\} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{xn} \\ F_{yn} \\ F_{zn} \\ M_{xn} \\ M_{yn} \\ M_{zn} \end{bmatrix}$$

In ogni caso $\{s\}$ rappresenta il vettore incognito determinabile tramite le matrici note $[K]$ ed $\{F\}$ attraverso l'equazione:

$$\{s\} = [K]^{-1} \cdot \{F\}$$

ove $[K]$ ed $\{F\}$ si costruiscono per assemblaggio delle matrici relative alle singole aste componenti la struttura.

Si consideri la generica trave, avente per estremi i nodi i e j , supposta incastrata:

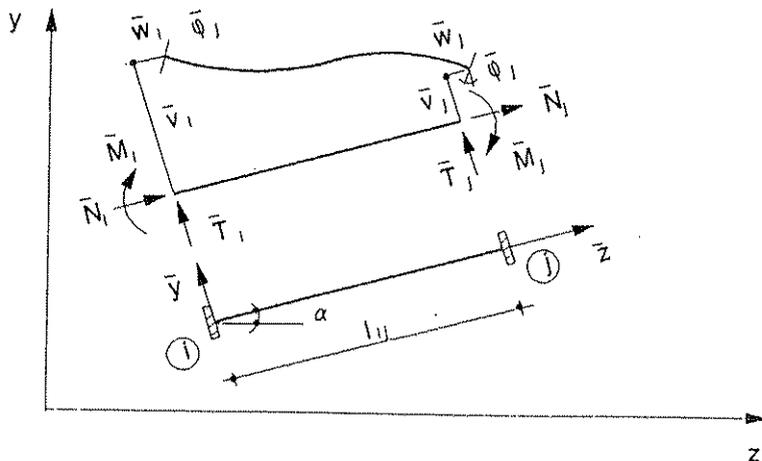


Fig. 1.6

Detta $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ la terna di riferimento locale dell'asta e x, y, z quella di riferimento generale della intera struttura, per effetto degli spostamenti $\bar{v}, \bar{w}, \bar{\phi}$ dei nodi conseguenti alla deformazione nascono nelle sezioni i e j le reazioni $\bar{T}, \bar{N}, \bar{M}$ che, nelle ipotesi assunte di materiale elastico lineare, si possono esprimere come combinazione lineare dei detti spostamenti tramite i *coefficienti di rigidezza locale* \bar{k}_y nella forma:

$$\bar{T}_i = \bar{k}_{11} \cdot \bar{v}_i + \bar{k}_{12} \cdot \bar{w}_i + \bar{k}_{13} \cdot \bar{\phi}_i + \bar{k}_{14} \cdot \bar{v}_j + \bar{k}_{15} \cdot \bar{w}_j + \bar{k}_{16} \cdot \bar{\phi}_j$$

$$\bar{N}_i = \bar{k}_{21} \cdot \bar{v}_i + \bar{k}_{22} \cdot \bar{w}_i + \bar{k}_{23} \cdot \bar{\phi}_i + \bar{k}_{24} \cdot \bar{v}_j + \bar{k}_{25} \cdot \bar{w}_j + \bar{k}_{26} \cdot \bar{\phi}_j$$

$$\bar{M}_i = \bar{k}_{31} \cdot \bar{v}_i + \bar{k}_{32} \cdot \bar{w}_i + \bar{k}_{33} \cdot \bar{\phi}_i + \bar{k}_{34} \cdot \bar{v}_j + \bar{k}_{35} \cdot \bar{w}_j + \bar{k}_{36} \cdot \bar{\phi}_j$$

$$\bar{T}_j = \bar{k}_{41} \cdot \bar{v}_i + \bar{k}_{42} \cdot \bar{w}_i + \bar{k}_{43} \cdot \bar{\phi}_i + \bar{k}_{44} \cdot \bar{v}_j + \bar{k}_{45} \cdot \bar{w}_j + \bar{k}_{46} \cdot \bar{\phi}_j$$

$$\bar{N}_j = \bar{k}_{51} \cdot \bar{v}_i + \bar{k}_{52} \cdot \bar{w}_i + \bar{k}_{53} \cdot \bar{\phi}_i + \bar{k}_{54} \cdot \bar{v}_j + \bar{k}_{55} \cdot \bar{w}_j + \bar{k}_{56} \cdot \bar{\phi}_j$$

$$\bar{M}_j = \bar{k}_{61} \cdot \bar{v}_i + \bar{k}_{62} \cdot \bar{w}_i + \bar{k}_{63} \cdot \bar{\phi}_i + \bar{k}_{64} \cdot \bar{v}_j + \bar{k}_{65} \cdot \bar{w}_j + \bar{k}_{66} \cdot \bar{\phi}_j$$

Con notazione matriciale tale sistema assume la forma:

$$\{ \overline{R}^{(i,j)} \} = [\overline{k}^{(i,j)}] \cdot \{ \overline{S}^{(i,j)} \}$$

avendo indicato con:

$$\{ \overline{R}^{(i,j)} \} = \{ \overline{T}_i, \overline{N}_i, \overline{M}_i, \overline{T}_j, \overline{N}_j, \overline{M}_j \}$$

il *vettore delle caratteristiche locali dell'asta* (i, j);

$$\{ \overline{S}^{(i,j)} \} = \{ \overline{v}_i, \overline{w}_i, \overline{\phi}_i, \overline{v}_j, \overline{w}_j, \overline{\phi}_j \}$$

il *vettore di spostamento locale dell'asta* (i, j);

$$[\overline{k}^{(i,j)}] = \begin{bmatrix} \overline{k}_{11} & \dots & \overline{k}_{16} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{k}_{61} & \dots & \overline{k}_{66} \end{bmatrix}$$

la *matrice di rigidezza locale dell'asta* (i, j).

Per l'equilibrio dovrà risultare:

$$\{ \overline{R}^{(i,j)} \} = \{ \overline{F}^{(i,j)} \}$$

avendo indicato con

$$\{ \overline{F}^{(i,j)} \} = \{ \overline{F}_{yi}, \overline{F}_{zi}, \overline{M}_{xi}, \overline{F}_{yj}, \overline{F}_{zj}, \overline{M}_{xj} \}$$

il *vettore dei carichi nodali sull'asta* (i, j) nel riferimento locale.

L'equilibrio dell'elemento di estremi i, j sarà, dunque, espresso dalla equazione:

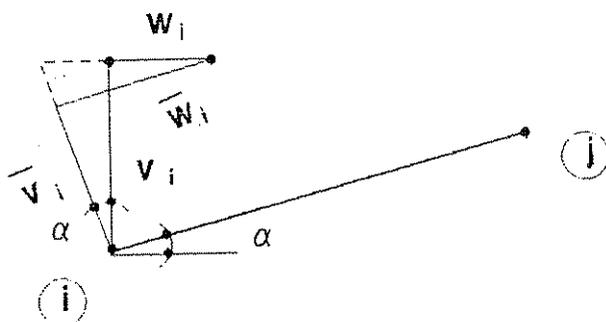
$$[\overline{k}^{(i,j)}] \cdot \{ \overline{S}^{(i,j)} \} = \{ \overline{F}^{(i,j)} \}$$

ove la matrice di rigidezza locale della generica asta può essere anche riguardata come insieme di quattro sottomatrici:

$$\left[\bar{k}^{ij} \right] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} & \bar{k}_{14} & \bar{k}_{15} & \bar{k}_{16} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} & \bar{k}_{24} & \bar{k}_{25} & \bar{k}_{26} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} & \bar{k}_{34} & \bar{k}_{35} & \bar{k}_{36} \\ \hline \bar{k}_{41} & \bar{k}_{42} & \bar{k}_{43} & \bar{k}_{44} & \bar{k}_{45} & \bar{k}_{46} \\ \bar{k}_{51} & \bar{k}_{52} & \bar{k}_{53} & \bar{k}_{54} & \bar{k}_{55} & \bar{k}_{56} \\ \bar{k}_{61} & \bar{k}_{62} & \bar{k}_{63} & \bar{k}_{64} & \bar{k}_{65} & \bar{k}_{66} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \bar{k}_{i1} & \bar{k}_{iJ} \\ \hline \bar{k}_{j1} & \bar{k}_{jJ} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Per passare dal riferimento locale $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ a quello generale x, y, z occorre osservare che, detta α l'inclinazione dell'asta generica, ovvero l'angolo di rotazione relativa fra le due terne di assi, le componenti di spostamento nei due riferimenti sono legate alle relazioni:

fig. 2.6



$$\begin{aligned}
 \bar{v}_i &= v_i \cdot \cos \alpha - w_i \cdot \sin \alpha \\
 \bar{w}_i &= v_i \cdot \sin \alpha + w_i \cdot \cos \alpha \\
 \bar{\varphi}_i &= \varphi_i \\
 \bar{v}_j &= v_j \cdot \cos \alpha - w_j \cdot \sin \alpha \\
 \bar{w}_j &= v_j \cdot \sin \alpha + w_j \cdot \cos \alpha \\
 \bar{\varphi}_j &= \varphi_j
 \end{aligned}$$

che, con notazione matriciale, si possono scrivere:

$$\{\bar{s}^{(l,j)}\} = [\Omega] \cdot \{s^{(l,j)}\}$$

avendo posto:

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega & | & 0 \\ & | & \\ \hline & | & \\ & | & \omega \end{bmatrix}$$

Quest'ultima prende nome di *matrice di rotazione* e, come si vede, può essere riguardata, anch'essa, come insieme di quattro sottomatrici.

Valendo le relazioni:

$$\{\bar{s}^{(l,j)}\} = [\Omega] \cdot \{s^{(l,j)}\}$$

$$\{\bar{F}^{(l,j)}\} = [\Omega] \cdot \{F^{(l,j)}\}$$

l'equazione:

$$[\bar{k}^{(l,j)}] \cdot \{\bar{s}^{(l,j)}\} = \{F^{(l,j)}\}$$

a sostituzioni effettuate si scrive:

$$[\bar{k}^{(l,j)}] \cdot [\Omega] \cdot \{s^{(l,j)}\} = [\Omega] \cdot \{F^{(l,j)}\}$$

Premoltiplicando entrambi i membri per $[\Omega]^T$, essendo $[\Omega]$ ortogonale ed $[\Omega]^T = [\Omega]^{-1}$, risulta $[\Omega]^T \cdot [\Omega] = [I]$ e, dunque:

$$[\Omega]^T \cdot [\bar{k}^{(l,j)}] \cdot [\Omega] \cdot \{s^{(l,j)}\} = \{F^{(l,j)}\}$$

Dovendo essere:

$$[k^{(l,j)}] \cdot \{s^{(l,j)}\} = \{F^{(l,j)}\}$$

si ha l'uguaglianza:

$$[k^{(l,j)}] = [\Omega]^T \cdot [\bar{k}^{(l,j)}] \cdot [\Omega]$$

che consente di trasferire la matrice di rigidezza della generica asta dal riferimento locale a quello generale.

Ricordando, peraltro, la possibilità di esprimere le matrici $[\bar{k}^{(l,j)}]$ ed $[\Omega]$ come insieme di submatrici:

$$[\bar{k}^{(i,j)}] = \begin{bmatrix} \bar{k}_{i,i} & | & \bar{k}_{i,j} \\ \hline \bar{k}_{j,i} & | & \bar{k}_{j,j} \end{bmatrix}$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \omega & | & 0 \\ \hline 0 & | & \omega \end{bmatrix}$$

essendo:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si potrà scrivere:

$$[k^{(i,j)}] = \begin{bmatrix} \omega^T \cdot \bar{k}_{i,i} \cdot \omega & | & \omega^T \cdot \bar{k}_{i,j} \cdot \omega \\ \hline \omega^T \cdot \bar{k}_{j,i} \cdot \omega & | & \omega^T \cdot \bar{k}_{j,j} \cdot \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{i,i} & | & k_{i,j} \\ \hline k_{j,i} & | & k_{j,j} \end{bmatrix}$$

avendo posto:

$$[k_{i,i}] = [\omega]^T \cdot [\bar{k}_{i,i}] \cdot [\omega]$$

$$[k_{j,j}] = [\omega]^T \cdot [\bar{k}_{j,j}] \cdot [\omega]$$

$$[k_{i,j}] = [k_{j,i}] = [\omega]^T \cdot [\bar{k}_{i,j}] \cdot [\omega]$$

Note le matrici di rigidezza delle singole aste nel riferimento generale, la matrice di rigidezza globale dell'intera struttura:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

si otterrà per assemblaggio delle:

$$[k^{(i,j)}] = \begin{bmatrix} k_{ii} & & k_{ij} \\ & \vdots & \\ k_{ji} & & k_{jj} \end{bmatrix}$$

costruendo la generica sottomatrice K_{ij} di rigidezza globale come somma delle sottomatrici k_{ij} di rigidezza delle singole aste che hanno gli stessi indici:

$$[K_{ij}] = \sum [k_{ij}]$$

Numerando opportunamente i nodi della struttura, in maniera cioè che la differenza $d = i - j$ fra gli indici degli estremi di una stessa asta sia la minore possibile, si possono ottenere matrici $[K]$ a banda con dimensione di questa pari a: $d + 3$.

6.5 - LA MATRICE DI RIGIDEZZA LOCALE DELL'ASTA GENERICA

Come si è visto, per costruire la matrice di rigidezza globale della struttura è sufficiente conoscere, le matrici di rigidezza delle singole aste nel riferimento locale $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Preso, dunque, in esame l'elemento generico di estremi i, j determiniamo per esso la matrice $\left[\bar{k}^{(i,j)} \right]$.

Corredando le righe e le colonne con le rispettive coordinate, risulta più evidente il significato dei coefficienti di rigidezza locale:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 \bar{v}_i & \bar{w}_i & \bar{\phi}_i & \bar{v}_j & \bar{w}_j & \bar{\phi}_j & \\
 \hline
 \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} & \bar{k}_{14} & \bar{k}_{15} & \bar{k}_{16} & \bar{T}_i \\
 \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} & \bar{k}_{24} & \bar{k}_{25} & \bar{k}_{26} & \bar{N}_i \\
 \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} & \bar{k}_{34} & \bar{k}_{35} & \bar{k}_{36} & \bar{M}_i \\
 \bar{k}_{41} & \bar{k}_{42} & \bar{k}_{43} & \bar{k}_{44} & \bar{k}_{45} & \bar{k}_{46} & \bar{T}_j \\
 \bar{k}_{51} & \bar{k}_{52} & \bar{k}_{53} & \bar{k}_{54} & \bar{k}_{55} & \bar{k}_{56} & \bar{N}_j \\
 \bar{k}_{61} & \bar{k}_{62} & \bar{k}_{63} & \bar{k}_{64} & \bar{k}_{65} & \bar{k}_{66} & \bar{M}_j
 \end{array}$$

Il generico coefficiente rappresenta, dunque, la caratteristica della corrispondente riga quando si assuma la componente di spostamento della corrispondente colonna pari all'unità e le altre componenti nulle: è, pertanto, possibile costruire la matrice $\left[\bar{k}^{(i,j)} \right]$ per colonne determinando le reazioni di incastro che si destano di volta in volta nelle sezioni i e j assumendo unitaria una componente di spostamento e nulle le altre.

Si procede, pertanto, alla costruzione della matrice $\left[\bar{k}^{(i,j)} \right]$ con riferimento ai principali casi di telai piani, assumendo le seguenti convenzioni:

- forze e traslazioni positive se equiverse agli assi;
- coppie e rotazioni positive se destrogire.

6.5.1 - TELAI PIANI COSTITUITI DA ASTE DI SEZIONE COSTANTE E MATERIALE OMOGENEO, CARICATI FLESSIONALMENTE

Per la condizione: $\bar{v}_i = 1$ e $\bar{w}_i = \bar{\phi}_i = \bar{v}_j = \bar{w}_j = \bar{\phi}_j = 0$

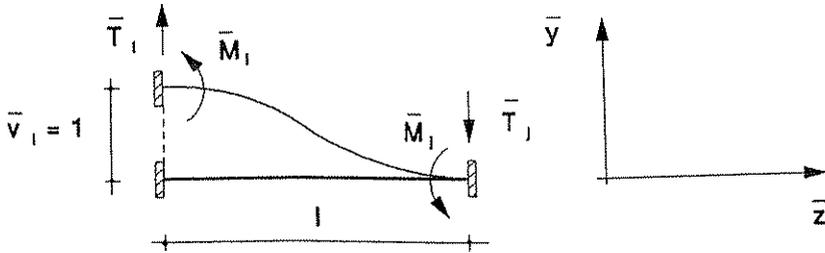


fig. 3.6

risulta:

$$\bar{T}_i = \bar{k}_{11} = + \frac{12EI}{l^3}$$

$$\bar{N}_i = \bar{k}_{21} = 0$$

$$\bar{M}_i = \bar{k}_{31} = - \frac{6EI}{l^2}$$

$$\bar{T}_j = \bar{k}_{41} = - \frac{12EI}{l^3}$$

$$\bar{N}_j = \bar{k}_{51} = 0$$

$$\bar{M}_j = \bar{k}_{61} = - \frac{6EI}{l^2}$$

Per la condizione: $\bar{w}_i = 1$ e $\bar{v}_i = \bar{\phi}_i = \bar{v}_j = \bar{w}_j = \bar{\phi}_j = 0$

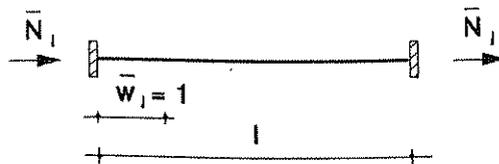


fig. 4.6

risulta:

$$\bar{T}_i = \bar{k}_{12} = 0$$

$$\bar{N}_i = \bar{k}_{22} = + \frac{EA}{l}$$

$$\bar{M}_i = \bar{k}_{32} = 0$$

$$\bar{T}_j = \bar{k}_{42} = 0$$

$$\bar{N}_j = \bar{k}_{52} = - \frac{EA}{l}$$

$$\bar{M}_j = \bar{k}_{62} = 0$$

Per la condizione: $\bar{\phi}_i = 1$ e $\bar{v}_i = \bar{w}_i = \bar{v}_j = \bar{w}_j = \bar{\phi}_j = 0$

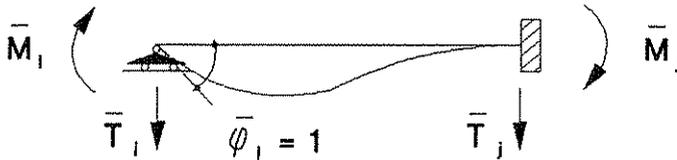


fig. 5.6

risulta:

$$\bar{T}_i = \bar{k}_{13} = - \frac{6EI}{l^2}$$

$$\bar{N}_i = \bar{k}_{23} = 0$$

$$\bar{M}_i = \bar{k}_{33} = + \frac{4EI}{l}$$

$$\bar{T}_j = \bar{k}_{43} = + \frac{6EI}{l^2}$$

$$\bar{N}_j = \bar{k}_{53} = 0$$

$$\bar{M}_j = \bar{k}_{63} = + \frac{2EI}{l}$$

Ed analogamente:

Per la condizione: $\bar{v}_j = 1$ e $\bar{v}_i = \bar{w}_i = \bar{\phi}_i = \bar{w}_j = \bar{\phi}_j = 0$ risulta:

$$\bar{T}_i = \bar{k}_{14} = -\frac{12EI}{l^3}$$

$$\bar{N}_i = \bar{k}_{24} = 0$$

$$\bar{M}_i = \bar{k}_{34} = +\frac{6EI}{l^2}$$

$$\bar{T}_j = \bar{k}_{44} = +\frac{12EI}{l^3}$$

$$\bar{N}_j = \bar{k}_{54} = 0$$

$$\bar{M}_j = \bar{k}_{64} = +\frac{6EI}{l^2}$$

Per la condizione: $\bar{w}_j = 1$ e $\bar{v}_i = \bar{w}_i = \bar{\phi}_i = \bar{v}_j = \bar{\phi}_j = 0$ risulta:

$$\bar{T}_i = \bar{k}_{15} = 0$$

$$\bar{N}_i = \bar{k}_{25} = -\frac{EA}{l}$$

$$\bar{M}_i = \bar{k}_{35} = 0$$

$$\bar{T}_j = \bar{k}_{45} = 0$$

$$\bar{N}_j = \bar{k}_{55} = +\frac{EA}{l}$$

$$\bar{M}_j = \bar{k}_{65} = 0$$

Per la condizione: $\bar{\phi}_j = 1$ e $\bar{v}_i = \bar{w}_i = \bar{\phi}_i = \bar{v}_j = \bar{w}_j = 0$ risulta:

$$\bar{T}_i = \bar{k}_{16} = -\frac{6EI}{l^2}$$

$$\bar{N}_i = \bar{k}_{26} = 0$$

$$\bar{M}_i = \bar{k}_{36} = +\frac{2EI}{l}$$

$$\bar{T}_j = \bar{k}_{46} = +\frac{6EI}{l^2}$$

$$\overline{N}_j = \overline{k}_{56} = 0$$

$$\overline{M}_j = \overline{k}_{66} = + \frac{4EI}{l}$$

La matrice di rigidità locale della generica asta si scrive, pertanto:

$$\left[\overline{k}^{(j)} \right] = \begin{bmatrix} + \frac{12EI}{l^3} & 0 & - \frac{6EI}{l^2} & - \frac{12EI}{l^3} & 0 & - \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & + \frac{EA}{l} & 0 & 0 & - \frac{EA}{l} & 0 \\ - \frac{6EI}{l^2} & 0 & + \frac{4EI}{l} & + \frac{6EI}{l^2} & 0 & + \frac{2EI}{l} \\ - \frac{12EI}{l^3} & 0 & + \frac{6EI}{l^2} & + \frac{12EI}{l^3} & 0 & + \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & - \frac{EA}{l} & 0 & 0 & + \frac{EA}{l} & 0 \\ - \frac{6EI}{l^2} & 0 & + \frac{2EI}{l} & + \frac{6EI}{l^2} & 0 & + \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

ovvero:

$$\left[\overline{k}^{(j)} \right] = \frac{EI}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} + 12 & 0 & - 6l & - 12 & 0 & - 6l \\ 0 & + \left(\frac{l}{\rho} \right)^2 & 0 & 0 & - \left(\frac{l}{\rho} \right)^2 & 0 \\ - 6l & 0 & + 4l^2 & + 6l & 0 & + 2l^2 \\ - 12 & 0 & + 6l & + 12 & 0 & + 6l \\ 0 & - \left(\frac{l}{\rho} \right)^2 & 0 & 0 & + \left(\frac{l}{\rho} \right)^2 & 0 \\ - 6l & 0 & + 2l^2 & + 6l & 0 & + 4l^2 \end{bmatrix}$$

avendo indicato con ρ il raggio d'inerzia della sezione.

Dal ch  risulta altresi:

$$\left[\overline{k}_{\alpha i} \right] = \frac{EI}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} +12 & 0 & -6l \\ 0 & +\left(\frac{l}{\rho}\right)^2 & 0 \\ -6l & 0 & +4l^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\overline{k}_{\beta j} \right] = \frac{EI}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} +12 & 0 & +6l \\ 0 & +\left(\frac{l}{\rho}\right)^2 & 0 \\ +6l & 0 & +4l^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\overline{k}_{\alpha j} \right] = \frac{EI}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} -12 & 0 & -6l \\ 0 & -\left(\frac{l}{\rho}\right)^2 & 0 \\ +6l & 0 & +2l^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\overline{k}_{\beta i} \right] = \frac{EI}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} -12 & 0 & +6l \\ 0 & -\left(\frac{l}{\rho}\right)^2 & 0 \\ -6l & 0 & +2l^2 \end{bmatrix}$$

Si pu  osservare come, nel caso trattato, la matrice di rigidit  dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche ed elastiche delle aste costituenti la struttura. Essa  , peraltro, costante al variare della condizione di carico flessionale.

**6.5.2 - TELAI PIANI COSTITUITI DA ASTE DI SEZIONE VARIABILE O
MATERIALE NON OMOGENEO, CARICATE FLESSIONALMENTE E/O
ASSIALMENTE**

La determinazione dei coefficienti di rigidezza viene condotta, in tale caso, con procedimento del tutto generale.

Si definiscono *coefficienti elastici* della generica trave di estremi i e j le quantità:



fig. 6.6

γ = componente di spostamento relativo assiale indotta dalla forza unitaria;

α_i = rotazione della sezione i indotta dalla coppia $m_i = 1$;

α_j = rotazione della sezione j indotta dalla coppia $m_j = 1$;

β = rotazione della sezione di estremità nella quale non è applicata la coppia unitaria;

La matrice di rigidezza locale della generica asta di estremi (i,j) può essere determinata imponendo condizioni di equilibrio e di congruenza.

Per semplicità di trattazione si opererà, in una prima fase, nell'ipotesi che le aste siano indeformabili estensionalmente: ciò comporta che essendo $w_i = w_j = 0$ la matrice di rigidezza si riduca alle dimensioni 4×4 ; in una seconda fase, rimossa tale ipotesi restrittiva, si perverrà alla matrice completa 6×6 .

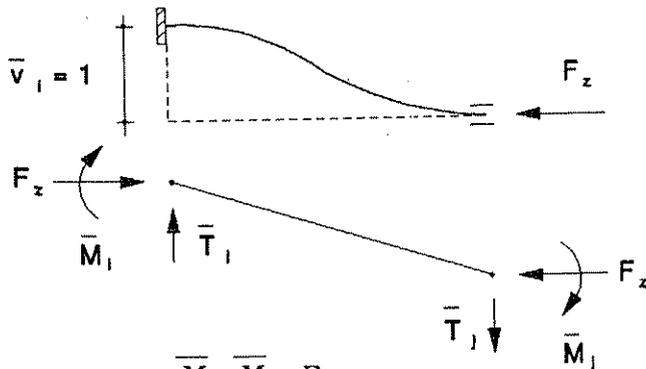
Determinazione dei coefficienti di rigidezza nell'ipotesi di indeformabilità assiale.

Per $\bar{v}_i = 1$ e $\bar{\phi}_i = \bar{v}_j = \bar{\phi}_j = 0$ risulta:

$$\text{equazioni di congruenza: } \frac{1}{l} + \bar{M}_i \cdot \alpha_i + \bar{M}_j \cdot \beta = 0$$

$$\frac{1}{l} + \bar{M}_i \cdot \beta + \bar{M}_j \cdot \alpha_j = 0$$

fig. 7.6



equazioni di equilibrio:
$$\bar{T}_i = -\frac{\bar{M}_i + \bar{M}_j}{l} - \frac{F_z}{l}$$

$$\bar{T}_j = +\frac{\bar{M}_i + \bar{M}_j}{l} + \frac{F_z}{l}$$

da cui:

$$\bar{T}_i = \bar{k}_{11} = +\frac{1}{l^2} \cdot \frac{\alpha_i + \alpha_j - 2\beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2} \cdot \frac{F_z}{l}$$

$$\bar{M}_i = \bar{k}_{31} = -\frac{1}{l} \cdot \frac{\alpha_j - \beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2}$$

$$\bar{T}_j = \bar{k}_{41} = -\frac{1}{l^2} \cdot \frac{\alpha_i + \alpha_j - 2\beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2} \cdot \frac{F_z}{l}$$

$$\bar{M}_j = \bar{k}_{61} = +\frac{1}{l} \cdot \frac{\alpha_i - \beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2}$$

Per $\bar{\phi}_i = 1$ e $\bar{v}_i = \bar{v}_j = \bar{\phi}_j = 0$ risulta:

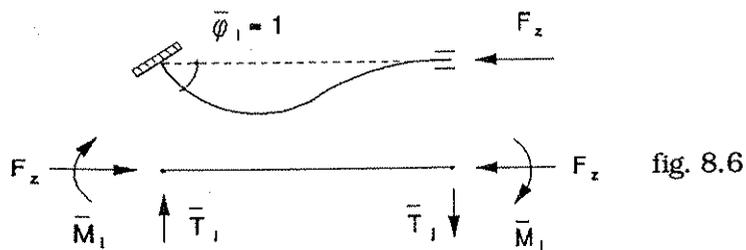


fig. 8.6

equazioni di congruenza: $\bar{M}_i \cdot \alpha_i + \bar{M}_j \cdot \beta = 1$

$$\bar{M}_i \cdot \beta + \bar{M}_j \cdot \alpha_j = 0$$

equazioni di equilibrio: $\bar{T}_i = -\frac{\bar{M}_i + \bar{M}_j}{l}$

$$\bar{T}_j = +\frac{\bar{M}_i + \bar{M}_j}{l}$$

e risolvendo il sistema:

$$\bar{T}_i = \bar{k}_{13} = -\frac{1}{l} \cdot \frac{\alpha_j - \beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2}$$

$$\bar{M}_i = \bar{k}_{33} = +\frac{\alpha_j}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2}$$

$$\bar{T}_j = \bar{k}_{43} = +\frac{1}{l} \cdot \frac{\alpha_j - \beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2}$$

$$\bar{M}_j = \bar{k}_{63} = +\frac{\beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2}$$

Per $\bar{v}_j = 1$ e $\bar{v}_i = \bar{\phi}_i = \bar{\phi}_j = 0$ risulta:

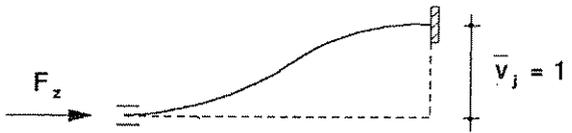
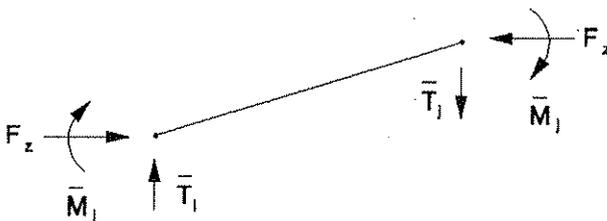


fig. 9.6



equazioni di congruenza: $-\frac{1}{l} + \bar{M}_i \cdot \alpha_i + \bar{M}_j \cdot \beta = 0$

$$-\frac{1}{l} + \bar{M}_i \cdot \beta + \bar{M}_j \cdot \alpha_j = 0$$

equazioni di equilibrio: $\bar{T}_i = -\frac{\bar{M}_i + \bar{M}_j}{l} + \frac{F_z}{l}$

$$\bar{T}_j = + \frac{\bar{M}_i + \bar{M}_j}{l} - \frac{F_z}{l}$$

da cui:

$$\bar{T}_i = \bar{k}_{14} = - \frac{1}{l^2} \cdot \frac{\alpha_i + \alpha_j - 2\beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2} + \frac{F}{l}$$

$$\bar{M}_i = \bar{k}_{34} = + \frac{1}{l} \cdot \frac{\alpha_j - \beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2}$$

$$\bar{T}_j = \bar{k}_{44} = + \frac{1}{l^2} \cdot \frac{\alpha_i + \alpha_j - 2\beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2} - \frac{F}{l}$$

$$\bar{M}_j = \bar{k}_{64} = + \frac{1}{l} \cdot \frac{\alpha_i - \beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2}$$

Per $\bar{\phi}_j = 1$ e $\bar{v}_i = \bar{\phi}_i = \bar{v}_j = 0$ risulta:

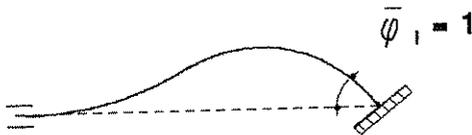


fig. 10.6

equazioni di congruenza: $\bar{M}_i \cdot \alpha_i + \bar{M}_j \cdot \beta = 0$

$$\bar{M}_i \cdot \beta + \bar{M}_j \cdot \alpha_j = 1$$

equazioni di equilibrio: $\bar{T}_i = - \frac{\bar{M}_i + \bar{M}_j}{l}$

$$\bar{T}_j = + \frac{\bar{M}_i + \bar{M}_j}{l}$$

da cui:

$$\bar{T}_i = \bar{k}_{16} = - \frac{1}{l} \cdot \frac{\alpha_i - \beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2}$$

$$\bar{M}_i = \bar{k}_{36} = + \frac{\beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2}$$

$$\overline{T}_j = \overline{k}_{46} = + \frac{1}{l} \cdot \frac{\alpha_i - \beta}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2}$$

$$\overline{M}_j = \overline{k}_{66} = + \frac{\alpha_i}{\alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2}$$

Nel caso, dunque, di *travi a sezione variabile o/e di materiale non omogeneo, indeformabili assialmente e sollecitate solo flessionalmente*, la matrice di rigidità locale della generica asta, con le posizioni:

$$\begin{aligned} \alpha_i - \beta &= a \\ \alpha_j - \beta &= b \\ \alpha_i + \alpha_j - 2\beta &= c \\ \alpha_i \cdot \alpha_j - \beta^2 &= d \end{aligned}$$

assume la forma:

$$\left[\overline{k}^{(i,j)} \right] = \frac{1}{l^2 \cdot d} \cdot \begin{bmatrix} +c & 0 & -l \cdot b & -c & 0 & -l \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l \cdot b & 0 & +l^2 \cdot \alpha_j & +l \cdot b & 0 & +l^2 \cdot \beta \\ -c & 0 & +l \cdot b & +c & 0 & +l \cdot a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l \cdot a & 0 & +l^2 \cdot \beta & +l \cdot a & 0 & +l^2 \cdot \alpha_i \end{bmatrix}$$

Ove si rimuova l'ipotesi di indeformabilità assiale, introducendo i termini classici della rigidità estensionale, risulta immediato definire la matrice completa:

$$\left[\overline{k}^{(i,j)} \right] = \frac{1}{l^2 \cdot d} \cdot \begin{bmatrix} +c & 0 & -l \cdot b & -c & 0 & -l \cdot a \\ 0 & +l^2 \cdot d/\gamma & 0 & 0 & -l^2 \cdot d/\gamma & 0 \\ -l \cdot b & 0 & +l^2 \cdot \alpha_j & +l \cdot b & 0 & +l^2 \cdot \beta \\ -c & 0 & +l \cdot b & +c & 0 & +l \cdot a \\ 0 & -l^2 \cdot d/\gamma & 0 & 0 & +l^2 \cdot d/\gamma & 0 \\ -l \cdot a & 0 & +l^2 \cdot \beta & +l \cdot a & 0 & +l^2 \cdot \alpha_i \end{bmatrix}$$

Anche in tale caso, si può verificare come la matrice di rigidezza dipenda dalle sole caratteristiche geometriche ed elastiche delle aste costituenti la struttura.

Nel caso particolare di *travi a sezione costante e materiale omogeneo, deformabili estensionalmente e sollecitate sia flessionalmente che assialmente* i coefficienti elastici assumono le espressioni:

$$\alpha_i = \alpha_j = \alpha = \frac{l}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \psi(u)$$

$$\beta = \frac{l}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \Phi(u)$$

essendo ψ e Φ i coefficienti di Timoshenko funzioni della forza assiale applicata tramite il parametro:

$$u = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{F_c}}$$

Sostituendo le espressioni di α e β in quelle dei coefficienti \bar{k}_{ij} si ottiene la matrice di rigidezza, dell'asta generica nel riferimento locale:

$$\begin{bmatrix} +\frac{12EI}{l^3} \cdot \frac{2\psi + \Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} - \frac{F}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \cdot \frac{2\psi + \Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} & -\frac{12EI}{l^3} \cdot \frac{2\psi + \Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} + \frac{F}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \cdot \frac{2\psi + \Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} \\ 0 & +\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} \cdot \frac{2\psi + \Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} & 0 & +\frac{4EI}{l} \cdot \frac{3\psi}{4\psi^2 - \Phi^2} & +\frac{6EI}{l^2} \cdot \frac{2\psi + \Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} & 0 & +\frac{2EI}{l} \cdot \frac{3\Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} \\ -\frac{12EI}{l^3} \cdot \frac{2\psi + \Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} + \frac{F}{l} & 0 & +\frac{6EI}{l^2} \cdot \frac{2\psi + \Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} & +\frac{12EI}{l^3} \cdot \frac{2\psi + \Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} - \frac{F}{l} & 0 & +\frac{6EI}{l^2} \cdot \frac{2\psi + \Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} \\ 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & +\frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} \cdot \frac{2\psi + \Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} & 0 & +\frac{2EI}{l} \cdot \frac{3\Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} & +\frac{6EI}{l^2} \cdot \frac{2\psi + \Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} & 0 & +\frac{4EI}{l} \cdot \frac{3\psi}{4\psi^2 - \Phi^2} \end{bmatrix}$$

e ponendo: $\frac{3\psi}{4\psi^2 - \Phi^2} = A$

$$\frac{3\Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} = B$$

$$\frac{2\psi + \Phi}{4\psi^2 - \Phi^2} = C$$

si può scrivere:

$$[\bar{k}^{(b)}] = \begin{bmatrix} +\frac{12EI}{l^3} \cdot C - \frac{F}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \cdot C & -\frac{12EI}{l^3} \cdot C + \frac{F}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} \cdot C \\ 0 & +\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} \cdot C & 0 & +\frac{4EI}{l} \cdot A & +\frac{6EI}{l^2} \cdot C & 0 & +\frac{2EI}{l} \cdot B \\ -\frac{12EI}{l^3} \cdot C + \frac{F}{l} & 0 & +\frac{6EI}{l^2} \cdot C & +\frac{12EI}{l^3} \cdot C - \frac{F}{l} & 0 & +\frac{6EI}{l^2} \cdot C \\ 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & +\frac{EA}{l} & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} \cdot C & 0 & +\frac{2EI}{l} \cdot B & +\frac{6EI}{l^2} \cdot C & 0 & +\frac{4EI}{l} \cdot A \end{bmatrix}$$

Volendo scindere l'influenza del carico assiale sulla rigidezza dell'asta dal cosiddetto *effetto P - Δ* si può scrivere altresì:

$$[\bar{k}^{(b)}] = \frac{EI}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} +12 \cdot C & 0 & -6l \cdot C & -12 \cdot C & 0 & -6l \cdot C \\ 0 & \left(\frac{l}{\rho}\right)^2 & 0 & 0 & \left(\frac{l}{\rho}\right)^2 & 0 \\ -6l \cdot C & 0 & +4l^2 \cdot A & +6l \cdot C & 0 & +2l^2 \cdot B \\ -12 \cdot C & 0 & +6l \cdot C & +12 \cdot C & 0 & +6l \cdot C \\ 0 & -\left(\frac{l}{\rho}\right)^2 & 0 & 0 & -\left(\frac{l}{\rho}\right)^2 & 0 \\ -6l \cdot C & 0 & 2l^2 \cdot B & +6l \cdot C & 0 & +4l^2 \cdot A \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{F}{l} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La prima delle due matrici si dice *elastica*, la seconda *geometrica*.

Confrontando il primo addendo al secondo membro con la matrice di rigidezza calcolata nel caso di sezione costante e assenza di carico assiale, si può notare come l'influenza dello sforzo normale si compendia nei coefficienti A,B,C; nel caso trattato, dunque, la matrice di rigidezza non dipende solamente dalle caratteristiche geometriche ed elastiche delle aste costituenti la struttura ma anche dal carico assiale applicato ad esse e dunque dalla condizione di carico.

Quando lo sforzo normale è molto lontano dal carico critico dell'asta i coefficienti A,B,C sono prossimi all'unità e, dunque, la matrice di rigidezza risulta pressochè indipendente da detto sforzo assiale ovvero costante al variare del carico. Ove lo sforzo normale applicato all'asta sia prossimo al carico critico la matrice elastica è fortemente influenzata dai coefficienti di Timoshenko e va determinata con procedimento iterativo. Ciò si può ottenere, ad esempio, determinando la prima volta la matrice [K] avendo trascurato completamente l'effetto dello sforzo assiale e, quindi, assumendo $A = B = C = 1$. Risolto, in tal modo, il telaio si perviene agli sforzi normali nelle aste e, da questi, a valori di prima approssimazioni dei coefficienti di Timoshenko. La nuova matrice di rigidezza, diversa dalla precedente, ma non ancora esatta consente una nuova determinazione degli sforzi normali nelle aste dai quali risalire ai coefficienti aggiornati.

Valori prossimi tra due successive iterazioni consentiranno di ottenere la vera matrice di rigidezza e di arrestare, quindi, il procedimento.

Nei casi in cui in un'asta si attinge il carico critico, questa va completamente eliminata nella determinazione della matrice di rigidezza globale.

6.6 - VERIFICHE

La procedura di calcolo innanzi illustrata tiene, dunque, conto sia dell'influenza dello sforzo normale sulla rigidezza flessionale delle aste che dell'effetto $P - \Delta$ dovuto all'eccentricità con la quale i carichi assiali risultano applicati alla struttura deformata.

Dato, allora, un telaio caricato in modo generico, ove si voglia tenere conto dell'effetto indotto dalla presenza degli sforzi assiali occorre operare secondo la procedura nel seguito indicata.

Detta p_{max} la condizione di carico più gravosa, si risolve la struttura pervenendo alle massime tensioni di esercizio che verranno indicate sinteticamente con t_{max} .

A questo punto se, come accade negli usuali problemi (lineari), esistesse proporzionalità fra carichi e spostamenti indicando con:

t_{amm} le tensioni ammissibili del materiale

t_u le tensioni ultime del materiale

γ il coefficiente di sicurezza

la condizione di esercizio:

$$t_{max} < t_{amm}$$

garantirebbe anche la condizione di collasso:

$$\gamma \cdot t_{max} < t_u$$

Poichè invece per le aste sollecitate sia flessionalmente che assialmente, come si è dimostrato in precedenza, non sussiste proporzionalità tra carichi e spostamenti, si dovrà eseguire anche la verifica al collasso per effetto delle azioni $\gamma \cdot p_{max}$.

Per evidenziare maggiormente il problema basta, ad esempio, tracciare il diagramma delle tensioni in funzione dei carichi esterni: l'andamento qualitativo è rappresentato in figura unitamente alla legge lineare che si otterrebbe trascurando lo sforzo assiale.

Si calcola, quindi, il telaio per la condizione di carico $\gamma \cdot p_{max}$ con procedimento identico a quello già adottato, verificando che sia soddisfatta la diseuguaglianza: $t(\gamma \cdot p_{max}) < t_u$.

Il rapporto t_D/t_C risulterà tanto maggiore dell'unità quanto più $\gamma \cdot p_{max}$ sarà vicino al carico limite.

In definitiva, dunque, le tensioni di lavoro in fase di esercizio dovranno essere limitate opportunamente al disotto di quelle ammissibili per tenere conto della non proporzionalità tra cause ed effetti.

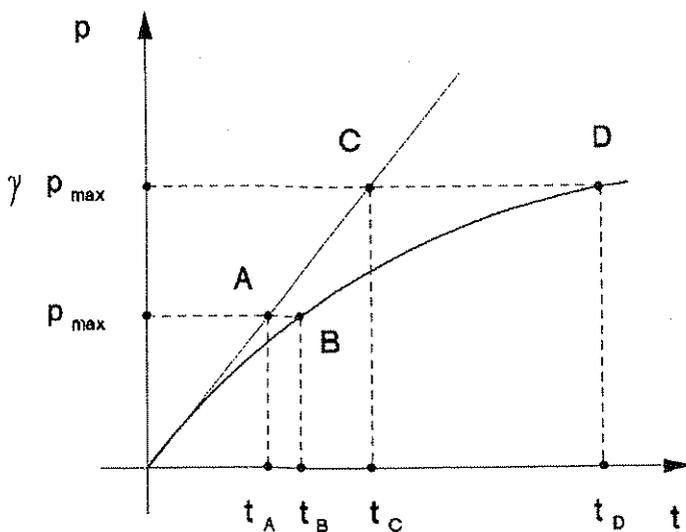


fig. 11.6

A conclusione della breve disamina condotta sui sistemi di travi è opportuno ricordare che il calcolo delle strutture intelaiate può egualmente essere condotto in via *manuale* mediante i classici metodi iterativi tipo *Cross* anche se questi, con l'inizio degli anni '60, hanno sempre più ceduto il passo ai procedimenti automatici. Ove si vogliono utilizzare ancora tali metodi, e ciò può risultare utile soprattutto nella fase di proporzionamento, occorre ricordare che per essi il raggiungimento dello stato critico coincide con il divergere del procedimento.

7 - LE STRUTTURE AD ARCO

7.1 - L'INSTABILITA' DI PRIMA SPECIE:

Il caso dell'arco circolare a due cerniere sollecitato radialmente.

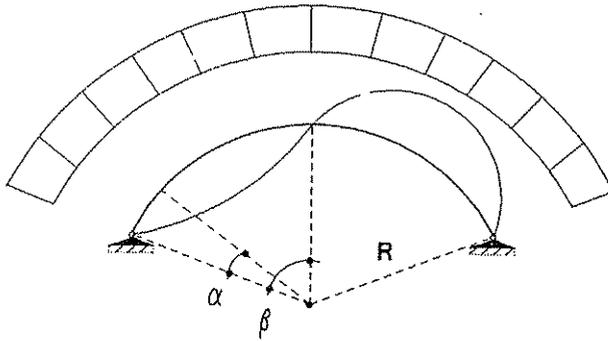


fig. 1.7

L'equazione che regge il problema è ancora quella valida per l'anello caricato radialmente:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2} + \frac{\bar{p} \cdot R^3}{E \cdot I} \cdot \varphi = 0$$

ovvero:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2} + K^2 \cdot \varphi = 0$$

avendo posto: $K^2 = \frac{\bar{p} \cdot R^3}{E \cdot I}$

La soluzione è del tipo:

$$\varphi(\alpha) = A \cdot \text{sen } K\alpha + B \cdot \text{cos } K\alpha$$

Le condizioni ai limiti porgono i valori delle costanti di integrazione (curvatura sulle sezioni di imposta e di chiave per la deformata emisimmetrica):

$$\varphi'(0) = 0 \text{ da cui: } A = 0$$

$$\varphi'(\beta) = 0 \text{ da cui: } B \cdot \text{sen } K\beta = 0$$

La seconda condizione deriva dal fatto, che per essere inestensionale, la deformata dell'arco deve presentare, sull'asse di simmetria, un punto di flesso nel quale il momento flettente è nullo.

La precedente equazione è soddisfatta oltre che per $A = 0$, corrispondente al caso di equilibrio fondamentale, anche per $K\beta = n\pi$ dalla quale si evince la relazione:

$$\frac{\bar{p} \cdot R^3}{E \cdot I} = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{\beta^2}$$

ovvero, per $n = 1$, il valore critico del carico:

$$p_c = \frac{E \cdot I}{R^3} \cdot \frac{\pi^2}{\beta^2}$$

7.2 - L'INSTABILITA' DI SECONDA SPECIE:

Il caso dell'arco funicolare a tre cerniere.

Viene trattato preventivamente il caso classico dell'arco ribassato a tre cerniere, sollecitato da un carico concentrato in chiave, caso che meglio di ogni altro chiarisce il fenomeno in argomento.

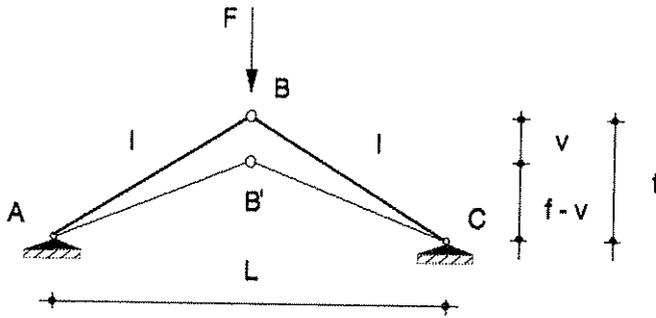


fig. 2.7

Supposto di vincolare la struttura in maniera da evitare l'instabilità euleriana, ovvero nell'ipotesi che il carico critico risulti maggiore del carico limite, l'instabilità può essere solamente di seconda specie. Per effetto delle azioni esterne, esemplificate nel caso in esame da una forza concentrata F , la sezione di chiave B si sposta in B' e, dunque, l'asta \overline{AB} di lunghezza l assume la lunghezza:

$$l + \Delta l = l \cdot (1 + \varepsilon)$$

Indicando con f la freccia e con L la luce dell'arco, per congruenza, dovrà risultare:

$$l^2 \cdot (1 - \varepsilon)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + (f - v)^2$$

dovendo essere $l^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + f^2$ si ha:

$$l^2 \cdot (2 \cdot \varepsilon + \varepsilon^2) = -2 \cdot f \cdot v + v^2$$

ovvero l'equazione:

$$\varepsilon^2 + 2 \cdot \varepsilon + \frac{2 \cdot f \cdot v - v^2}{l^2} = 0$$

la cui soluzione è:

$$\varepsilon = -1 + \sqrt{1 + \left[\frac{-2 \cdot f \cdot v + v^2}{l^2}\right]}$$

Ove si sviluppi in serie la funzione radice, essendo:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 + \dots$$

si ha:

$$\sqrt{1 + \left[\frac{-2 \cdot f \cdot v + v^2}{l^2} \right]} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-2 \cdot f \cdot v + v^2}{l^2} \right] - \frac{1}{8} \left[\frac{-2 \cdot f \cdot v + v^2}{l^2} \right]^2 + \dots$$

e limitandosi ai termini fino al secondo grado:

$$\sqrt{1 + \left[\frac{-2 \cdot f \cdot v + v^2}{l^2} \right]} = 1 - \frac{f \cdot v}{l^2} + \frac{v^2}{2 \cdot l^2} - \frac{1}{2} \frac{f^2 \cdot v^2}{l^4}$$

la ε assume l'espressione:

$$\varepsilon = -\frac{f}{l^2} \cdot v + \frac{1}{2 \cdot l^2} \cdot v^2 \cdot \left[1 - \frac{f^2}{l^2} \right]$$

Poiché gli archi per i quali può verificarsi l'instabilità di seconda specie sono solo quelli ribassati per i quali $\frac{f}{l} \ll 1$ si potrà scrivere:

$$\varepsilon = -\frac{f}{l^2} \cdot v + \frac{1}{2 \cdot l^2} \cdot v^2$$

ovvero, separando le quote di primo e di secondo grado:

$$\varepsilon^{(1)} = -\frac{f}{l^2} \cdot v$$

$$\varepsilon^{(2)} = +\frac{1}{2 \cdot l^2} \cdot v^2$$

Si determinano di seguito le diverse aliquote dell'EPT:

- Energia elastica di deformazione:

$$\begin{aligned} W &= 2 \cdot \int_v \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2 \cdot dV = E \cdot A \cdot \int_l \left(\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} \right)^2 \cdot dz = E \cdot A \cdot l \cdot \left(\varepsilon^{(1)2} + 2 \cdot \varepsilon^{(1)} \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(2)2} \right) = \\ &= \frac{E \cdot A}{l^3} \cdot \left(f^2 \cdot v^2 - f \cdot v^3 + \frac{1}{4} \cdot v^4 \right) \end{aligned}$$

da cui:

$$W^{(2)} = +\frac{E \cdot A}{l^3} \cdot f^2 \cdot v^2$$

$$W^{(3)} = -\frac{E \cdot A}{l^3} \cdot f \cdot v^3$$

$$W^{(4)} = +\frac{E \cdot A}{l^3} \cdot \frac{1}{4} \cdot v^4$$

- Energia dei carichi esterni:

$$U = U^{(1)} + U^{(2)} = -F \cdot v$$

- Energia potenziale totale:

Nel I ordine: $T = \frac{E \cdot A}{l^3} \cdot f^2 \cdot v^2 - F \cdot v$

Nel II ordine: $T = \frac{E \cdot A}{l^3} \cdot \left(f^2 \cdot v^2 - f \cdot v^3 + \frac{1}{4} \cdot v^4 \right) - F \cdot v$

In una teoria del *primo ordine*:

Condizione di equilibrio:

$$\frac{dT}{dv} = 2 \cdot \frac{E \cdot A}{l^3} \cdot f^2 \cdot v - F = 0$$

Condizione di stabilità:

$$\frac{d^2T}{dv^2} = 2 \cdot \frac{E \cdot A}{l^3} \cdot f^2$$

da cui si evince che l'equilibrio è sempre stabile per essere $\frac{d^2T}{dv^2} > 0$.

In una teoria del *secondo ordine*:

Condizione di equilibrio:

$$\frac{dT}{dv} = \frac{E \cdot A}{l^3} \left(2 \cdot f^2 \cdot v - 3 \cdot f \cdot v^2 + v^3 \right) - F = 0$$

Condizione di stabilità:

$$\frac{d^2T}{dv^2} = \frac{E \cdot A}{l^3} \cdot \left(2 \cdot f^2 - 6 \cdot f \cdot v + 3 \cdot v^2 \right)$$

da cui:

$$\frac{d^2T}{dv^2} > 0 \text{ per } 0 \leq v < 0,426f \quad (\text{stabilità})$$

$$\frac{d^2T}{dv^2} < 0 \text{ per } 0,426f < v < 1,574f \quad (\text{instabilità})$$

$$\frac{d^2T}{dv^2} < 0 \text{ per } 1,574f < v \leq \infty \quad (\text{stabilità})$$

Le leggi carico-spostamento desunte nel primo e nel secondo ordine sono diagrammate di seguito rispettivamente con linea tratteggiata e con linea continua:

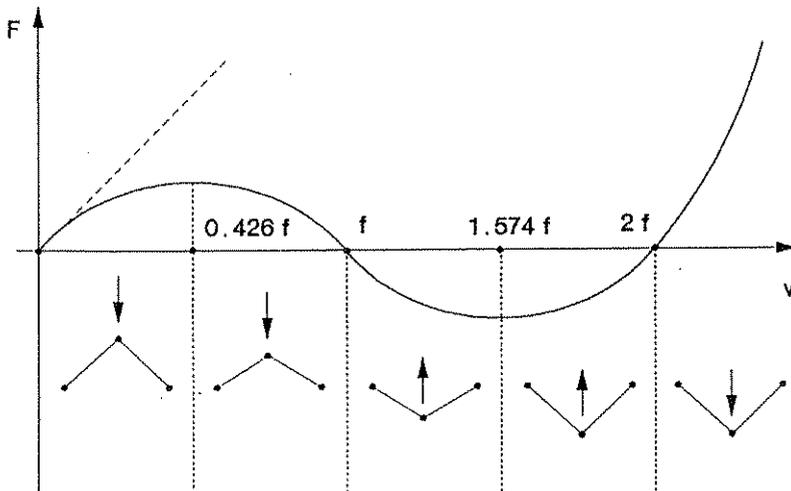


fig. 3.7

Nel caso in cui la cerniera di chiave sia elastica, con costante k , l'energia elastica di deformazione da essa esplicata vale:

$$W_c = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\phi^2$$

ed essendo per archi molto ribassati:

$$\Delta\phi = 2 \cdot \phi \approx 2 \cdot \frac{v}{l}$$

risulta:

$$W_c = \frac{2 \cdot k}{l^2} \cdot v^2$$

Aggiungendo tale termine all'energia totale risulta in tale caso:

$$\frac{d^2 T}{dv^2} = \frac{E \cdot A}{l^3} \cdot (3 \cdot v^2 - 6 \cdot v \cdot f + 2 \cdot f^2) + \frac{4 \cdot k}{l^2}$$

L'ascissa del punto di flesso si ha per: $\frac{d^3 T}{dv^3} = 0$ e vale: $v = f$.

Per esso risulta:

$$\frac{d^2 T}{dv^2} = -\frac{E \cdot A \cdot f^2}{l^3} + \frac{4 \cdot k}{l^2}$$

Poichè quando $\frac{d^2T}{dv^2} = 0$, ovvero, $k = \frac{E \cdot A \cdot f^2}{4 \cdot l}$ il flesso ha tangente orizzontale, risulta che:

$$\text{per: } \frac{4 \cdot k}{l^2} < \frac{E \cdot A \cdot f^2}{l^3} \quad \text{ovvero: } k < \frac{E \cdot A \cdot f^2}{4 \cdot l}$$

la struttura può presentare fenomeni di instabilità progressiva, mentre

$$\text{per: } \frac{4 \cdot k}{l^2} > \frac{E \cdot A \cdot f^2}{l^3} \quad \text{ovvero: } k > \frac{E \cdot A \cdot f^2}{4 \cdot l}$$

il sistema non può mai instabilizzarsi, essendo in equilibrio di seconda specie senza fase instabile.

7.3 - EFFETTO DEL RIBASSAMENTO OVVERO DELLA GEOMETRIA DELL'ASSE

Il valore del ribassamento, rapporto tra la luce L e la freccia f dell'arco, caratterizza in qualche modo l'equilibrio e la stabilità degli archi.

Per f/L *grande*, gli archi si dicono *rialzati*:

l'instabilità può essere solamente euleriana e la struttura può essere studiata in una teoria di secondo ordine linearizzata.

Per f/L *piccolo*, gli archi si dicono *ribassati*:

l'instabilità può essere di tipo euleriano o progressivo; il comportamento dell'arco deve essere, in tale ultimo caso, necessariamente studiato in una teoria completa del secondo ordine.

7.4 - EFFETTO DELL'AREA OVVERO DELLA GEOMETRIA DELLA SEZIONE

Coesistono sempre negli archi due stati di sollecitazione, uno assiale ed uno flessionale: a seconda delle caratteristiche geometriche possedute dalla struttura prevale ora uno ora l'altro regime tensionale facendo sì che il reale comportamento risulti compreso sempre tra quello di arco funicolare puro, nel quale i carichi vengono fronteggiati pressochè da soli sforzi normali, e quello di trave curva nella quale le sollecitazioni esterne sono sopportate, prevalentemente, per flessione. A caratterizzare di volta in volta il vero comportamento dell'arco si può assumere il rapporto ρ/f fra il raggio di inerzia della sezione trasversale e la freccia, essendo ρ espresso dalla relazione $\rho = \sqrt{I/A}$ con I momento di inerzia assiale ed A area della sezione. Ciò posto, le strutture per le quali tale rapporto è piccolo sono quelle che hanno piccola inerzia ma area o freccia elevata, e dunque scarsa deformabilità assiale, per cui la caratteristica di sforzo normale risulta prevalente rispetto a quella flessionale. Di contro gli archi dotati di grande inerzia ma piccola area o di piccola freccia, e cioè quelli con elevato rapporto ρ/f , presentano maggiore deformabilità assiale e, dunque, un comportamento più vicino a quello di trave in cui i carichi sono fronteggiati prevalentemente per flessione.

Gli archi si definiscono, pertanto, di *grande* o di *piccola area* a seconda che risulti piccolo o grande il valore assunto dal rapporto ρ/f ; al limite per $\rho/f \rightarrow 0$ il comportamento dell'arco è di *funicolare puro*, mentre per $\rho/f \rightarrow \infty$ l'arco si comporta come una *trave curva*.

E' importante a questo punto capire quale ruolo giochi il rapporto ρ/f sulla stabilità dell'arco.

Essendo gli *archi di grande area* caratterizzati da un regime di sforzi prevalentemente assiali, all'aumentare dei carichi e dunque degli spostamenti, si giunge ad un punto per cui il comportamento ad arco non è più possibile senza che sussista un regime flessionale: in tale condizione, caratterizzata dal valore limite del carico, la struttura si instabilizza disponendosi in una configurazione per la quale, all'ulteriore aumentare delle azioni esterne, l'equilibrio diviene di prima specie a stabilità crescente.

Nel caso, invece, di *archi a piccola area* il comportamento della struttura si avvicina a quello della trave curva per cui l'equilibrio è sempre stabile anzi, dopo una fase iniziale a stabilità decrescente, passa ad una forma di equilibrio a stabilità crescente: è questo il caso degli archi fortemente ribassati di piccola area il cui comportamento, prevalentemente flessionale, può dare luogo a deformazioni massime superiori alla monta per cui si può verificare uno scavalcamento graduale della corda senza alcuna instabilità, ovvero senza alcuna configurazione di equilibrio instabile.

In definitiva si può concludere che mentre gli archi di grande area sono sempre in equilibrio di seconda specie con fase instabile, quelli di piccola area sono in equilibrio di seconda specie senza fase instabile: il valore del rapporto ρ/f cui corrisponde il passaggio da un comportamento all'altro rappresenta l'elemento di separazione tra i campi delle grandi e delle piccole aree; tale elemento manca nel caso degli archi a tre cerniere data la loro impossibilità a comportarsi come travi, ciò che li pone sempre nelle condizioni di equilibrio di seconda specie con fase instabile.

E' importante controllare, infine, per gli archi di grande area che il carico limite risulti inferiore al carico critico affinché non si verifichi che, ancor prima del salto della corda, si abbia deviazione dell'equilibrio, ovvero che si verifichi l'instabilità euleriana ancor prima di giungere alle soglie della instabilità di seconda specie.

8 - LE STRUTTURE BIDIMENSIONALI

8.1 - INSTABILITA' DELLE LASTRE PIANE

Tali strutture, se sollecitate nel loro piano medio da forze normali di compressione o tangenziali, possono presentare fenomeni di instabilità Euleriana che si manifestano con ingobbamenti ortogonali al piano della lastra, comunemente detti *imbozzamenti*.

Il comportamento post-critico è, in genere, stabile.

8.1.1 - LE LASTRE SOTTILI SEMPLICEMENTE APPOGGIATE LUNGO I LATI E CARICATE IN UNA SOLA DIREZIONE

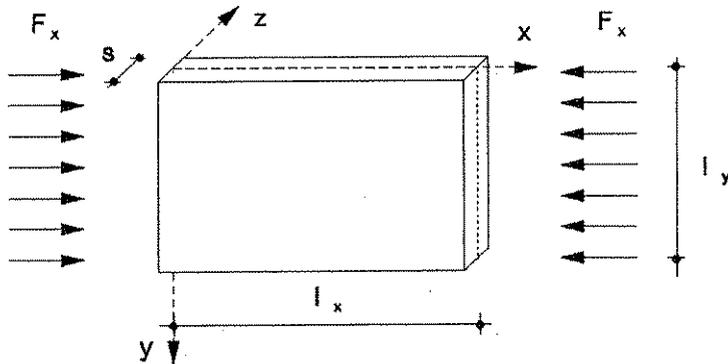


fig. 1.8

Nel seguito si determinano le diverse aliquote energetiche indicando con:

F_x	il carico assiale uniforme
M_x ed M_y	i momenti flettenti
M_{xy} ed M_{yx}	i momenti torcenti

espressi per unità di lunghezza.

Energia di deformazione flessionale.

Essendo $M_x \cdot dy$ il momento flettente applicato all'elemento di lunghezza dy e larghezza dx , ed essendo $d\varphi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot dx$ la rotazione flessionale relativa fra due sezioni a distanza dx , l'energia di deformazione elementare si scrive:

$$d\Phi_{M_x} = \frac{1}{2} \cdot M_x \cdot dy \cdot \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot dx \right) = -\frac{1}{2} \cdot M_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot dx \cdot dy$$

e ricordando che:

$$M_x = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

con: $D = \frac{E \cdot s^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$ rigidità flessionale della piastra risulta:

$$d\Phi_{M_x} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot dx \cdot dy$$

Analogamente:

$$d\Phi_{M_y} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cdot dx \cdot dy$$

L'energia di deformazione flessionale totale assume, pertanto, la forma:

$$\Phi_F = \Phi_{M_x} + \Phi_{M_y} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \int_{lx} \int_{ly} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \cdot \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \cdot dx \cdot dy$$

Energia di deformazione torsionale.

Essendo il momento torcente applicato ad un elemento di lunghezza dy e larghezza dx pari a $M_{xy} \cdot dy$ ed essendo la rotazione torsionale fra due sezioni a distanza dx pari a:

$$d\theta = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \cdot dx$$

l'energia di deformazione torsionale elementare vale:

$$d\Phi_{M_{xy}} = \frac{1}{2} \cdot M_{xy} \cdot dy \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \cdot dx$$

ed essendo:

$$M_{xy} = D \cdot (1 - \nu) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

risulta:

$$d\Phi_{M_{xy}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (1 - \nu) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \cdot dx \cdot dy$$

Analogamente:

$$d\Phi_{M_{yx}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (1 - \nu) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \cdot dx \cdot dy$$

L'energia di deformazione totale da torsione si scrive pertanto:

$$\Phi_T = D \cdot (1 - \nu) \cdot \int_{l_x} \int_{l_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \cdot dx \cdot dy$$

Non sussistendo lavoro mutuo tra flessione e torsione, e trascurando l'energia di deformazione dovuta alle forze taglianti, l'energia totale di deformazione assume l'espressione:

$$\Phi = \Phi_F + \Phi_T = \frac{1}{2} D \cdot \int_{l_x} \int_{l_y} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \cdot \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \cdot dx \cdot dy$$

ovvero sommando il termine nullo:

$$+ 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

la forma equivalente:

$$\Phi = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \int_{l_x} \int_{l_y} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} \cdot dx \cdot dy$$

Il lavoro $L_\sigma^{(2)}$ vale nel caso in esame:

$$L_\sigma^{(2)} = \int_V \sigma \cdot \varepsilon^{(2)} \cdot dV = -\frac{1}{2} \int_{l_x} \int_{l_y} \frac{\overline{F_x}}{s} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \cdot dx \cdot dy \cdot s$$

A questo punto, nota l'energia locale, si potrebbe risolvere il problema minimizzando tale espressione mediante gli operatori di Eulero nella forma applicabile alle funzioni di due variabili.

Si preferisce invece, nel caso in esame, procedere diversamente supponendo nota la funzione deformazione della lastra w che può porsi nella forma^(*):

$$w = a \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{l_x} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{l_y}$$

^(*) Tale funzione soddisfa sia l'equazione che le condizioni ai limiti. I parametri m ed n rappresentano il numero di semionde che si verificano nelle direzioni x ed y quando si manifesta l'instabilità.

e sostituendo si ha:

$$\begin{aligned}
 L = \Phi + L_v^{(2)} = & \frac{1}{2} \cdot \alpha^2 \cdot \left\{ D \cdot \left[\left(\frac{m \cdot \pi}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{l_y} \right)^2 \right]^2 \cdot \int_{l_x} \text{sen}^2 \frac{m \cdot \pi \cdot x}{l_x} \cdot dx \cdot \int_{l_y} \text{sen}^2 \frac{n \cdot \pi \cdot y}{l_y} \cdot dy \right. \\
 & - 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \left[\left(\frac{m \cdot \pi}{l_x} \right)^2 \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{l_y} \right)^2 \cdot \int_{l_x} \text{sen}^2 \frac{m \cdot \pi \cdot x}{l_x} \cdot dx \cdot \int_{l_y} \text{sen}^2 \frac{n \cdot \pi \cdot y}{l_y} \cdot dy + \right. \\
 & \left. \left. - \left(\frac{m \cdot \pi}{l_x} \right)^2 \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{l_y} \right)^2 \cdot \int_{l_x} \cos^2 \frac{m \cdot \pi \cdot x}{l_x} \cdot dx \cdot \int_{l_y} \text{sen}^2 \frac{n \cdot \pi \cdot y}{l_y} \cdot dy \right] \right\} + \\
 & \left. - \overline{F_x} \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{l_x} \right)^2 \cdot \int_{l_x} \cos^2 \frac{m \cdot \pi \cdot x}{l_x} \cdot dx \cdot \int_{l_y} \text{sen}^2 \frac{n \cdot \pi \cdot y}{l_y} \cdot dy \right)
 \end{aligned}$$

Sviluppando gli integrali delle funzioni armoniche risulta:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \alpha^2 \cdot \left\{ D \cdot \pi^4 \cdot \left[\left(\frac{m}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{l_y} \right)^2 \right]^2 \cdot \frac{l_x \cdot l_y}{4} - \overline{F_x} \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{l_x} \right)^2 \cdot \frac{l_x \cdot l_y}{4} \right\}$$

e minimizzando rispetto al parametro α si ottiene:

$$D \cdot \pi^2 \cdot \left[\left(\frac{m}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{l_y} \right)^2 \right]^2 = \overline{F_x} \cdot \left(\frac{m}{l_x} \right)^2$$

da cui:

$$\overline{F_x} = D \cdot \pi^2 \cdot \frac{\left[\left(\frac{m}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{l_y} \right)^2 \right]^2}{\left(\frac{m}{l_x} \right)^2}$$

In tale caso non sussiste dubbio alcuno che il minimo valore di $\overline{F_x}$ si verifichi per $n = 1$ atteso che n compare solo al numeratore.

Sarà, dunque:

$$\overline{F_x} = D \cdot \pi^2 \cdot l_x^2 \cdot \left[\frac{m^2}{l_x^4} + \frac{m^2}{l_y^4} + \frac{2}{l_x^2 \cdot l_y^2} \right]$$

Minimizzando rispetto ad m si ha:

$$\frac{\partial \overline{F_x}}{\partial m} = D \cdot \pi^2 \cdot l_x^2 \cdot \left[\frac{2 \cdot m_c}{l_x^4} - \frac{2 \cdot m_c^{-3}}{l_y^4} \right] = 0$$

da cui:
$$\frac{m_c}{l_x^4} - \frac{1}{m_c^3 \cdot l_y^4} = 0$$

ovvero:
$$m_c = \sqrt[4]{\frac{l_x^4}{l_y^4}} = \frac{l_x}{l_y}$$

Tale è, dunque, il numero di semionde che corrisponde al carico critico:

$$F_{cx} = D \cdot \pi^2 \cdot l_x^2 \cdot \left[\frac{l_x^2}{l_y^2} \cdot l_x^4 + \frac{l_y^2}{l_x^2 \cdot l_y^4} + \frac{2}{l_x^2 \cdot l_y^2} \right]$$

ovvero:
$$F_{cx} = 4 \cdot \frac{D \cdot \pi^2}{l_y^2}$$

Ciò è vero se m è un numero intero: in tale caso l'imbozzamento avviene con m campi quadrati di lato $l_x/m = l_y$.

Qualora $m = l_x/l_y$ non sia un numero intero, scrivendo l'espressione del carico critico nella forma: $F_{cx} = \gamma \cdot \frac{\pi^2 \cdot D}{l_y^2}$ è possibile determinare il valore assunto da γ al variare del rapporto l_x/l_y .

Dall'esame di tale funzione risulta che

- per valori $l_x/l_y < 1$, il carico critico cresce notevolmente;
- per valori $l_x/l_y > 1$, come carico critico si può assumere quello calcolato per $m = l_x/l_y = 1$ e ciò è tanto più vero quanto più è grande il rapporto fra i lati.

Il caso esaminato è applicabile, ad esempio, allo studio della instabilità locale di un tubo a sezione rettangolare uniformemente compresso sui bordi estremi: le configurazioni deviate sono, infatti, tali che le singole lastre si possano considerare incernierate lungo gli spigoli. La stessa condizione si verifica se le lastre sono collegate da profilati di trascurabile rigidezza torsionale.

8.2 - STRUTTURE A GUSCIO

Sono molto diffuse nelle più varie branche dell'ingegneria, comprendendo cupole, serbatoi, torri di raffreddamento, contenitori, recipienti e tubi in pressione, cisterne di stoccaggio, piattaforme off-shore, carrozzerie e gusci di autoveicoli, navi, aerei, missili e strutture spaziali.

A fronte delle loro straordinarie prestazioni presentano grossi problemi di progettazione il primo dei quali è il pericolo di instabilità dovuto al fatto che tali strutture sono estremamente sensibili alle imperfezioni: tali imperfezioni sono certamente maggiori nell'ingegneria civile che in quella industriale (aeronautica in particolare) ma è pur vero che nella prima gli spessori delle pareti sono maggiori che nelle seconde per cui nelle prime domina il comportamento elasto-plastico e nelle seconde quello elastico.

Le strutture a doppia curvatura non sono, in generale, soggette a fenomeni di instabilità, verificandosi per esse prima la rottura; il contrario, spesso, avviene per le strutture a semplice curvatura.

8.3 - I CILINDRI SOTTILI COMPRESI ASSIALMENTE

Si consideri un cilindro sottile di materiale omogeneo, vincolato alle estremità da carrelli continui radiali e caricato uniformemente.

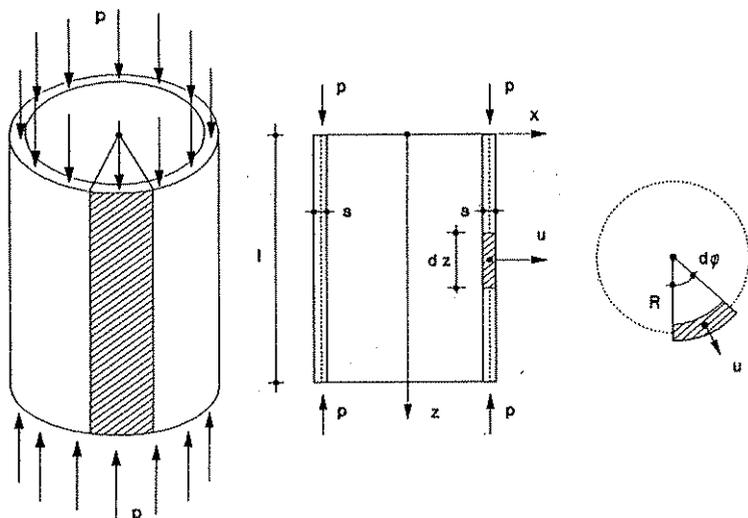


fig. 2.8

Supponendo di discretizzare la struttura con strisce longitudinali e anelli trasversali elementari, nell'ipotesi di trascurare la componente di spostamento che definisce l'equilibrio fondamentale, l'energia elastica relativa alle configurazioni di biforcazione comprende sia le quote dovute alla deformazione flessionale Φ_F delle strisce elementari longitudinali che quelle legate alla deformazione estensionale Φ_E degli anelli elementari trasversali.

Indicando la rigidezza flessionale con: $D = E \cdot s^3 / 12 \cdot (1 - \nu^2)$ si ha che l'Energia elastica flessionale vale:

$$\Phi_F = \frac{1}{2} \cdot \int_l \int_c D \cdot dc \cdot u'^2 \cdot dz$$

da cui:

$$\Phi_F = \frac{1}{2} \cdot \int_l \int_0^{2\pi} D \cdot u'^2 \cdot R \cdot d\phi \cdot dz = \pi \cdot \int_l D \cdot R \cdot u'^2 \cdot dz$$

L'Energia elastica estensionale si scrive:

$$\Phi_E = \frac{1}{2} \cdot \int_v E \cdot \epsilon^2 \cdot dV$$

ed essendo: $\varepsilon = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R+u) - 2 \cdot \pi \cdot R}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{u}{R}$

si ha:

$$\Phi_E = \frac{1}{2} \cdot \int_A \int_l E \cdot \frac{u^2}{R^2} \cdot dA \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_l E \cdot \frac{u^2}{R^2} \cdot s \cdot R \cdot d\varphi \cdot dz = \int_l \frac{\pi \cdot E \cdot s}{R} \cdot u^2 \cdot dz$$

Il Lavoro delle tensioni per le deformazioni del second'ordine vale, invece, avendo indicato con p il carico assiale ripartito per unità di lunghezza della sezione:

$$\begin{aligned} L_{\sigma}^{(2)} &= - \int_A \int_l \frac{\bar{p}}{s} \cdot \frac{1}{2} \cdot u^2 \cdot dA \cdot dz = - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_l \frac{\bar{p}}{s} \cdot u^2 \cdot s \cdot R \cdot d\varphi \cdot dz = \\ &= - \int_l \pi \cdot \bar{p} \cdot R \cdot u^2 \cdot dz \end{aligned}$$

L'Energia totale assume la forma:

$$L = \int_l \left(\pi \cdot D \cdot R \cdot u'^2 + \frac{\pi \cdot E \cdot s}{R} \cdot u^2 - \pi \cdot \bar{p} \cdot R \cdot u^2 \right) \cdot dz$$

Minimizzando tale espressione, tramite l'operatore di Eulero, si ottiene l'equazione di equilibrio:

$$\frac{d^2}{dz^2} (D \cdot u'') + \frac{d}{dz} (\bar{p} \cdot u') + \frac{E \cdot s}{R^2} \cdot \tilde{u} = 0$$

Nel caso di s e p costanti tale equazione assume la forma:

$$u'''' + \bar{p} \cdot u'' + \left[\frac{E \cdot s}{R^2} \right] \cdot u = 0$$

e ponendo:

$$\beta = \frac{E \cdot s}{R^2}$$

si può scrivere:

$$D \cdot u'''' + \bar{p} \cdot u'' + \beta \cdot u = 0$$

Assumendo per lo spostamento radiale u la forma:

$$u = a \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot z}{l}$$

derivando tale espressione e sostituendo nella equazione differenziale risulta:

$$D \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{l} \right)^4 \cdot a \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot z}{l} - \bar{p} \left(\frac{n \cdot \pi}{l} \right)^2 \cdot a \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot z}{l} + \beta \cdot a \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot z}{l} = 0$$

ovvero:

$$a \cdot \operatorname{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot z}{l} \cdot \left[D \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{l} \right)^4 - \bar{p} \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{l} \right)^2 + \beta \right] = 0$$

da cui:

$$\bar{p} = D \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2} + \beta \cdot \frac{l^2}{n^2 \cdot \pi^2}$$

Di tutti gli autovalori rappresentati dalla precedente espressione quello di interesse, si ottiene minimizzando rispetto al parametro n :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = \frac{D \cdot \pi^2}{l^2} \cdot 2 \cdot n - \beta \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \frac{2}{n} = 0$$

da cui:

$$n_c = \pm \frac{l}{\pi} \cdot \sqrt[4]{\frac{\beta}{D}}$$

Tale valore sostituito nell'espressione di \bar{p} fornisce il carico critico:

$$p_c = D \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \sqrt{\frac{\beta}{D}} + \beta \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \sqrt{\frac{D}{\beta}}$$

da cui:

$$p_c = 2 \cdot \sqrt{\beta \cdot D} = \frac{E \cdot s^2}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 \cdot (1 - \nu^2)}}$$

La tensione normale critica vale dunque:

$$\sigma_c = \frac{E \cdot s}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 \cdot (1 - \nu^2)}}$$

La lunghezza della semionda naturale corrispondente al carico critico p_c , essendo:

$$\lambda_c = \frac{l}{n_c}$$

assume l'espressione:

$$\lambda_c = \pi \cdot \sqrt[4]{\frac{D}{\beta}} = \pi \cdot \sqrt[4]{\frac{s^2 \cdot R^2}{12 \cdot (1 - \nu^2)}}$$

(*) Agli stessi risultati si può pervenire, in via breve, considerando le generatrici elementari come travi elastiche su anelli elastici, ed utilizzando i risultati già dedotti per le travi su suolo elastico.

Se, ad esempio, la struttura è realizzata in acciaio, assumendo $\nu = 0,3$ ed $E = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa}$ risulta:

$$p_c = 1,27 \cdot 10^5 \cdot \frac{s^2}{R} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\sigma_c = 1,27 \cdot 10^5 \cdot \frac{s}{R} \text{ MPa}$$

$$\lambda_c = 1,73 \cdot \sqrt{s \cdot R}$$

Poichè, inoltre, le formule ricavate sono valide nell'ambito del limite di proporzionalità delle tensioni, assumendo questa pari alla tensione di snervamento f_y , risulterà:

$$\sigma_c = f_y = 1,27 \times 10^5 \frac{s}{R}$$

Le espressioni trovate, dunque, sono ancora valide nel caso in cui sia:

$$\frac{R}{s} > 540 \text{ per acciaio Fe 360}$$

$$\frac{R}{s} > 379 \text{ per acciaio Fe 510}$$

ovvero in campo non proporzionale, purchè si adotti in luogo di E il modulo di elasticità ridotto E_r .

Il valore del carico critico così determinato è vero solo se la lunghezza del cilindro è un multiplo di λ ovvero se n è un numero intero. Vale al riguardo il discorso già fatto per travi su suolo elastico e lastre. Il comportamento post-critico è generalmente instabile.

Se la lunghezza del cilindro è notevolmente maggiore del raggio, la struttura si comporta come asta compressa ed il suo carico critico è quello euleriano:

$$p_c = \frac{F_c}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

ed essendo per la sezione anulare:

$$I = R^3 \cdot s \cdot \pi$$

risulta:

$$p_c = \frac{\pi^2 \cdot E}{2 \cdot l^2} \cdot R^2 \cdot s$$

8.4 - L'INSTABILITA' DELLE STRUTTURE IN PARETE SOTTILE SOLLECITATE FLESSIONALMENTE

Per la trattazione di tale fenomeno caratteristico delle strutture in parete sottile inflesse quali tubi, volte cilindriche o scatolari, tegoloni di copertura, si formula l'ipotesi che la deformazione della struttura non provochi alcuna variazione di lunghezza della linea media della sezione: tale assunto rispecchia la circostanza che l'energia di deformazione da estensione risulta molto maggiore della corrispondente aliquota da flessione per cui l'instabilità si origina per deformazioni flessionali in assenza di estensione. Emblematico al riguardo è il comportamento dei tubi caricati trasversalmente la cui sezione tende ad ovalizzarsi mantenendo immutata la lunghezza del perimetro o ancora, nel campo dell'instabilità euleriana, il caso degli archi rialzati per i quali la deviazione dell'equilibrio si manifesta con deformate asimmetriche che consentono di ritenere immutata la lunghezza dell'asse.

Nell'ambito di tali strutture, viene esaminato di seguito il solo caso del *tubo sottile a direttrice circolare caricato trasversalmente* fermo, restando che il genere di trattazione rimane identico anche per le altre tipologie strutturali.

Per comprendere come la deformazione principale induca una variazione di forma si osservi che, ove il tubo sia inflesso, le due sezioni del generico concio subiscono una rotazione relativa a seguito della quale le tensioni normali, prima allineate, presentano anch'esse una variazione angolare.

Si originano, dunque, componenti di tensioni dirette verso il baricentro del concio che tendono a produrre deformazioni dello stesso: ora, mentre nel caso di profili compatti, o anulari con grossi spessori, l'effetto è del tutto trascurabile

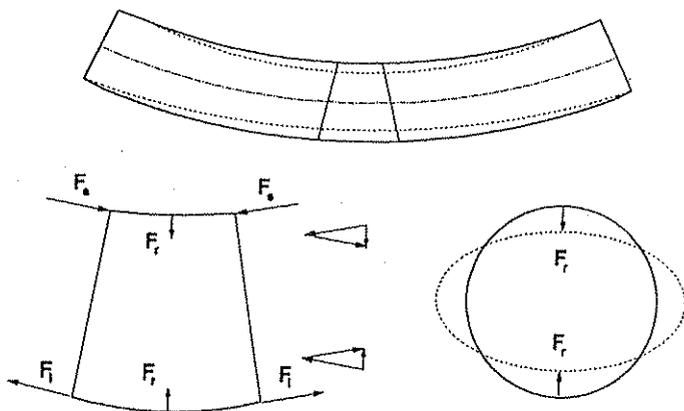


fig. 3.8

(rendendo così lecita l'adozione di teorie lineari), ove le sezioni risultino diffuse, ovvero in parete sottile, il detto stato tensionale induce variazioni della forma e dunque dell'inerzia.

- Detti: R il raggio della sezione;
 l la lunghezza del tubo;
 s lo spessore della parete;
 c l'ascissa curvilinea della sezione;
 δ la componente verticale di spostamento, secondo l'asse y , del baricentro della sezione;
 x, y, z la consueta terna di riferimento generale del tubo riguardato come trave;
 η, ξ gli assi di una terna locale di riferimento con origine in un punto della linea media della sezione;
 u, w le componenti di spostamento nel riferimento η, ξ dei punti della linea media della sezione;

si può procedere all'analisi della deformazione sia trasversale che longitudinale della struttura.

Per quanto riguarda il primo studio è possibile utilizzare integralmente i risultati preliminari conseguiti nell'analisi delle travi anulari compresse uniformemente cosicchè si può assumere per la curvatura trasversale dell'elemento di lunghezza dc l'espressione:

$$\chi_t = \frac{1}{R^2} \cdot \left(v + \frac{d^2 v}{d\alpha^2} \right)$$

Ipotizzando per la deformata trasversale del tubo una variazione con l'ascissa curvilinea c , e dunque con α , del tipo: $v(z) = -v_0 \cdot \cos 2\alpha$

la curvatura trasversale assume la forma:

$$\chi_t = \frac{1}{R^2} \cdot (-v_0 \cdot \cos 2\alpha + 4 \cdot v_0 \cdot \cos 2\alpha) = \frac{3 \cdot v_0}{R^2} \cdot \cos 2\alpha$$

L'energia elastica elementare di deformazione flessionale per un anello di sezione trasversale avente lunghezza dz vale allora:

$$dW_t = \left[\int_c \frac{1}{2} \cdot D \cdot dc \cdot \chi_t^2 \right] \cdot dz = \left[\frac{1}{2} \cdot D \cdot \int_0^{2\pi} 9 \cdot \frac{v_0^2}{R^4} \cdot \cos^2 2\alpha \cdot F \cdot dc \right] \cdot dz = \left[\frac{9}{2} \cdot D \cdot \frac{v_0^2}{R^3} \cdot \pi \right] \cdot dz$$

Assumendo a questo punto che la deformata trasversale vari lungo l'asse longitudinale z del tubo con la legge:

$$v_o = v_m \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot z}{l}$$

l'energia elastica di deformazione trasversale relativa all'intero tubo si scrive in definitiva:

$$W_t = \frac{9}{2} \cdot \pi \cdot D \cdot \frac{v_m^2}{R^3} \cdot \int_l \text{sen}^2 \frac{\pi \cdot z}{l} \cdot dz = \frac{9}{4} \cdot \pi \cdot D \cdot \frac{l \cdot v_m^2}{R^3}$$

Si procede, quindi, alla determinazione del momento d'inerzia per la sezione trasversale deformata.

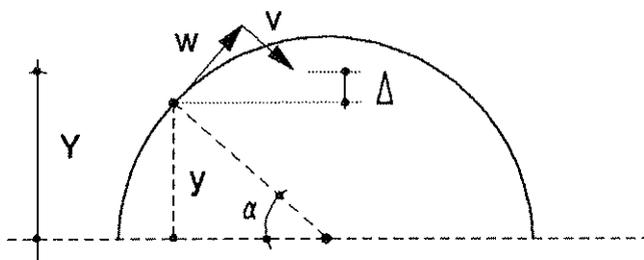


fig. 4.8

Per effetto delle componenti di deformazione:

$$v = -v_o \cdot \cos 2\alpha$$

$$w = \int v \cdot d\alpha = -v_o \cdot \int \cos 2\alpha \cdot d\alpha = -\frac{1}{2} \cdot v_o \cdot \int \cos 2\alpha \cdot d(2\alpha) = -\frac{1}{2} \cdot v_o \cdot \text{sen} 2\alpha$$

risulta:

$$\begin{aligned} \Delta &= w \cdot \cos \alpha - v \cdot \text{sen} \alpha = -\frac{1}{2} \cdot v_o \cdot \text{sen} 2\alpha \cdot \cos \alpha + v_o \cdot \cos 2\alpha \cdot \text{sen} \alpha = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot v_o \cdot 2 \text{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha + v_o \cdot \cos^2 \alpha \cdot \text{sen} \alpha - v_o \cdot \text{sen}^3 \alpha = v_o \cdot \text{sen}^3 \alpha \end{aligned}$$

e, dunque, l'ordinata dell'elemento dA , a deformazione avvenuta, avrà assunto il valore:

$$Y = y + \Delta = R \cdot \text{sen} \alpha - v_o \cdot \text{sen}^3 \alpha$$

Pertanto, il momento d'inerzia della *sezione deformata* di spessore s vale:

$$\begin{aligned}
 I_{YY} &= \int_A Y^2 \cdot dA = \int_0^{2\pi} Y^2 \cdot s \cdot R \cdot d\alpha = R^3 \cdot s \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \alpha \cdot d\alpha + \\
 &- 2 \cdot R^2 \cdot s \cdot v_o \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen}^4 \alpha \cdot d\alpha + R \cdot s \cdot v_o^2 \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen}^6 \alpha \cdot d\alpha = \\
 &= R^3 \cdot s \cdot \pi - 2R^2 \cdot s \cdot v_o \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi + R \cdot s \cdot v_o^2 \cdot \frac{5}{8} \cdot \pi
 \end{aligned}$$

e ricordando che si è posto:

$$v_o = v_m \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot z}{l}$$

$$I_{YY} = R^3 \cdot s \cdot \pi - \frac{3}{2} \cdot R^2 \cdot s \cdot \pi \cdot v_m \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot z}{l} + \frac{5}{8} \cdot R \cdot s \cdot \pi \cdot v_m^2 \cdot \text{sen}^2 \frac{\pi \cdot z}{l}$$

ove il primo termine al secondo membro rappresenta il momento d'inerzia della sezione indeformata. In definitiva:

$$I_{YY} = R \cdot s \cdot \pi \cdot \left(R^2 - \frac{3}{2} \cdot R \cdot v_m \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot z}{l} + \frac{5}{8} \cdot v_m^2 \cdot \text{sen}^2 \frac{\pi \cdot z}{l} \right)$$

Considerando il tubo vincolato da semplici appoggi alle estremità e sollecitato da un carico trasversale, è possibile ipotizzare una deformata longitudinale del tipo:

$$\delta = \delta_m \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot z}{l}$$

per cui essendo:

$$\delta'' = -\frac{M}{E \cdot I_{YY}} = -\chi_l$$

la curvatura longitudinale vale:

$$-\chi_l = -\delta'' = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \delta_m \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot z}{l}$$

L'energia di deformazione flessionale longitudinale si scrive pertanto:

$$W_l = \frac{1}{2} \cdot \int_l E \cdot I_{YY} \cdot \chi_l^2 \cdot dz = \frac{E \cdot \pi^4 \cdot \delta_m^2}{2l^4} \int_l I_{YY} \cdot \text{sen}^2 \frac{\pi \cdot z}{l} \cdot dz$$

e sostituendo il valore del momento d'inerzia si ha:

$$\begin{aligned}
 W_l &= \frac{E \cdot \pi^5 \cdot \delta_m^2 \cdot R \cdot s}{2 \cdot l^4} \cdot \left[R^2 \cdot \int_l \text{sen}^2 \frac{\pi \cdot z}{l} \cdot dz - \frac{3}{2} \cdot R \cdot v_m \cdot \int_l \text{sen}^3 \frac{\pi \cdot z}{l} \cdot dz + \right. \\
 &\left. + \frac{5}{8} \cdot v_m^2 \cdot \int_l \text{sen}^4 \frac{\pi \cdot z}{l} \cdot dz \right]
 \end{aligned}$$

da cui:

$$W_t = \frac{E \cdot \pi^5 \cdot \delta_m^2 \cdot R \cdot s}{2 \cdot l^4} \cdot \left[\frac{R^2 \cdot l}{2} - \frac{2 \cdot R \cdot v_m \cdot l}{\pi} + \frac{15}{64} \cdot l \cdot v_m^2 \right]$$

Nel caso di tubo sollecitato da due coppie flettenti m applicate alle sezioni di estremità il lavoro dei carichi esterni si scrive:

$$U = -m \cdot [\varphi(0) + \varphi(l)]$$

ed essendo:

$$\varphi = \frac{d\delta}{dz} = \delta_m \cdot \frac{\pi}{l} \cdot \cos \frac{\pi \cdot z}{l}$$

risulta:

$$U = -m \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot \delta_m}{l}$$

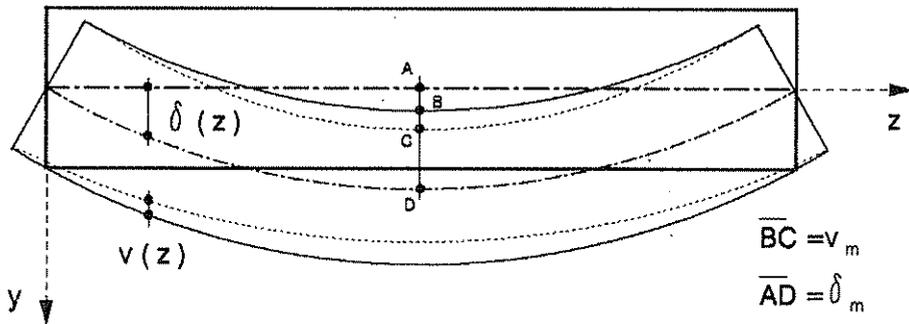


fig. 5.8

L'energia totale si scrive pertanto:

$$\begin{aligned} T = W_t + W_l + U &= \frac{9}{4} \cdot \pi \cdot D \cdot l \cdot \frac{v_m^2}{R^3} + \frac{E \cdot s \cdot R \cdot \pi^5 \cdot \delta_m^2}{2 \cdot l^3} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{R^2}{2} - \frac{2 \cdot R \cdot v_m}{\pi} + \frac{15}{64} \cdot v_m^2 \right] - \frac{2 \cdot \pi \cdot \delta_m}{l} \cdot m = \\ &= \frac{9}{4} \pi \cdot D \cdot l \cdot \frac{v_m^2}{R^3} + \frac{\pi^5}{4} \cdot \frac{E \cdot R^2 \cdot s}{l^3} \cdot \delta_m^2 - \pi^4 \cdot \frac{E \cdot R^2 \cdot s}{l^3} \cdot \delta_m^2 \cdot v_m^2 + \\ &+ \frac{15}{128} \cdot \pi^5 \cdot \frac{E \cdot R \cdot s}{l^3} \cdot \delta_m^2 \cdot v_m^2 - \frac{2 \cdot \pi}{l} \cdot m \cdot \delta_m \end{aligned}$$

e ponendo:

$$A = \frac{9}{4} \cdot \pi \cdot \frac{D \cdot l}{R^3}$$

$$B = \frac{\pi^5}{4} \cdot \frac{E \cdot R^3 \cdot s}{l^3} = \frac{\pi^4}{4} \cdot E \cdot \frac{I_0}{l^3}$$

$$C = \pi^4 \cdot \frac{E \cdot R^2 s}{l^3}$$

$$F = \frac{15}{128} \cdot \pi^5 \cdot \frac{E \cdot R \cdot s}{l^3}$$

$$G = \frac{2 \cdot \pi}{l} \cdot m$$

con $I_0 = \pi \cdot R^3 \cdot s$ momento d'inerzia della sezione indeformata, l'energia totale si scrive in forma sintetica:

$$T = A \cdot v_m^2 + B \cdot \delta_m^2 - C \cdot \delta_m^2 v_m + F \cdot \delta_m^2 v_m^2 - G \cdot \delta_m$$

Minimizzando rispetto al parametro v_m si ha:

$$\frac{\partial T}{\partial v_m} = 2 \cdot A \cdot v_m - C \cdot \delta_m^2 + 2 \cdot F \cdot \delta_m^2 \cdot v_m = 0$$

da cui:

$$v_m = \frac{C \cdot \delta_m^2}{2 \cdot (A + F \cdot \delta_m^2)}$$

Minimizzando rispetto a δ_m si ha, invece:

$$\frac{\partial T}{\partial \delta_m} = 2 \cdot B \cdot \delta_m - 2 \cdot C \cdot \delta_m \cdot v_m + 2 \cdot F \cdot \delta_m \cdot v_m^2 - G = 0$$

da cui:

$$2 \cdot \delta_m \cdot (B - C \cdot v_m + F \cdot v_m^2) = G$$

Trascurando il termine in v_m^2 , ovvero assumendo $F = 0$ risulta:

$$v_m = \frac{C}{2 \cdot A} \cdot \delta_m^2$$

e sostituendo nella seconda equazione con $F = 0$ si ha:

$$2 \cdot \delta_m \cdot \left(B - \frac{C^2 \cdot \delta_m^2}{2 \cdot A} \right) = G$$

e dunque:

$$\delta_m \left(1 - \frac{C^2}{2 \cdot A \cdot B} \cdot \delta_m^2 \right) = \frac{G}{2} \cdot B$$

Sostituendo in quest'ultima le espressioni delle costanti si ottiene:

$$\delta_m \cdot \left[1 - \frac{32}{3} \cdot \pi^2 \cdot \frac{R^4}{s^2 \cdot l^4} \cdot (1 - \nu^2) \cdot \delta_m^2 \right] = \frac{4}{\pi^3} \frac{m \cdot l^2}{E \cdot I_0}$$

e dunque:

$$m = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{E \cdot I_0}{l^2} \cdot \delta_m \left[1 - \frac{32}{3} \cdot \pi^2 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{R^4}{s^2 \cdot l^4} \cdot \delta_m^2 \right]$$

La legge carichi spostamenti è pertanto una equazione cubica con andamento del tipo in figura, caratteristico delle strutture in equilibrio di seconda specie.

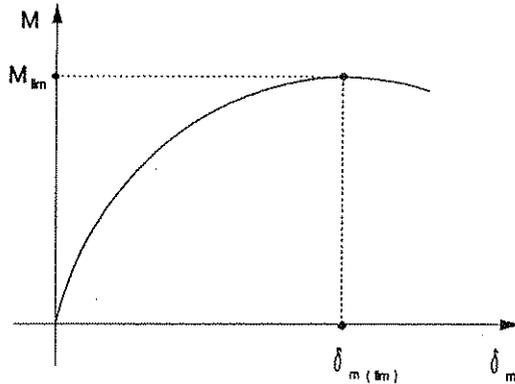


fig. 6.8

Il valore del carico limite si ottiene cercando il massimo della funzione ovvero minimizzando l'espressione di m rispetto allo spostamento δ_m :

$$\frac{dm}{d\delta_m} = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{E \cdot I_0}{l^2} \left(1 - 3 \cdot \frac{32}{3} \cdot \pi^2 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{R^4}{s^2 \cdot l^4} \cdot \delta_m^2 \right) = 0$$

da cui si può ricavare lo spostamento corrispondente al carico limite:

$$\begin{aligned} \delta_{ml} &= \pm \sqrt{\frac{s^2 \cdot l^4}{R^4} \cdot \frac{1}{32 \cdot \pi^2 \cdot (1 - \nu^2)}} = \\ &= \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \nu^2)}} \cdot \frac{s \cdot l^2}{R^2} \approx \frac{0,0563}{\sqrt{1 - \nu^2}} s \cdot \frac{l^2}{R^2} \end{aligned}$$

Sostituendo δ_{ml} nell'equazione di equilibrio si ottiene il momento limite:

$$\begin{aligned} m_{lim} &= \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \nu^2)}} \cdot \frac{l^2}{R^2} \cdot \left[1 - \frac{32}{3} \cdot \pi^2 \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{R^4}{s^2 \cdot l^4} \cdot \frac{1}{16 \cdot \pi^2 \cdot 2 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{s^2 \cdot l^4}{R^4} \right] = \\ &= \frac{\pi^3 \cdot E \cdot R \cdot s^2}{24 \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \nu^2)}} \approx \frac{0,913}{\sqrt{1 - \nu^2}} E \cdot R \cdot s^2 \end{aligned}$$

Nel caso in cui non si voglia trascurare il termine in v_m^2 e dunque la costante F , l'equazione risolta in via numerica porge^(*):

$$m_{lim} \approx \frac{1,146}{\sqrt{1-v^2}} \cdot E \cdot R \cdot s^2$$

e nel caso di tubi in acciaio:

formula approssimata $m_{lim} = 0,969 \cdot E \cdot R \cdot s^2 = 2,035 \cdot 10^6 \cdot R \cdot s^2$ (kg cm)

formula esatta $m_{lim} = 1,216 \cdot E \cdot R \cdot s^2 = 2,554 \cdot 10^6 \cdot R \cdot s^2$ (kg cm)

Dalla espressione prima dedotta di v_m si può ricavare la deformazione trasversale massima del tubo in corrispondenza del carico limite:

$$v_{ml} = \frac{C}{2 \cdot A} \delta_o^2$$

ed a sostituzione effettuate:

$$v_{ml} = \frac{\pi}{12} \cdot R \approx 0,262 R$$

Nel caso di tubo sollecitato dal carico uniforme p il lavoro dei carichi esterni assume la forma:

$$U = \int_l -p \cdot \delta \cdot dz = -p \cdot \int_l \delta_m \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \cdot dz = -p \cdot \delta_m \cdot \frac{l}{\pi} \cdot \int_l \operatorname{sen} \left(\frac{\pi z}{l} \right) \cdot d \left(\frac{\pi z}{l} \right)$$

ovvero:

$$U = -\frac{2 \cdot p \cdot l}{\pi} \cdot \delta_m$$

La soluzione del caso precedente è ancora valida purchè alla costante G si sostituisca il valore:

$$G_p = \frac{2 \cdot p \cdot l}{\pi}$$

L'equazione risoltrice è pertanto:

$$\delta_m \cdot \left[1 - \frac{32}{3} \cdot \pi^2 \cdot \frac{R^4}{s^2 \cdot l^4} \cdot (1 - v^2) \delta_m^2 \right] = \frac{2 \cdot p \cdot l}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\pi^4} \frac{l^3}{E \cdot I_o}$$

(*) Il valore prima ricavato è, dunque, cautelativo ma indica che il termine in v_m^2 non è trascurabile.

da cui:

$$p = \frac{\pi^5}{4} \cdot \frac{E \cdot I_o}{l^4} \cdot \delta_m \left[1 - \frac{32}{3} \cdot \pi^2 \cdot \frac{R^4}{s^2 \cdot l^4} \cdot (1 - \nu^2) \cdot \delta_m^2 \right]$$

Minimizzando rispetto a δ_m si ottiene il valore dello spostamento in corrispondenza del quale il carico p assume il valore limite:

$$\frac{dp}{d\delta_m} = \frac{\pi^5}{4} \cdot \frac{E \cdot I_o}{l^4} \cdot \left[1 - 3 \cdot \frac{32}{3} \cdot \pi^2 \cdot \frac{R^4}{s^2 \cdot l^4} \cdot (1 - \nu^2) \cdot \delta_m^2 \right] = 0$$

da cui^(*):

$$\delta_{ml} = \frac{s \cdot l^2}{R^2} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \nu^2)}} \approx \frac{0,0563}{\sqrt{1 - \nu^2}} \frac{s \cdot l^2}{R^2}$$

che sostituita nell'equazione di equilibrio porge:

$$p_{lim} = \frac{\pi^5}{4} \cdot \frac{E \cdot I_o}{l^4} \cdot \frac{s \cdot l^2}{R^2} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \nu^2)}} \cdot \frac{2}{3}$$

ovvero:

$$p_{lim} = \frac{\pi^5}{24 \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \nu^2)}} \cdot \frac{E \cdot R \cdot s^2}{l^2} \approx \frac{9,016}{\sqrt{1 - \nu^2}} \frac{E \cdot R \cdot s^2}{l^2}$$

^(*) δ_{ml} risulta indipendente dal carico applicato.

BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE

- [1] Timoshenko - Gere: "Theory of elastic stability", Mc Graw Hill, New York, (1961).
- [2] V. Franciosi: "Scienza delle costruzioni", Vol. V. Liguori, Napoli, (1967).
- [3] M. Como: "Teoria della stabilità dell'equilibrio elastico", Liguori, Napoli, (1967).
- [4] Baldacci - Ceradini - Giangreco: "Dinamica e instabilità", Italsider, Genova, (1971).
- [5] Thompson - Hunt: "A general theory of elastic stability", Wiley & Sons, London, (1973).
- [6] S.J. Britvec: "The stability of elastic systems", Pergamon Press, New York, (1973).
- [7] W.T. Koiter: "Teory of elastic stability", Mc Graw Hill, New York, (1979).
- [8] Ballio - Mazzolani: "Strutture in acciaio", ISEDI Mondadori, Milano, (1979).
- [9] P. Pozzati: "Teoria e tecnica delle strutture", Vol. III, UTET, Torino, (1987).
- [10] Raithel - Augenti - Nicolosi: "Equilibrio e stabilità delle strutture elastiche", E.S.A.C. Cremonese, Roma, (1991).
- [11] H. Steup: "Stabilitätstheorie im Bauwesen", Ernst & Sohn, Berlin, (1990).
- [12] Bazant Cedolin: "Stability of structures", Oxford University Press, New York, (1991).

ILARDO & c. s.a.s.

Via Fabio Massimo 14/22 - Tel. 5938318

NAPOLI

Stampato Aprile 1993