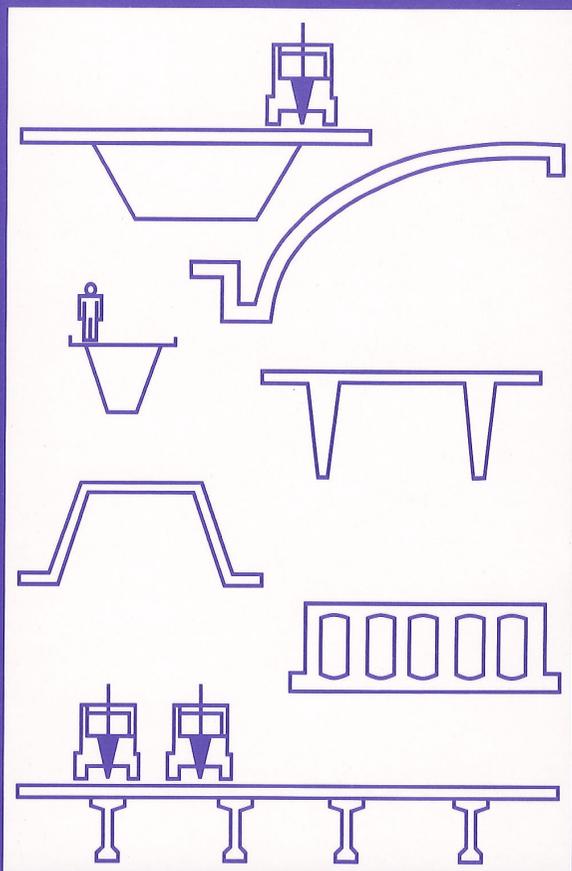


NICOLA AUGENTI

# INTRODUZIONE AL CALCOLO DELLE STRUTTURE IN PARETE SOTTILE



 LIGUORI EDITORE

# MANUALI PER L'UNIVERSITÀ

*Nicola Augenti*

**Introduzione al calcolo  
delle strutture in parete sottile**

Liguori Editore

Pubblicato da Liguori Editore  
via Mezzocannone 19, 80134 Napoli

© Liguori Editore, Srl., 1992

I diritti di traduzione, riproduzione e adattamento, totale o parziale, sono riservati per tutti i Paesi. Nessuna parte di questo volume può essere riprodotta, registrata o trasmessa con qualsiasi mezzo: elettronico, elettrostatico, meccanico, fotografico, ottico o magnetico (comprese copie fotostatiche, microfilm e microfiches).

Prima edizione italiana Gennaio 1992

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

1999 1998 1997 1996 1995 1994 1993 1992

*Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata.*

Printed in Italy, Officine Grafiche Liguori, Napoli

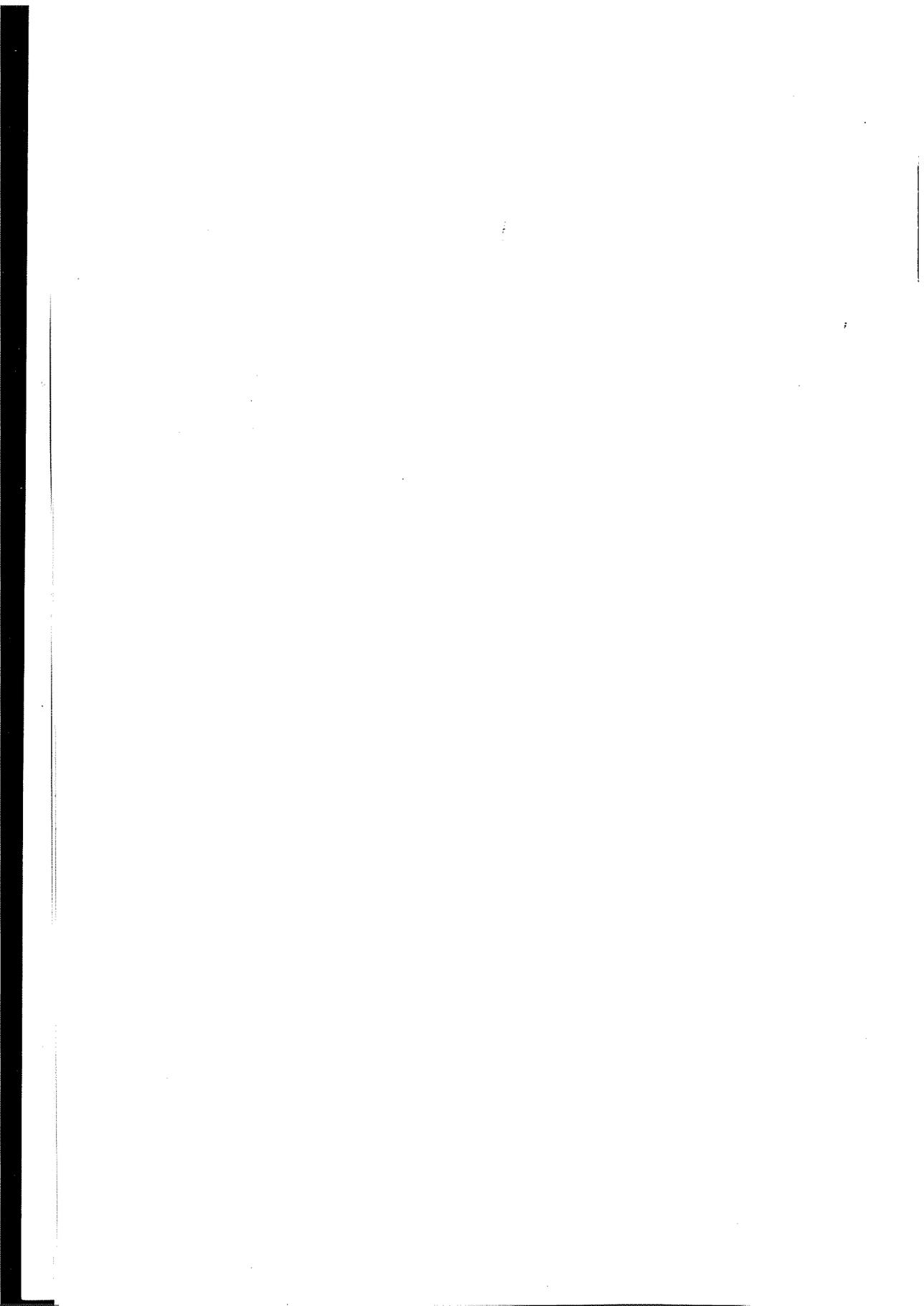
ISBN 88-207-2090-6

# Indice

<i>Prefazione</i>	pag.	9
<i>Simbologia</i>	»	11
<i>Capitolo primo</i> Premesse	»	17
1.1 - Unità di misura	»	17
1.2 - Sistemi di riferimento	»	18
1.3 - Caratteristiche della sollecitazione esterna	»	18
1.4 - Caratteristiche della sollecitazione interna	»	19
1.5 - Componenti dello spostamento	»	19
1.6 - Convenzioni	»	20
1.7 - Teoria tecnica delle travi	»	20
1.8 - Richiami di calcolo vettoriale	»	23
<i>Capitolo secondo</i> Le strutture in parete sottile	»	27
2.1 - Generalità	»	27
2.2 - Definizioni	»	32
2.3 - Lo stato di tensione e di deformazione	»	34
<i>Capitolo terzo</i> La sollecitazione di taglio	»	37
3.1 - Le tensioni nelle sezioni monoconnesse	»	37
3.2 - Il centro di taglio nelle sezioni monoconnesse	»	40
3.3 - Le tensioni nelle sezioni bi o pluri-connesse	»	47
3.4 - Il centro di taglio nelle sezioni bi o pluri-connesse	»	47
<i>Capitolo quarto</i> La sollecitazione di torsione	»	49
4.1 - Generalità	»	49
4.2 - La torsione uniforme	»	50
4.2.1 - Le sezioni compatte	»	51
4.2.1.1 - La sezione circolare	»	51

4.2.1.2 - La sezione di forma qualunque	pag.	53
4.2.1.3 - La sezione rettangolare	»	54
4.2.2 - Le sezioni monoconnesse in parete sottile	»	56
4.2.2.1 - La sezione rettangolare	»	56
4.2.2.2 - La sezione di forma qualunque	»	58
4.2.3 - Le sezioni biconnesse in parete sottile	»	59
4.2.4 - Le sezioni pluriconnesse in parete sottile	»	61
4.2.4.1 - Il caso di sezione pluricellulare a nervature uguali	»	63
4.2.5 - Le sezioni miste	»	67
4.2.6 - Considerazioni e confronti	»	69
4.3 - L'ingobbimento delle travi in parete sottile	»	72
4.3.1 - Le sezioni monoconnesse	»	73
4.3.2 - Le sezioni biconnesse	»	74
4.3.3 - Le sezioni pluriconnesse	»	79
4.4 - La torsione non uniforme	»	83
4.4.1 - Le tensioni normali secondarie	»	85
4.4.2 - Le coordinate areali principali	»	88
4.4.2.1 - Il raggio vettore principale	»	88
4.4.2.2 - Il centro di torsione	»	91
4.4.3 - Le tensioni tangenziali secondarie nelle sezioni mono e bi-connesse	»	97
4.4.4 - Il momento torcente secondario	»	100
4.4.5 - Le tensioni tangenziali secondarie nelle sezioni pluriconnesse	»	110
4.4.6 - La caratteristica bimomento	»	111
4.5 - L'equazione fondamentale della torsione	»	116
4.5.1 - La risoluzione dell'equazione fondamentale	»	120
4.5.2 - Il caso della trave appoggiata torsionalmente e sollecitata da un carico torcente uniforme	»	122
4.6 - La ripartizione della caratteristica torcente	»	135
<i>Capitolo quinto</i> Le sollecitazioni combinate	»	141
5.1 - Lo stato tensionale normale	»	141
5.2 - Lo stato tensionale tangenziale	»	142
<i>Appendice</i>	»	159
<i>Bibliografia</i>	»	165

*a Maria Chiara,  
Marie Nicole  
e Maria Flavia*



## Prefazione

Il presente volume raccoglie parte degli argomenti trattati nell'Insegnamento di *Stabilità delle strutture e Calcolo delle strutture in parete sottile* di cui sono titolare dall'anno 1982 presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi, Federico II, di Napoli.

Dopo lunghe esitazioni, consegno alle stampe questi scritti non tanto per lasciare una traccia delle lezioni agli Studenti quanto per fornire a coloro che, conseguita la laurea, sono entrati nel mondo del lavoro, uno strumento di consultazione o di aggiornamento. L'esperienza di tanti lustri mi ha insegnato, infatti, come il professionista, una volta uscito dall'Università, trovandosi solo con se stesso di fronte ai problemi ed alle responsabilità dell'attività professionale, cerchi conforto nella bibliografia che, seppure esistente, è, per taluni argomenti, troppo spesso *tagliata* per i soli *addetti ai lavori*. È ancora vivo in me, peraltro, il ricordo di un Collega più anziano che, all'inizio degli anni Settanta, chiedeva lumi sulla progettazione e sull'affidabilità delle *travi a spessore*, assenti nei suoi studi dell'epoca. Ed è questo un altro problema: a fronte di un evolversi particolarmente rapido della tecnologia, risulta del tutto assente nel nostro ordinamento universitario la possibilità di conseguire un aggiornamento professionale, sicché tale esigenza può essere soddisfatta solamente attraverso la consultazione di quei libri che, nel pieno rispetto di una trattazione rigorosa, risultino comprensibili a chiunque sia fornito delle conoscenze di base e che siano, nel contempo, volti a finalità applicative ovvero alla soluzione dei problemi progettuali che, quasi quotidianamente, si pongono all'ingegnere e all'architetto.

L'argomento trattato in queste pagine è quello, tanto delicato quanto attuale, delle strutture in parete sottile che, a fronte di una oramai ampia diffusione nel mondo delle costruzioni, presentano problemi di progettazione, particolarmente nei riguardi delle sollecitazioni da torsione, noti solamente agli specialisti del settore. L'inadeguatezza della usuale *Teoria tecnica delle travi* a trattare simili strutture, confermata purtroppo da clamorosi errori culminati talvolta in crolli, richiede l'apprendimento di ulteriori conoscenze e ciò non solo per una corretta conduzione del *calcolo*, troppo spesso affidato ad ermetici quanto pericolosi *software*, ma soprattutto per una adeguata conoscenza del comportamento strutturale che costituisce, sempre e comunque, l'unica solida base di qualunque

prodotto progettuale: molto frequentemente, infatti, procedure di calcolo eccessivamente raffinate fanno perdere di vista i comportamenti dominanti che sono, invece, alla base di una corretta modellazione ed analisi strutturale.

Prima di concludere questa prefazione ritengo doveroso precisare che: di *originale* il lettore troverà quasi esclusivamente gli inevitabili errori in quanto la gran parte degli argomenti è stata già trattata, talvolta meglio, talaltra in maniera differente; il *taglio* dato alla materia è, invece, legato agli insegnamenti del mio Maestro di *Scienza*, prof. ing. Aldo Raithel, ed al desiderio di contribuire, per dirla con Montaigne, a preparare menti *ben fatte* più che *ben piene*.

Napoli, gennaio 1991

*Nicola Augenti*

## *Simbologia*<sup>1</sup>

$A$	area della sezione area of cross section
$A_c$	area compresa tra la corda iniziale e quella all'ascissa $c$
$B$	bimomento bimoment
$c$	ascissa curvilinea della linea media curvilinear coordinate on middle line
$C$	lunghezza della linea media length of middle line
$d$	dimensione caratteristica della sezione
$E$	modulo di elasticità normale Young's modulus
$F$	carico concentrato applied concentrated load
$G$	baricentro della sezione o modulo di elasticità tangenziale centroid or shear modulus
$h$	funzione di circuitazione
$H$	circuitazione geometrica
$I_x$	momento statico rispetto all'asse $y$ first moment of the area about $y$ -axis
$I_y$	momento statico rispetto all'asse $x$ first moment of the area about $x$ -axis

<sup>1</sup> In una visione oramai *europea* del professionista si è ritenuto opportuno inserire nel testo anche alcuni termini anglosassoni di uso corrente e ciò per facilitare sia la lettura della bibliografia straniera che i contatti con colleghi non italiani.

$I_Q$	momento d'inerzia polare rispetto a $Q$ polar moment of inertia about pole $Q$
$I_\omega^Q$	momento statico settoriale di polo $Q$ statical warping function moment with pole $Q$
$I_\omega$	momento statico settoriale di polo $T$ statical warping function moment with pole $T$
$I_\lambda^Q$	momento statico areale di polo $Q$
$I_\lambda$	momento statico areale di polo $T$
$I^{(1)}$	momento statico primario
$I^{(2)}$	momento statico secondario
$I_{xy}$	momento centrifugo rispetto agli assi $x$ ed $y$ product moment of the area about $x,y$ axis
$I_{\omega x}^Q$	momento centrifugo settoriale di polo $Q$ sectorial product of the area with pole $Q$
$I_{\lambda x}$	momento centrifugo areale di polo $T$
$I_{xx}$	momento d'inerzia assiale rispetto ad $y$ second moment of the area about $y$ -axis
$I_{yy}$	momento d'inerzia assiale rispetto ad $x$ second moment of the area about $x$ -axis
$I^*$	momento d'inerzia primario torsion constant
$I_{\lambda\lambda}$	momento d'inerzia secondario warping constant
$k^{(1)}$	rigidezza torsionale primaria Saint Venant torsional rigidity
$k^{(2)}$	rigidezza torsionale secondaria warping rigidity
$L$	lunghezza della trave length of beam
$m_z$	carico torcente per unità di lunghezza applied torque per unit length
$M_x$	momento flettente nel piano $x-z$ bending moment about $y$ -axis

$M_y$	momento flettente nel piano $y-z$ bending moment about $x$ -axis
$M_z$	momento torcente totale total torsion moment
$M^{(1)}$	momento torcente primario Saint Venant torsion moment
$M^{(2)}$	momento torcente secondario warping torsion moment
$N$	sforzo normale normal force
$O$	punto areale nullo
$p$	carico ripartito distributed load
$P$	punto generico della linea media general point on the middle line
$q$	fattore di torsione
$Q$	polo generico
$r$	raggio radius
$s$	spessore della sezione wall thickness
$t$	funzione di flusso locale
$T$	centro di taglio o di torsione della sezione shear centre or centre of rotation
$T_x$	sforzo di taglio in direzione $x$ shear force in the $x$ -direction
$T_y$	sforzo di taglio in direzione $y$ shear force in the $y$ -direction
$u$	traslazione secondo la direzione $x$ displacement in the $x$ -direction
$v$	traslazione secondo la direzione $y$ displacement in the $y$ -direction
$w$	ingobbamento o ingobbimento warping

$x$	coordinata o asse principale di riferimento
$y$	coordinata o asse principale di riferimento
$z$	coordinata o asse della trave
$\alpha$	lunghezza caratteristica inversa inverse characteristic length
$\gamma^{(0)}$	scorrimento da taglio shear strain due to shear force
$\gamma^{(1)}$	scorrimento da torsione primaria shear strain due to Saint Venant torsion
$\gamma^{(2)}$	scorrimento da torsione secondaria shear strain due to warping torsion
$\epsilon$	coefficiente di dilatazione lineare direct strain
$\theta$	rotazione torsionale angle of twist
$\theta'$	angolo unitario di torsione
$\lambda_Q$	distanza areale di polo $Q$
$\lambda$	distanza areale di polo $T$
$\nu$	coefficiente di Poisson Poisson's ratio
$\sigma^{(0)}$	tensione normale da sforzo assiale direct stress due to normal force
$\sigma^{(1)}$	tensione normale da flessione direct stress due to bending moment
$\sigma^{(2)}$	tensione normale da torsione secondaria direct warping stress
$\tau^{(0)}$	tensione tangenziale da taglio shear stress due to shear force
$\tau^{(1)}$	tensione tangenziale primaria Saint Venant torsion shear stress
$\tau^{(2)}$	tensione tangenziale secondaria shear warping stress
$\varphi_x$	rotazione intorno all'asse $x$ rotation about $x$ -axis

- $\varphi_y$  rotazione intorno all'asse  $y$   
rotation about  $y$ -axis
- $\omega_Q$  area settoriale di polo  $Q$   
warping function with pole  $Q$
- $\omega$  area settoriale di polo  $T$   
warping function with pole at shear centre
- $\Omega$  area settoriale delimitata da una linea chiusa

## Capitolo primo

### Premesse

#### 1.1 - Unità di misura

Il sistema di misura adottato è il *Sistema Internazionale di Unità* noto anche come sistema *S.I.*<sup>1</sup>.

Le *grandezze fondamentali* utilizzate sono:

- per le lunghezze : metro (m)
- per le masse : kilogrammo (Kg)
- per i tempi : secondo (s)

Le *grandezze derivate* utilizzate sono:

- per le forze : Newton (N)
- per le pressioni : Pascal (Pa)

i cui multipli di uso più frequente sono:

il KiloNewton:  $1 \text{ KN} = 10^3 \text{ N}$

il MegaPascal:  $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa}$

Poiché è molto spesso d'uso, ancora oggi, utilizzare le unità di misura del *Sistema Tecnico (S.T.)*, appare utile riportare di seguito l'equivalenza fra le unità dei due sistemi:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Kgf} &= 1 \text{ Kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 9,810 \text{ N} \\ 1 \text{ N} &= 1 \text{ Kg} \cdot 1,00 \text{ m/s}^2 = 0,102 \text{ Kgf} \\ 1 \text{ KN} &= 102 \text{ Kgf} \\ 1 \text{ Pa} &= 1 \text{ N/1 m}^2 = 0,102 \cdot 10^{-4} \text{ Kgf/cm}^2 \\ 1 \text{ MPa} &= 1 \text{ N/1 mm}^2 = 10,2 \text{ Kgf/cm}^2 \\ 1 \text{ Kgf/cm}^2 &= 0,098 \text{ MPa} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Reso obbligatorio con decorrenza 01/01/1990 dal DPR 12/08/1982 n. 802 per l'adeguamento alla direttiva CEE n. 80/181, in materia di Unità di Misura, emanata il 20/12/1979.

## 1.2 - Sistemi di riferimento

Nello spazio  $R^3$  si assumono terne di assi  $x, y, z$  coordinati:

- *cartesiane* (assi rettilinei);
- *ortogonali* (assi che formano tra loro angoli retti);
- *levogire* (un osservatore disteso lungo  $x$ , con i piedi nell'origine del riferimento, vede  $y$  che si sovrappone a  $z$  ruotando in senso levogiro, ovvero da destra verso sinistra ovvero, ancora, in senso antiorario; tali terne si definiscono altresì destrorse, essendo  $x, y, z$  diretti ordinatamente secondo pollice, indice e medio della mano destra).

In particolare, nel caso di elementi monodimensionali piani (asse contenuto in un piano) rettilinei, si assume, in genere, l'origine della terna coincidente con il baricentro, gli assi  $x$  ed  $y$  principali d'inerzia della sezione, l'asse  $z$  coincidente con quello della trave e, dunque, terne di riferimento *centrali d'inerzia*.

## 1.3 - Caratteristiche della sollecitazione esterna

Indicando con  $p_x, p_y, p_z$  le forze esterne applicate, per unità di superficie, ad un sistema monodimensionale piano, le risultanti secondo i tre assi di riferimento ed i momenti risultanti rispetto agli stessi assi si scrivono:

$$F_x = \int_A p_x \cdot dA$$

$$F_y = \int_A p_y \cdot dA$$

$$F_z = \int_A p_z \cdot dA$$

$$\mathfrak{M}_x = \int_A p_z \cdot y \cdot dA$$

$$\mathfrak{M}_y = \int_A -p_z \cdot x \cdot dA$$

$$\mathfrak{M}_z = \int_A (p_y \cdot x - p_x \cdot y) \cdot dA$$

Le condizioni di carico esterne si esprimono in funzione della configurazione naturale indeformata della struttura e si suppongono *conservative*, ovvero

invarianti in intensità, direzione e verso rispetto ad ogni possibile deformazione, ossia rispetto a qualunque spostamento dei punti di applicazione delle azioni. Le forze che non soddisfano tali condizioni si dicono *non conservative* o *posizionali*.

Dette azioni si suppongono, inoltre, applicate *staticamente* ovvero in maniera tale da non indurre velocità né accelerazioni.

#### 1.4 - Caratteristiche della sollecitazione interna

Indicando con  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  le componenti di tensione di un sistema monodimensionale piano, le risultanti secondo gli assi coordinati ed i momenti risultanti rispetto agli stessi assi si scrivono:

$$N = \int_A \sigma_z \cdot dA$$

$$T_x = \int_A \tau_{zx} \cdot dA$$

$$T_y = \int_A \tau_{xy} \cdot dA$$

$$M_x = \int_A -\sigma_z \cdot x \cdot dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA$$

$$M_z = \int_A (\tau_{xy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) \cdot dA$$

#### 1.5 - Componenti dello spostamento

Nel seguito, dato un sistema monodimensionale piano ed il generico punto  $P$  della generica sezione, nel riferimento cartesiano adottato, si indicheranno con:

- $u$  le traslazioni di  $P$  lungo l'asse  $x$ ;
- $v$  le traslazioni di  $P$  lungo l'asse  $y$ ;
- $w$  le traslazioni di  $P$  lungo l'asse  $z$ ;
- $\varphi_x$  le rotazioni della sezione intorno all'asse  $x$ ;
- $\varphi_y$  le rotazioni della sezione intorno all'asse  $y$ ;
- $\theta$  le rotazioni della sezione intorno ad un asse parallelo a  $z$ .

## 1.6 - Convenzioni

Le azioni, le componenti di tensione e di spostamento, le caratteristiche della sollecitazione esterna ed interna si assumono positive quando i loro vettori rappresentativi sono equiversi agli assi di riferimento.

In particolare, dunque, rotazioni e coppie, per un osservatore disteso lungo l'asse di rotazione con la testa rivolta all'orientamento positivo, risulteranno positive se levogire (o antiorarie)<sup>2</sup>.

Inoltre, date le funzioni  $a, b, c, \dots$  definite nel dominio  $A$ , l'integrale esteso ad  $A$  della funzione prodotto verrà indicato nel seguito con la notazione  $I_{abc\dots}$ , ovvero:

$$I_{abc\dots} = \int_A a \cdot b \cdot c \dots dA$$

Tale simbologia consente di esprimere in maniera sintetica non solo i momenti del primo e del secondo ordine, come quelli statici, assiali o centrifughi, ma anche integrali di prodotti delle funzioni più varie, come si dimostrerà nel seguito.

In alternativa alla simbologia corrente, le derivate di una funzione potranno essere indicate:

- con apici, quando la variabile indipendente è l'ascissa  $z$ ;
- con puntini, quando la variabile indipendente è il tempo  $t$ ;
- con pedici, per qualunque tipo di variabile.

Varranno, dunque ad esempio, le seguenti eguaglianze:

$$v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}; \quad \dot{s} = \frac{ds}{dt}; \quad W_{xy} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

Infine, per non appesantire il testo di ulteriore simbologia, fatta eccezione per il cap. 1.8, le grandezze vettoriali non verranno mai indicate in grassetto essendo sin troppo evidenti, di volta in volta, le differenze fra vettori e scalari.

## 1.7 - Teoria tecnica delle travi<sup>3</sup>

Le equazioni che reggono il problema dell'equilibrio elastico per i solidi monodimensionali, che consiste nel determinarne lo stato di deformazione e di tensione, non sono nella generalità dei casi risolvibili in via esatta: la soluzione è stata

<sup>2</sup> Ciò in perfetta sintonia con la cosiddetta *regola del cavatappi* o *regola della vite*.

<sup>3</sup> Engineers' theory.

suggerita dal De Saint Venant, rigorosamente, solo per alcuni particolari tipi di azioni applicate ad un solido caratterizzato come segue:

- forma cilindrica rettilinea e sezione compatta;
- lunghezza qualunque;
- materiale omogeneo, isotropo e linearmente elastico;
- forze di massa nulle;
- forze superficiali applicate sulle sole estremità della trave in maniera che questa, se considerata rigida, sia in equilibrio.

I risultati, validi a rigore solamente per le particolari distribuzioni di carico studiate dal De Saint Venant, sono di fatto applicabili a qualunque distribuzione, sempre applicata alle sezioni di estremità della trave, purché la lunghezza di questa sia molto maggiore della massima dimensione della sezione, e ciò in base al *postulato di De Saint Venant*. Tale *postulato* consente di assumere che in tutti i punti della trave, a distanza superiore a quella di estinzione dalle sezioni alle quali sono applicati i carichi, lo stato tensionale non dipenda dalla distribuzione di questi ma dalle sole caratteristiche della sollecitazione esterna e cioè solamente da risultanti e momenti risultanti dei carichi che, per l'equilibrio del sistema, devono a loro volta uguagliare le corrispondenti caratteristiche della sollecitazione interna.

Detto *postulato* consente, dunque, di definire lo stato di tensione e di deformazione dell'intera trave, ad eccezione delle zone prossime a carichi concentrati ed a vincoli, mediante la conoscenza delle sei caratteristiche della sollecitazione interna associate alle condizioni di carico e di vincolo.

In effetti va osservato che la lunghezza dell'elemento deve essere comunque tale da poter considerare trascurabili le forze di massa e quelle superficiali: infatti, mentre queste sono invariabili con la luce, le caratteristiche della sollecitazione aumentano con essa.

Tale *teoria tecnica* è pienamente applicabile alle travi aventi sezione compatta per le quali le dimensioni della sezione trasversale sono tutte dello stesso ordine di grandezza ma molto inferiori alla lunghezza della trave, e sia le variazioni della sezione che i raggi di curvatura sono molto contenuti, ovvero tali da essere trascurabili rispetto alla distanza di estinzione.

Si ricorda, infine, che De Saint Venant ha dimostrato come i suoi risultati conservino piena validità, consentendo però notevoli semplificazioni del problema, nel caso di stato tensionale piano, per il quale si verifica:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

Risultano, in tal caso, non nulle le sole componenti di tensione  $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ .

Noti i risultati di De Saint Venant per i singoli tipi di sollecitazione, è possibile, in conclusione, studiare la trave sottoposta alla generica condizione di cari-

co esaminando separatamente le singole azioni e sommandone gli effetti, semprechè siano valide le ipotesi del *principio di sovrapposizione degli effetti*.

In definitiva, l'applicabilità dei risultati di De Saint Venant alle strutture reali è legata alle ipotesi che condizionano la sovrapposibilità degli effetti, e cioè:

a) - Materiale:

- *omogeneo*, ovvero moduli di elasticità normale e tangenziale costanti;
- *isotropo*, ovvero assi principali di tensione e di deformazione coincidenti;
- *elastico linearmente*, ovvero relazioni fra componenti di deformazione e di tensione rette dalle leggi di Hooke generalizzate ai corpi isotropi:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_z + \sigma_x)] \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

che, nel caso di stati tensionali piani, assumono le espressioni semplificate:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Sussistendo tra il *modulo di elasticità normale*, il *modulo di elasticità tangenziale* ed il *coefficiente di Poisson* la relazione:

$$E = 2 \cdot G \cdot (1 + \nu)$$

- b) - Spostamenti *piccoli*, ovvero dotati di componenti massime infinitesime rispetto alle dimensioni della trave, tali cioè che la configurazione deformata si possa confondere con quella indeformata e su di essa possano calcolarsi le caratteristiche della sollecitazione interna.
- Quali componenti  $u, v, w$  dello spostamento  $s$  del generico punto  $P(x, y, z)$  appartenente all'intorno infinitesimo dell'origine  $O$  della terna di riferimento, dovendo essere queste infinitesime in senso reale, si possono assumere le espressioni dei loro sviluppi in serie di Mac Laurin arrestati al primo ordine. Indicando con  $u_0, v_0, w_0$ , le componenti di spostamento del punto  $O$  e ricordando che le derivate parziali calcolate in  $O$  sono costanti, risulta:

$$u = u_0 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \cdot x + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \cdot y + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 \cdot z$$

$$v = v_0 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 \cdot x + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \cdot y + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 \cdot z$$

$$w = w_0 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 \cdot x + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 \cdot y + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)_0 \cdot z$$

In tali ipotesi le componenti di deformazione si scrivono:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

e nel caso di stati tensionali piani:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

In definitiva si osserva che l'ipotesi di *piccolezza* degli spostamenti può non essere verificata nei casi di elementi snelli, per i quali la lunghezza è molto maggiore delle dimensioni della sezione, e di elementi in parete sottile per i quali le  $u$ ,  $v$ ,  $w$  possono risultare *piccole* solo rispetto ad alcune dimensioni dell'elemento ma non ad altre; in tali casi, non essendo più trascurabile la deformazione, può non essere più valido il principio di Kirchhoff di unicità della soluzione, e possono non essere applicabili i risultati del De Saint Venant.

### 1.8 - Richiami di calcolo vettoriale

Dato il campo vettoriale dei vettori  $\mathbf{a}$ , aventi per componenti secondo le direzioni degli assi  $x$ - $y$ - $z$  di una terna cartesiana ortogonale con versori  $\mathbf{i}$ - $\mathbf{j}$ - $\mathbf{k}$  le funzioni  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ , ed avendo indicato con  $V$  il volume nel quale è definito il campo vettoriale di  $\mathbf{a}$ , con  $S$  la superficie che lo racchiude e con  $C$  una qualsiasi linea chiusa orientata contenuta in  $V$  di frontiera della superficie  $A$ , si definiscono:

- *Divergenza del vettore  $\mathbf{a}$* , lo scalare:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

che è funzione del punto considerato; quando un campo vettoriale possiede divergenza nulla, si definisce *solenoidale*.

- *Rotazione del vettore  $a$  o rotore di  $a$* , il vettore:

$$\text{rot } a = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cdot i + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cdot j + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cdot k$$

le cui componenti sono:

$$(\text{rot } a)_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$$

$$(\text{rot } a)_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}$$

$$(\text{rot } a)_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

e la cui espressione si può ottenere immediatamente risolvendo la matrice simbolica:

$$\text{rot } a = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$$

Il vettore *rot a* risulta indipendente dalla terna di riferimento e definisce un campo vettoriale associato a quello di *a*.

- *Circuitazione del vettore  $a$  lungo la linea  $C$* , l'integrale:

$$\oint a_t \cdot dc$$

essendo  $a_t$  la componente di *a* secondo la tangente alla curva *C* in ogni punto.

- *Flusso del vettore  $a$  attraverso la superficie  $S$* , lo scalare:

$$\int_S a_n \cdot dS$$

essendo  $a_n$  la componente di *a* secondo la normale, orientata, alla superficie in ogni punto.

- *Linee di flusso* del campo vettoriale, le linee cui il vettore  $a$  risulta tangente in ogni punto; si dimostra che in un campo solenoidale le linee di flusso si chiudono su se stesse o sul contorno.

- *Tubo di flusso* relativo all'area  $A$ ; lo spazio racchiuso dalle linee di flusso che hanno per direttrice la curva  $C$ ; in virtù della definizione precedente il flusso uscente dalla superficie laterale di tale *tubo* è nullo.

Note tali definizioni, è possibile enunciare i seguenti teoremi fondamentali:

- *Teorema della divergenza*<sup>4</sup>

*L'integrale della divergenza di  $a$  esteso al volume  $V$  è uguale al flusso di  $a$  attraverso la superficie  $S$  che racchiude il volume stesso, ovvero:*

$$\int_V \operatorname{div} a \cdot dV = \int_S a_n \cdot dS$$

Detto teorema esprime una condizione di equilibrio; nel caso di campi solenoidali, traduce la circostanza che il flusso attraverso una qualunque superficie chiusa è nullo e dunque, per le proprietà precedentemente richiamate, il flusso attraverso una qualunque sezione del tubo di flusso risulta costante.

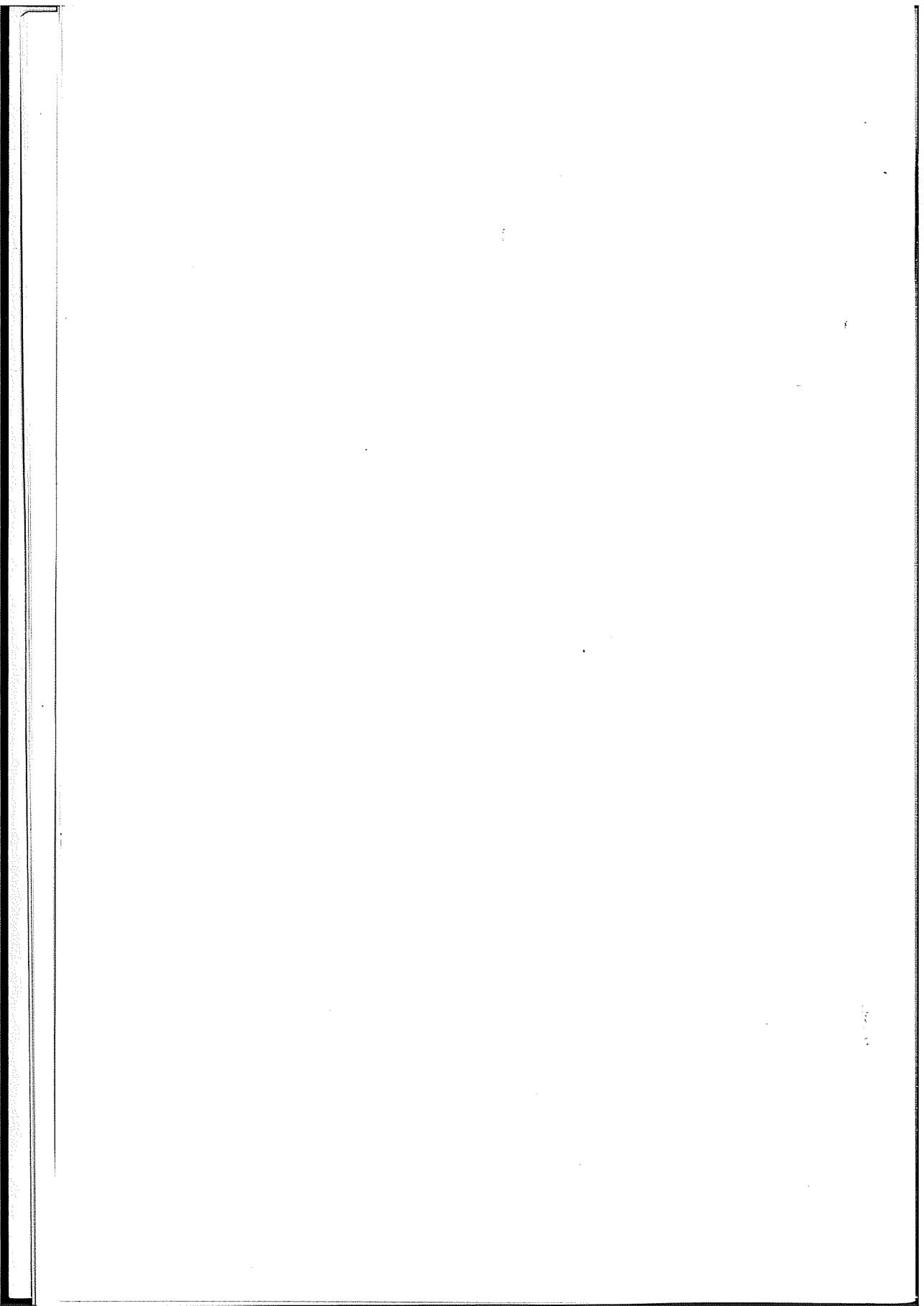
- *Teorema di Stokes*

*La circuitazione del vettore  $a$  lungo la curva  $C$  è uguale al flusso del vettore rotazione di  $a$  attraverso la superficie  $A$  contornata da  $C$ , ovvero:*

$$\oint a_t \cdot dc = \int_A (\operatorname{rot} a)_n \cdot dA$$

Tale teorema esprime una condizione di congruenza e, perché sia soddisfatto, occorre che la normale, orientata, alla superficie sia concorde al vettore rotazione dell'orientamento (verso di percorrenza) della curva  $C$ .

<sup>4</sup> Diretta conseguenza della formula di Gauss che trasforma un integrale di volume in uno di superficie.



## Capitolo secondo

### Le strutture in parete sottile

#### 2.1 - Generalità

L'attuale sviluppo delle costruzioni è sempre più legato all'impiego di elementi strutturali in parete sottile le cui sezioni sono caratterizzate da una notevole diffusione delle aree: l'esigenza di una sempre maggiore *leggerezza* e di un migliore sfruttamento della *forma* non è legato a richieste di tipo esclusivamente architettonico ma soprattutto a necessità di carattere economico<sup>1</sup>. Tali tipologie, impiegate ovunque il problema *peso* risulti determinante, non sono solamente appannaggio delle strutture speciali come le costruzioni spaziali, i ponti, le torri, le piattaforme off-shore, ma costituiscono parte integrante di molte strutture oggi largamente diffuse, come le coperture di grande luce, o ancor più le costruzioni in zona sismica, per le quali una riduzione del peso proprio abbatta drasticamente gli effetti dei terremoti. I notevoli progressi conseguiti, poi, nel campo della resistenza specifica dei materiali ha fatto sì che le strutture in parete sottile, oltre che nelle costruzioni metalliche, vengano sempre più spesso utilizzate anche nelle costruzioni in conglomerato cementizio armato, normale o precompresso, ed ovunque nuovi materiali consentano elevate tensioni di lavoro.

Al fine di evidenziare la larghissima diffusione oggi assunta dalle strutture in parete sottile e le particolari condizioni di carico cui sono sottoposte, si effettua di seguito una breve disamina delle tipologie più note.

Nell'ambito degli *elementi strutturali*, storicamente, il primo posto è occupato dai profilati a caldo in acciaio, dei classici tipi *NPI*, *IPE*, *HE*, *NPU*, *L*, *T* e dalle travi saldate. A tale tipologia segue quella dei profili in acciaio formati a freddo, con sezioni che vanno dagli elementi semplici o composti (analoghi a quelli profilati a caldo) per gli impieghi strutturali nelle carpenterie alleggerite, fino alle sagome particolari come: le lamiere ondulate o grecate, le palancole

<sup>1</sup> Per comprendere come l'evoluzione tecnologica abbia inciso sulla leggerezza, nel campo delle costruzioni civili, basti pensare che nel volgere di quasi cinque secoli si è passati dalla struttura in mattoni a doppio strato della *Cupola di S. Pietro* del diametro di circa 42 m, pesante circa 2000 Kg/mq, alla copertura del *Centre National des Industries et des Techniques* cinque volte più grande ma pesante quasi 1/5.

metalliche per paratie o fondazioni, le barriere stradali o paramassi, le condotte portanti. Di nascita più recente sono, invece, i profili in leghe di alluminio ottenuti per estrusione, composizione saldata o sagomatura a freddo.

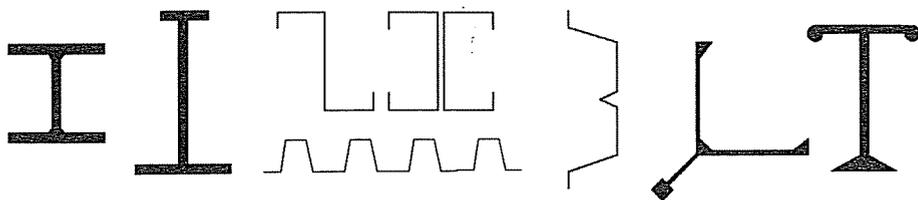


Fig. 2.1

Le strutture in parete sottile certamente più note e suggestive sono costituite dagli impalcati da ponte la cui fattura spazia tra innumerevoli tecnologie e forme. Dagli impalcati interamente in acciaio a piastra ortotropa, a quelli in sistema misto acciaio-calcestruzzo, dai ponti in cemento armato normale o precompresso alle passerelle pedonali in leghe d'alluminio, realizzati con sezioni aperte o chiuse (mono o pluri cellulari) o ancor più spesso miste, tutti sono caratterizzati da spessori sottili di solette e nervature (essenziali per ridurre il peso proprio) ma anche dalla notevole diffusione trasversale, necessaria a contenere molteplici carregiate stradali. E proprio i carichi eccezionali isolati o le autocolonne di veicoli che viaggiano eccentricamente rispetto al piano di simmetria longitudinale inducono i ben noti carichi torcenti cui sono tradizionalmente sottoposte tali strutture. Meno riconoscibili ma altrettanto pericolose possono essere, però, le sollecitazioni torcenti indotte da azioni orizzontali quando, come accade nel caso di alcune sezioni aperte, la risultante dei carichi applicati non passa per il centro di taglio: basti per tutti l'esempio del Tracoma Narrow Bridge che, sotto l'azione del vento, fu sottoposto ad eccitazioni torsionali che, autoesaltandosi per la prossimità fra la frequenza delle raffiche e la frequenza propria di vibrazione della struttura, ne provocarono il famoso crollo.

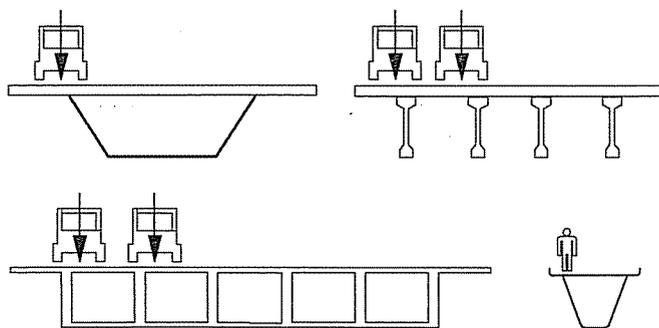


Fig. 2.2

Il problema delle coperture di grandi luci ha trovato in questi anni brillanti soluzioni con l'impiego di volte sottili cilindriche caratterizzate oltre che dalla notevole leggerezza, conseguente ai ridottissimi spessori, anche dallo sfruttamento delle capacità resistenti della forma che comporta una diffusa articolazione delle aree: entrambi requisiti di immancabile successo architettonico. Anche in tale caso è immediato intuire come l'effetto del mancato allineamento verticale fra centro di taglio e baricentro della sezione, conseguente, per esempio, a disposizione non simmetrica del profilo, comporta immediatamente sollecitazioni del tipo torcente, ripartite lungo l'asse della struttura, già per effetto di un'azione tradizionalmente *centrata* come il peso proprio.

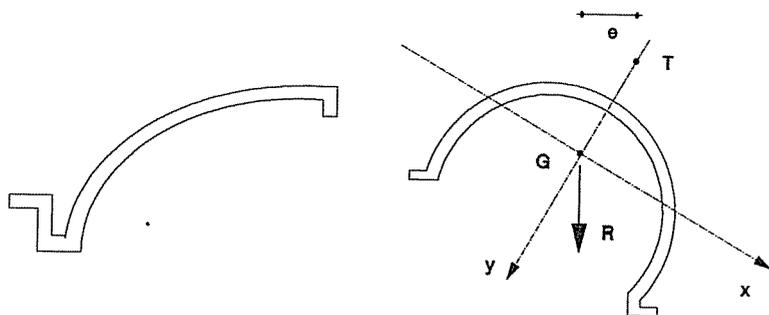


Fig. 2.3

Le torri in struttura metallica o in conglomerato cementizio, reticolari o a parete piena, impiegate per elettrodotti, funivie, gru, antenne, pile, sono sempre costituite da sezioni, reali o virtuali, sottili e sottoposte, per loro natura, a carichi orizzontali eccentrici che danno luogo, tra l'altro, a sollecitazioni di tipo torsionale.

L'impiego di elementi in parete sottile a sezione aperta in c.a. o c.a.p. è assai frequente nelle strutture prefabbricate di tipo sia civile che industriale, perché consente di conseguire le massime capacità portanti con il minimo peso. L'insidia maggiore, anche per tali strutture, può nascere da sollecitazioni torsionali impreviste o, comunque, difficilmente individuabili: basti pensare al caso dei canali aerei, molto diffusi per l'adduzione di acque da irrigazione a fini agricoli, che possono risultare sollecitati da coppie torcenti ripartite per effetto di azioni orizzontali da vento o da sisma conseguenti alla eccentricità fra centro di torsione e punto di applicazione della risultante delle dette azioni.

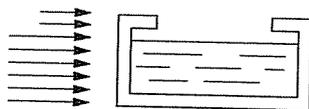
•  
T

Fig. 2.4

Una grandissima diffusione hanno, oggi, gli elementi strutturali in cemento armato, ordinario o precompresso, prefabbricati in stabilimento o a piè d'opera, per la loro utilizzazione come impalcati di piano o di copertura. A fronte della notevole varietà di sezioni impiegate, che vanno da quelle aperte costituite da solette ed elementi nervati a quelle scatolari dotate delle foggie più varie, tutte sono caratterizzate da spessori sottili delle pareti e da una grande diffusione delle aree. La circostanza che tali elementi vengano disposti, in genere, con un interesse superiore alla loro larghezza, comporta, come conseguenza, che essi debbano sopportare anche il carico degli elementi secondari (coppelle o lucernari) che nelle travi di bordo inducono consistenti sollecitazioni torsionali. Né è questo l'unico caso di azioni eccentriche se si pensi che distribuzioni dissimetriche, dei sovraccarichi per gli impalcati di piano o degli eventi meteorici per quelli di copertura, realizzano frequentemente condizioni di torsione.

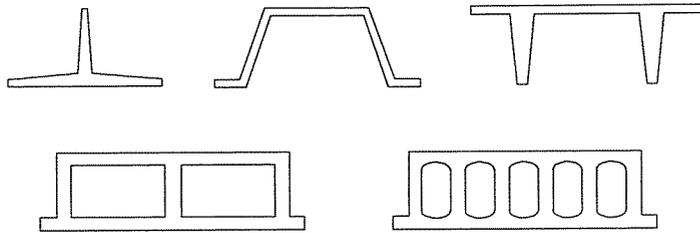


Fig. 2.5

Un discorso a parte meritano gli elementi irrigidenti verticali degli edifici in zona sismica o di quelli definiti *alti*: infatti, le strutture per edifici multipiano sollecitate da carichi orizzontali (sisma o vento), in luogo del tradizionale *sistema intelaiato* presentano sempre più spesso un sistema resistente, a capacità portante concentrata, costituito da nuclei a sezione aperta o scatolare che, per esigenze funzionali (come quelle di accogliere impianti o collegamenti verticali), architettoniche o statiche (come, ad esempio, l'esigenza di interessare aree di fondazione non troppo limitate), sono caratterizzate quasi sempre da ridotti spessori delle pareti e da una diffusa articolazione delle aree in pianta. Tra le azioni cui sono sottoposti tali elementi strutturali, assumono particolare importanza le sollecitazioni torcenti indotte dalla eccentricità esistente tra i centri di torsione dei vari livelli ed i punti di applicazione delle risultanti delle azioni orizzontali: una appropriata valutazione delle rigidezze torsionali diviene, allora, determinante per la corretta ripartizione degli sforzi nelle diverse membrature resistenti.

L'adozione di elementi strutturali in parete sottile comporta essenzialmente due categorie di problemi: una elevata sensibilità nei riguardi dei fenomeni di instabilità che ne possono determinare il collasso, talvolta in maniera imprevista, e l'inadeguatezza della teoria di De Saint Venant, valida per le sole sezioni compatte, a trattarne lo studio; come si dimostrerà ampiamente nel seguito, l'analisi torsionale di simili strutture con la usuale *teoria tecnica delle travi* dà luogo, nella quasi totalità dei casi, a risultati erronei e, perciò, pericolosi.

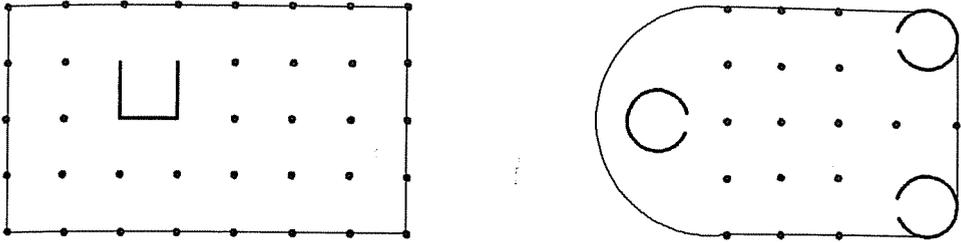


Fig. 2.6

Quest'ultimo asserto si dimostra facilmente pensando entrambe le estremità di una trave libera, avente sezione ad  $I$ , sollecitata da due coppie uguali e contrarie applicate alle ali: al tendere a zero dello spessore dell'anima la trave si ridurrebbe a due sole ali inflesse, per l'intera lunghezza, in maniera opposta che darebbe luogo, lungo tutta la trave, ad uno stato tensionale diverso da zero e ciò in contrasto con il *postulato di De Saint Venant*, secondo il quale oltre la *distanza di estinzione* tale stato tensionale dovrebbe risultare nullo.

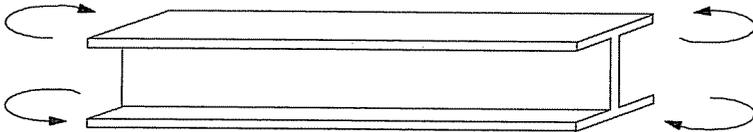


Fig. 2.7

Questo ed altri analoghi ragionamenti condotti per casi simili fanno comprendere come il comportamento, sotto la stessa condizione di carico, di travi a sezione compatta o sottile possa essere molto diverso e ciò, in particolare, per effetto delle sollecitazioni di tipo torsionale che si verificano, molto spesso, senza alcuna evidenza. La cosiddetta *teoria della torsione non uniforme*, messa a punto negli ultimi anni, consente oggi di analizzare, con sufficiente rigore, strutture aventi sezioni sia compatta che sottile, con grado di connessione qualunque.

Nel presente volume viene affrontato lo studio delle travi in parete sottile con riferimento al solo stato tensionale determinabile nell'ambito di una teoria lineare, e particolarmente a quello derivante da azioni torcenti, mentre si rinvia ad altri Testi per quanto riguarda l'analisi dei fenomeni di instabilità.

Sotto il profilo storico va ricordato che le prime ricerche sulle strutture in parete sottile sottoposte a torsione variabile, furono condotte agli inizi del secolo, su travi con sezioni a  $I$ , da S.P. Timoshenko [1] che mise in evidenza l'esistenza di tensioni normali autoequilibrate dovute all'inflessione delle ali. Tali studi ricevettero negli anni '30 notevole impulso nel campo delle costruzioni ae-

ronautiche e, solo più tardi, coinvolsero anche l'ambito della Ingegneria Civile.

Una sistemazione della materia fu affrontata all'inizio degli anni '40 sia dallo stesso Timoshenko [9] che da Vassilii Zakharovitch Vlassov [11], ma il lavoro di quest'ultimo, pubblicato nel 1941 in russo, fu tradotto in inglese solo venti anni dopo: la sua impostazione, nota come *teoria delle aree settoriali*, costituisce una generalizzazione della teoria di De Saint Venant, e fornisce risultati soddisfacenti per le sole sezioni monoconnesse, sempreché siano soddisfatte alcune limitazioni dimensionali. Una estensione dello studio alle sezioni pluriconnesse fu proposto, invece, negli anni successivi da Kärman e Christensen.

La Scuola napoletana ha fornito, nel settore, contributi importanti particolarmente per opera di Raithel [13], Capurso [15], Como [16], Franciosi [19] e di altri Studiosi.

Fra i Testi pubblicati negli ultimi anni vanno, comunque, segnalati quelli di Kollbrunner & Basler [26] e di Murray [34] per ampiezza dei temi trattati e per chiarezza di esposizione.

## 2.2 - Definizioni

L'appellativo di *travi in parete sottile*<sup>2</sup> si attribuisce a quelle strutture monodimensionali le cui sezioni trasversali presentano aree diffuse e, dunque, non definibili solamente tramite una dimensione media caratteristica  $d$  del perimetro esterno, come avviene per le *sezioni compatte*, ma anche mediante uno spessore  $s$  della parete, piccolo rispetto alle altre dimensioni della sezione trasversale<sup>3</sup>.

Al contrario, dunque, delle travi a sezione compatta che sono contraddistinte da un duplice ordine di dimensioni (quelle trasversali molto minori di quella longitudinale), le travi in parete sottile sono caratterizzate da tre dimensioni distinte (ognuna delle quali molto minore delle altre), che sono:

- lo spessore delle pareti;
- la dimensione media caratteristica della sezione;
- la lunghezza della trave.

Data una sezione sottile, la normale in un punto  $A$  ad uno dei bordi, in considerazione della esiguità dello spessore, si può considerare ortogonale anche al bordo opposto in  $B$ : il segmento  $\overline{AB}$ , che si definisce *corda*, costituisce lo spessore  $s$  della sezione nel punto  $P$ , medio di  $\overline{AB}$ , ed il luogo dei punti medi prende il nome di *linea media della sezione*<sup>4</sup>; data l'esiguità dello spessore il materiale della sezione si può considerare tutto addensato lungo essa. Assegnato su detta

<sup>2</sup> Thin-walled beams.

<sup>3</sup> A loro volta già molto minori della lunghezza  $L$  della trave, in maniera che risulti  $s \ll d \ll L$ , ovvero, secondo Vlassov:  $L > 10 \cdot d > 10 \cdot s$ .

<sup>4</sup> Centre line o middle line.

linea media un punto di origine  $O$  ed un verso di percorrenza (orientamento), è possibile definire un sistema di ascisse curvilinee  $c$ , in funzione delle quali individuare la posizione del generico punto  $P(c)$  e della corrispondente corda di spessore  $s(c)$ , ortogonale ai bordi della sezione o meglio alla tangente alla linea media in  $P$ . Per definire il verso di percorrenza di tale linea, l'ascissa curvilinea  $c$  si assume positiva se procede in verso levogiro rispetto ad un osservatore disteso lungo l'asse  $z$  con i piedi nell'origine e la testa orientata secondo il verso positivo. Appare quasi superfluo notare che, potendosi la posizione del generico punto  $P$  definire sia tramite l'ascissa curvilinea  $c$  che attraverso le coordinate cartesiane  $x$  ed  $y$ , qualunque grandezza legata al punto  $P$  potrà essere ritenuta indifferentemente funzione di  $c$  o di  $x$  ed  $y$ .

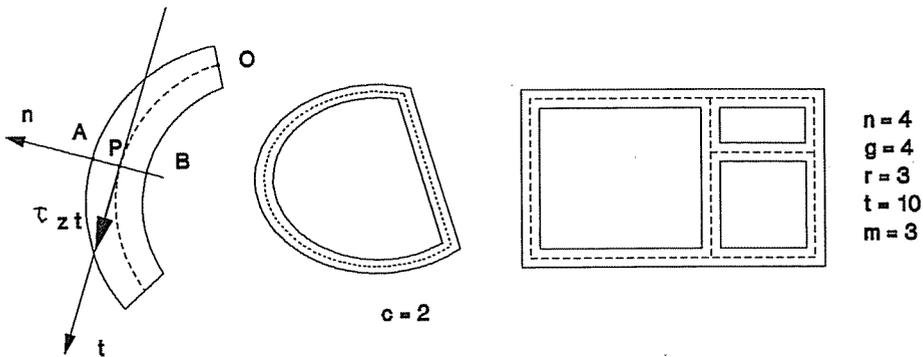


Fig. 2.8

Detta linea media, la cui lunghezza  $C$  è data dall'integrale di  $dc$ , può risultare aperta o formare una maglia chiusa: la sezione si definisce *monoconnessa* nel primo caso e *biconnessa* nel secondo.

Ove, invece, la linea media formi più maglie, la sezione viene detta *pluri-connessa* e per essa è possibile individuare molteplici elementi quali:

- i *nodi*  $n$ , che rappresentano punti di diramazione;
- i *gomiti*  $g$ , che sono i punti nei quali la linea presenta improvvise variazioni di direzione, formando angoli;
- i *rami*  $r$ , che costituiscono la parte di linea compresa tra due nodi;
- i *tratti*  $t$ , che rappresentano la parte di linea compresa fra due gomiti o fra un gomito ed un nodo o rami privi di gomiti;
- le *maglie*  $m$ , insieme di più tratti, che costituiscono una linea chiusa priva, al suo interno, di altri tratti.

Tali elementi soddisfano sempre la relazione:  $m + n = r + 1$ .

Detto  $c$  il grado di connessione di una sezione, risulta per definizione:  $c = m + 1$  per cui, in conclusione, nel seguito si definiranno<sup>5</sup>:

<sup>5</sup> Rispettivamente: *open cross-section*, *single-celled cross section* e *multi-celled cross section*.

- *monocollesse*    le sezioni (aperte) per le quali  $c = 1$ ;
- *biconnesse*        le sezioni (chiuse) per le quali  $c = 2$ ;
- *pluriconnesse*    le sezioni (chiuse) per le quali  $c > 2$ .

Ad evitare equivoci va osservato che, anche se sotto il profilo lessicale le sezioni biconnesse dovrebbero rientrare fra quelle pluriconnesse, si ritiene utile mantenere tale distinzione attesa la differenza di comportamento che caratterizza le sezioni costituite da una sola maglia rispetto a quelle dotate di più maglie.

### 2.3 - *Lo stato di tensione e di deformazione*

Come si vedrà bene nel seguito, le strutture sottili risultano particolarmente sensibili alle sollecitazioni da taglio e da torsione, il che induce a riprendere e ad approfondire tali temi.

Lo stato tensionale tangenziale piano delle travi a sezione compatta, definito in generale da due componenti in ogni punto, presenta, nel caso delle sezioni sottili, una ulteriore semplificazione. Data, infatti, la piccolezza dello spessore dei singoli tratti, è lecito, per essi, ipotizzare che in ogni punto, delle due componenti  $\tau_{zt}$  e  $\tau_{zn}$ , rispettivamente tangente e normale alla linea media, la seconda risulti sempre nulla: ciò perché tale componente, data l'esiguità dello spessore, dovendo risultare nulla in corrispondenza dei punti sul bordo (per essere scarica la superficie laterale), si può ritenere nulla lungo l'intera corda. In conclusione, allora, lo stato tensionale tangenziale di una sezione sottile all'ascissa longitudinale  $z$  sarà definito, in ogni punto  $P(c)$ , da una sola componente di tensione (quella tangente) funzione dell'ascissa curvilinea  $c$ . Non potendosi dare luogo ad alcun equivoco si potrà adottare, indifferentemente, una qualunque delle seguenti simbologie del tutto equivalenti:

$$\tau_{zt} = \tau_z(c, z) = \tau_z$$

In ordine allo stato di deformazione, l'ipotesi, dovuta a Jacob Bernoulli, di *conservazione delle sezioni piane*, valida per le sezioni compatte trattate dalla teoria di De Saint Venant, va sostituita, nel caso di travi in parete sottile, con quella di *contorno indeformabile della sezione nel proprio piano* dovuta a Vlasov, ovvero dall'ipotesi che la sezione, sottoposta a caratteristiche della sollecitazione interna anche variabili, pur ingobbandosi, mantenga invariata la forma del suo contorno e, dunque, la sua proiezione sul piano normale all'asse della trave subisca soli moti rigidi senza alcuna perdita di forma. Ciò significa ritenere la sezione indeformabile nel proprio piano anche per le sollecitazioni di sforzo normale e flessione, il che equivale a supporre nullo il modulo di Poisson. Perché tale ipotesi sia tecnicamente soddisfatta è necessario che le travi in parete

sottile siano dotate di diaframmi<sup>6</sup> ortogonali all'asse o irrigidimenti perimetrali che, pur consentendo gli ingobbamenti della sezione, ne garantiscano la conservazione della forma, impedendo che la geometria della sezione trasversale si modifichi e che si verifichino fenomeni di instabilità locale. Sotto il profilo analitico tali vincoli, pur non influenzando le componenti di spostamento assiali  $w$ , consentono di ricavare le  $u$  e  $v$  mediante la sola rotazione rigida  $\theta$  della sezione.

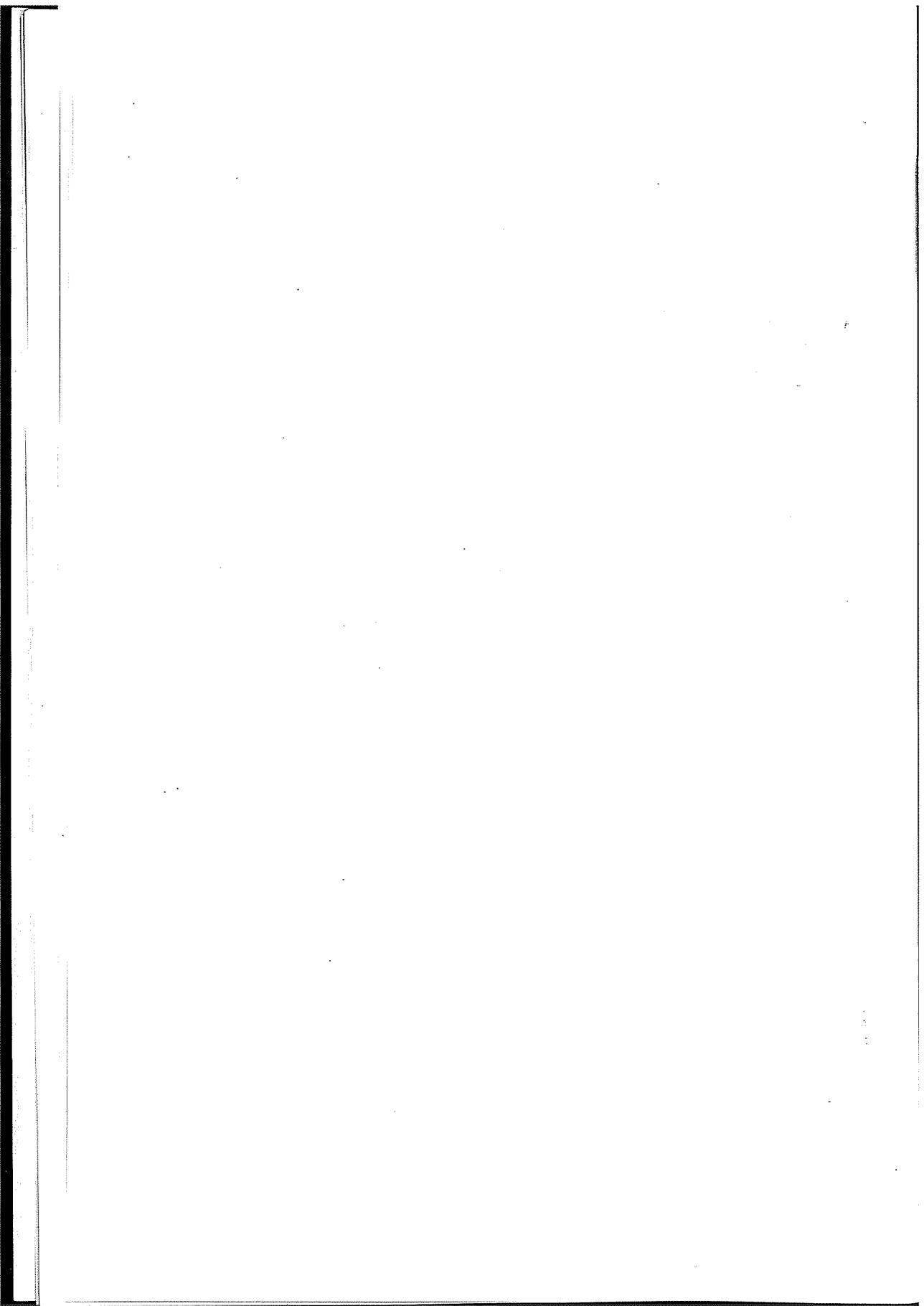
Per quanto riguarda, dunque, le strutture in parete sottile, l'ipotesi di piccolezza degli spostamenti si può ancora ritenere valida, e con essa il principio di sovrapposizione degli effetti, purché si ipotizzi *indeformabile* il contorno della sezione.

Nonostante tale ipotesi, però, i risultati del De Saint Venant non sono applicabili per qualunque tipo di sollecitazione. Infatti, supponendo la trave costituita da infiniti conci elementari, mentre nel caso di *flessione non uniforme* l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane fa sì che a deformazione avvenuta sia rispettata la congruenza interna fra i diversi conci e, così, nel caso di *torsione uniforme* si può pensare che ogni concio subisca la stessa rotazione e lo stesso ingobbamento, per essere costantemente uguali le coppie torcenti applicate, lo stesso non accade nel caso di sollecitazione dovuta a *torsione non uniforme*. Allorché, infatti, la caratteristica torcente varia lungo l'asse della trave, gli ingobbamenti non risultano più uguali per tutte le sezioni e viene meno il rispetto della compagine interna: lo stato di sollecitazione interna necessario per ripristinare tale congruenza si definisce *secondario* ed è determinabile mediante la *teoria della torsione non uniforme*.

Quando l'ipotesi di indeformabilità del contorno non è soddisfatta, neppure tale teoria è più applicabile ed occorre, allora, rivolgersi ad altri metodi di indagine quali, ad esempio, i *metodi di discretizzazione*.

Va osservato, infine, come le travi in parete sottile presentino una elevatissima vulnerabilità nei riguardi dei fenomeni di instabilità, sia locale che globale, particolarmente per la loro naturale sensibilità nei riguardi delle imperfezioni che sono dello stesso ordine di grandezza degli spessori delle sezioni.

<sup>6</sup> Shear diaphragms.



## Capitolo terzo

### La sollecitazione di taglio

#### 3.1 - Le tensioni nelle sezioni monoconnesse

La trattazione di Jourawsky, basata sull'ipotesi che le componenti di tensione indotte dalla sollecitazione tagliante lungo una qualunque corda si possano confondere con il loro valore medio, risulta particolarmente attendibile nel caso delle sezioni sottili. Al riguardo va precisato che l'ipotesi di distribuzione costante lungo tutta la corda è accettabile per i soli tratti rettilinei della sezione, aperta o chiusa che sia, ma lo è meno per i tratti curvilinei. Tale trattazione, inoltre, pur non essendo valida in rigore per le sezioni compatte, trova egualmente applicazione per queste in considerazione del fatto che, per esse, le sollecitazioni da taglio sono meno pericolose.

Nel seguito tali tensioni verranno indicate con il simbolo  $\tau_z^{(0)}(c)$  o più spesso, per comodità di scrittura, con il solo simbolo  $\tau^{(0)}$  omettendo, cioè, sia il pedice che la dipendenza dalla ascissa curvilinea.

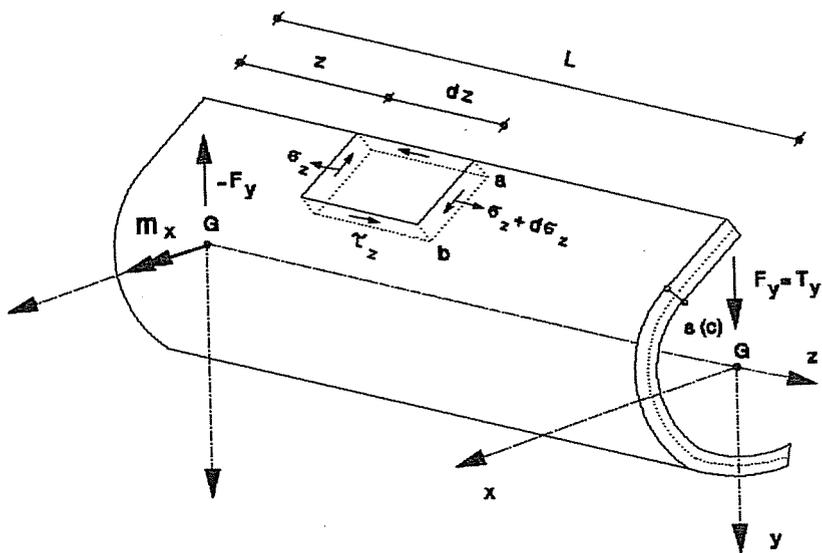


Fig. 3.1

Si consideri la generica trave in parete sottile di spessore  $s$  e lunghezza  $L$ , rappresentata in figura 3.1, libera da vincoli e sollecitata, nella sezione terminale dalla forza tagliante  $F_y$  e in quella iniziale, per l'equilibrio, dalla forza  $-F_y$  e dalla coppia  $\mathfrak{M}_x = F_y \cdot L$ .

Si osservi che le forze taglianti vengono applicate, momentaneamente, all'asse baricentrico perché solo una volta noto lo stato tensionale sarà possibile, mediante un'equazione di equilibrio alla traslazione, definire la posizione della retta di applicazione del carico che induce esclusivamente sollecitazioni da taglio.

Si assuma un sistema di riferimento  $x, y, z$ , con gli assi  $x, y$  principali di inerzia e l'origine nel baricentro  $G$  della sezione, che, per semplicità, si suppone coincidente con il *centro di taglio* che verrà definito nel seguito.

Si isoli l'elemento di trave di lunghezza  $dz$  e larghezza  $\widehat{ab}$ , ottenuto sezionando con due piani ortogonali a  $z$  e con uno ad esso parallelo in corrispondenza della corda all'ascissa curvilinea  $c$  lungo la quale si vogliono determinare le tensioni tangenziali da taglio.

Dette  $\sigma_z^{(1)}$  e  $\sigma_z^{(1)} + d\sigma_z^{(1)}$  le tensioni normali applicate all'elemento nelle sezioni alle ascisse  $z$  e  $z + dz$ , per l'equilibrio alla traslazione in direzione  $z$  dovrà essere:

$$\tau^{(0)}(c) \cdot s(c) \cdot dz - \int_{A_c} \sigma_z^{(1)} \cdot dA + \int_{A_c} \sigma_z^{(1)} \cdot dA + \int_{A_c} d\sigma_z^{(1)} \cdot dA = 0$$

con  $A_c$  area della parte di sezione di spessore  $s$  e lunghezza  $\widehat{ab}$ .

Essendo:

$$\sigma_z^{(1)}(z) = \frac{M_y(z)}{I_{yy}} \cdot y = -T_y \cdot \frac{L-z}{I_{yy}} \cdot y$$

con  $I_{yy}$  momento d'inerzia rispetto all'asse neutro  $x$ , risulterà:

$$d\sigma_z^{(1)} = \frac{\partial \sigma_z^{(1)}}{\partial z} \cdot dz = \frac{T_y}{I_{yy}} \cdot y \cdot dz$$

Per sostituzione nell'equazione di equilibrio, il flusso<sup>1</sup> vale dunque:

$$\tau^{(0)}(c) \cdot s(c) = - \frac{T_y}{I_{yy}} \cdot \int_{A_c} y \cdot dA$$

e ponendo:

$$\int_{A_c} y \cdot dA = I_y(c)$$

momento statico dell'area che precede la corda rispetto all'asse neutro della fles-

<sup>1</sup> Shear flow.

sione, risulta la formula di Jourawsky:

$$\tau^{(0)} = \tau^{(0)}(c) = \tau_z^{(0)}(c) = - \frac{T_y \cdot I_y(c)}{I_{yy} \cdot s(c)}$$

nella quale  $s = s(c)$  rappresenta lo spessore della corda in corrispondenza della quale si vuole calcolare la tensione.

Volendo conoscere la legge di variazione delle  $\tau^{(0)}(c)$  lungo la linea media della sezione, basta derivare rispetto all'ascissa curvilinea. Nel caso particolare di tratti a spessore costante risulta:

$$\frac{d\tau^{(0)}(c)}{dc} = - \frac{T_y}{I_{yy} \cdot s} \cdot \frac{dI_y(c)}{dc}$$

ed essendo  $dI_y(c) = s \cdot dc \cdot y$  con  $y$  distanza dell'area elementare  $s \cdot dc$  dall'asse neutro, si ha<sup>2</sup>:

$$\frac{d\tau^{(0)}(c)}{dc} = - \frac{T_y}{I_{yy}} \cdot y$$

Si può subito osservare che tale valore rappresenta, altresì, la divergenza del vettore  $\tau^{(0)}$  essendo per definizione, in tale caso di sollecitazione:

$$\operatorname{div} \tau^{(0)} = \frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial z} = \frac{d\tau^{(0)}}{dc} = - \frac{T_y}{I_{yy}} \cdot y$$

Applicando, viceversa, la definizione di rotazione al campo vettoriale delle tensioni tangenziali da taglio, per le ipotesi fatte, risulta l'equazione:

$$\operatorname{rot} \tau^{(0)} = 0$$

che conferma, peraltro, la costanza di tali tensioni lungo lo spessore della generica corda.

Dalla espressione di  $\operatorname{div} \tau^{(0)}$ , che definisce la pendenza del diagramma delle tensioni tangenziali da taglio in ogni punto, si evince che il valore massimo viene attinto per  $d\tau^{(0)}(c)/dc = 0$  ovvero per  $y = 0$  e cioè sull'asse neutro ove le tensioni normali da flessione risultano nulle; l'inclinazione dipende, inoltre, linearmente da  $y$ .

Allorchè in un punto si verifica una discontinuità dello spessore, risultando per una data corda costante il prodotto  $T_y \cdot I_y / I_{yy}$ , dovrà essere tale anche il flusso delle tensioni  $\tau^{(0)}(c) \cdot s(c)$ , ovvero  $\tau^{(0)}(c)$  inversamente proporzionale allo spessore.

<sup>2</sup> Espressione accettabile anche nel caso di spessori leggermente variabili.

In corrispondenza di un nodo nel quale confluiscono  $n$  rami, invece, per l'equilibrio, in virtù del principio di simmetria delle tensioni tangenziali, dovrà risultare nulla la somma algebrica dei flussi  $\tau_i^{(0)} \cdot s_i = (\tau^{(0)} \cdot s)_i$  relativi ai singoli rami:

$$\sum_1^n (\tau^{(0)} \cdot s)_i \cdot dz = 0,$$

ovvero:

$$\sum_1^n \tau_i^{(0)} \cdot s_i = 0$$

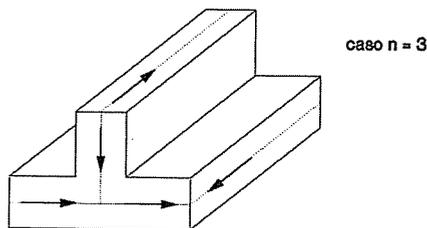


Fig. 3.2

Ciò comporta che la tensione tangenziale da taglio nel ramo  $n$ -mo sia fornita dalla espressione:

$$\tau_n^{(0)} = \frac{\sum_1^{n-1} \tau_i^{(0)} \cdot s_i}{s_n}$$

Relazioni del tutto analoghe a quelle testé ricavate valgono, ovviamente, nel caso in cui la forza tagliante sia applicata alla sezione in direzione  $x$ , ottenendo in particolare:

$$\tau^{(0)} = \tau^{(0)}(c) = \tau_z^{(0)}(c) = - \frac{T_x \cdot I_x(c)}{I_{xx} \cdot s(c)} ; \quad \frac{d\tau^{(0)}(c)}{dc} = - \frac{T_x}{I_{xx}} \cdot x$$

Per una sezione sottile aperta comunque ramificata, a tratti rettilinei o leggermente curvilinei, a spessore costante o debolmente variabile lungo  $z$ , è dunque possibile, partendo da una sezione di estremità ( $\tau^{(0)} = 0$  e  $I_y = 0$ ), tracciare l'intero diagramma delle  $\tau^{(0)}(c)$  da taglio. Sarà sufficiente, infatti, determinare negli estremi di ogni ramo i valori delle  $\tau^{(0)}(c)$  e delle tangenti: il diagramma avrà andamento lineare nei tratti paralleli all'asse neutro e parabolico negli altri.

### 3.2 - Il centro di taglio nelle sezioni monoconnesse

Si consideri una sezione monoconnessa sollecitata da una forza tagliante  $F_y = T_y$  applicata al baricentro e diretta secondo l'asse  $y$ .

Il momento risultante delle  $\tau^{(0)}$  rispetto ad un qualunque polo  $Q$  vale:

$$M_Q = \int_A \tau^{(0)}(c) \cdot dA \cdot r = - \frac{T_y}{I_{yy}} \cdot \int_C I_y(c) \cdot r \cdot dc$$

avendo indicato con  $C$  la lunghezza  $\widehat{AB}$  della linea media della sezione e con  $r$  la distanza dell'area elementare  $dA = s(c) \cdot dc$  dal polo  $Q$  valutata normalmente alla direzione della forza  $\tau^{(0)}(c) \cdot dA$ .

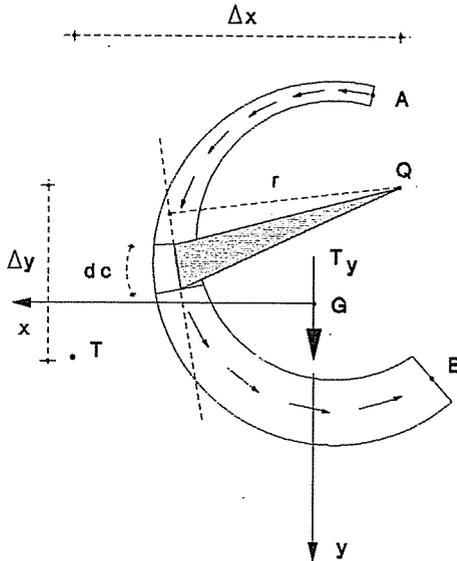


Fig. 3.3

Avendo definito<sup>3</sup> *area settoriale elementare di polo Q* il prodotto  $r \cdot dc = d\omega_Q$ , ovvero il doppio dell'area descritta dal raggio vettore di polo  $Q$  nel percorrere l'arco  $dc$ , assunta positiva per rotazione levogira, si può scrivere:

$$M_Q = - \frac{T_y}{I_{yy}} \cdot \int_C I_y(c) \cdot d\omega_Q$$

Integrando per parti risulta:

$$\int_C I_y(c) \cdot d\omega_Q = \left[ I_y(c) \cdot \omega_Q \right]_A^B - \int_C \omega_Q \cdot dI_y(c) = - \int_C \omega_Q \cdot dI_y(c)$$

per essere  $I_y(c) = 0$  negli estremi  $A$  e  $B$ .

Essendo ancora  $dI_y = s \cdot dc \cdot y = y \cdot dA$  si ottiene:

<sup>3</sup> Il concetto di *area settoriale* fu introdotto da Vlassov.

$$\int_C I_y(c) \cdot d\omega_Q = - \int_A \omega_Q \cdot y \cdot dA$$

ovvero:

$$M_Q = \frac{T_y}{I_{yy}} \cdot \int_A \omega_Q \cdot y \cdot dA$$

ove  $\omega_Q$  rappresenta l'area settoriale di polo  $Q$  del generico punto  $P(c)$ .

Indicando con  $T$  il polo rispetto al quale è nullo il momento risultante delle tensioni tangenziali da taglio, esso sarà definito dalla condizione:

$$M_T = \frac{T_y}{I_{yy}} \cdot \int_A \omega_T \cdot y \cdot dA = 0$$

che è soddisfatta solamente se:

$$\int_A \omega_T \cdot y \cdot dA = 0$$

Potendosi dimostrare che, con le convenzioni adottate, è verificato il seguente teorema di trasporto:

$$\int_A \omega_T \cdot y \cdot dA = \int_A \omega_Q \cdot y \cdot dA - \Delta_x \cdot I_{yy}$$

ove  $\Delta_x$  è la componente secondo  $x$  della distanza  $\overline{QT}$ , dovrà essere altresì:

$$\int_A \omega_Q \cdot y \cdot dA - \Delta_x \cdot I_{yy} = 0$$

da cui:

$$\Delta_x = \frac{\int_A \omega_Q \cdot y \cdot dA}{I_{yy}} = \frac{I_{\omega_y}^Q}{I_{yy}}$$

La distanza  $\Delta_x$  rappresenta, dunque, l'eccentricità che la forza tagliente  $F_y$  deve possedere rispetto al generico polo  $Q$  per indurre tensioni tangenziali da taglio ma non da torsione.

Analogamente, è possibile dimostrare che, sollecitando la sezione con una forza tagliente  $F_x = T_x$ , la componente secondo  $y$  della distanza  $\overline{QT}$  vale:

$$\Delta_y = - \frac{\int_A \omega_Q \cdot x \cdot dA}{I_{xx}} = - \frac{I_{\omega_x}^Q}{I_{xx}}$$

Il punto  $T$  venne definito da Robert Maillart *centro di taglio* e risulta, pertanto, individuato dalle seguenti coordinate:

$$x_T = x_Q + \Delta_x = x_Q + I_{\omega y}^Q / I_{yy}$$

$$y_T = y_Q + \Delta_y = y_Q - I_{\omega x}^Q / I_{xx}$$

Ove si scelga il polo  $Q$  delle aree settoriali coincidente con il baricentro  $G$  della sezione, origine del riferimento, (essendo in tale ipotesi  $x_Q = y_Q = 0$ ) le coordinate del centro di taglio assumono le espressioni:

$$x_T = + I_{\omega y}^G / I_{yy}$$

$$y_T = - I_{\omega x}^G / I_{xx}$$

La posizione di  $T$  risulta, dunque, indipendente dalla forza applicata e, come il baricentro, dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche della sezione<sup>4</sup>.

Per definizione, allora, se si sollecita una sezione con una forza  $F$ , comunque orientata, avente componenti cartesiane  $F_x$  ed  $F_y$ , possono verificarsi due distinte circostanze:

- se la retta di applicazione di  $F$  passa per il centro di taglio  $T$ , la forza induce tensioni tangenziali dovute solamente a taglio;
- ove la retta di applicazione del carico non passi per il punto  $T$ , la sezione, oltre alle tensioni tangenziali taglianti indotte da  $F$ , è sottoposta anche alle tensioni tangenziali da torsione provocate dal momento torcente prodotto dalla forza  $F$  per la distanza della sua retta d'azione dal centro di taglio. Nel caso particolare di sollecitazione baricentrica tale momento torcente vale:

$$M_z = T_x \cdot y_T + T_y \cdot x_T$$

Può dirsi, allora, che perché una forza applicata ad una sezione non induca torsione, e dunque si verifichino sole traslazioni in assenza di rotazioni, la sua retta di azione deve necessariamente passare per il centro di taglio.

Ciò comporta, ad esempio, che le sezioni monoconnesse, già sotto l'effetto del solo peso proprio, presentino inattese sollecitazioni da torsione tutte le volte che l'elemento è orientato in maniera tale da non presentare baricentro (al quale

<sup>4</sup> Sotto il profilo storico va ricordato lo studio sperimentale condotto nel 1909 da Bach, su travi con sezione a  $C$ , per le quali evidenziò come carichi verticali, anche baricentrici, producano sempre sollecitazioni da torsione, a meno che non passino per il centro di taglio: egli individuò, sperimentalmente, tale punto ricercando la posizione della forza che dava luogo a sole traslazioni e non a rotazioni.

si può supporre applicata la risultante della forza peso) e centro di taglio allineati sulla medesima verticale.

La determinazione del centro di taglio  $T$  può essere anche perseguita in modo diverso, con metodo grafico-analitico.

Considerato, infatti, che la risultante  $R_i$  delle  $\tau_i^{(0)}$  per ogni tratto  $i$  ha intensità proporzionale all'area del diagramma e può considerarsi applicata alla linea media del tratto di sezione considerato, e che la retta d'azione  $r$  della risultante  $R$  delle  $R_i$  passa certamente per il centro di taglio (essendo per definizione  $T$  il punto rispetto a cui il momento risultante delle  $\tau_i^{(0)}$  è nullo), se si assumono gli assi  $x$  ed  $y$  principali d'inerzia, applicando alla sezione generica una forza  $F_x = 1$ , si può determinare la retta di applicazione  $r_x$  della risultante  $R_x = \sum_i R_{x_i}$  delle  $\tau_i^{(0)}$  (tale  $r_x$  passerà per l'intersezione del primo e dell'ultimo lato del poligono funicolare). Applicando successivamente una forza  $F_y = 1$  alla stessa sezione e determinata, anche in tale caso, la retta d'azione  $r_y$  della risultante  $R_y = \sum_i R_{y_i}$  delle  $\tau_i^{(0)}$ , il centro di taglio verrà individuato dall'intersezione delle due rette  $r_x$  ed  $r_y$ . Seguendo tale ragionamento, risulta immediata la determinazione di  $T$  per le sezioni costituite da due soli tratti: esso è, infatti, definito dal punto di intersezione delle linee medie dei detti tratti, dovendo passare per esso la risultante delle  $\tau_i^{(0)}$ . Con buona approssimazione ciò può ritenersi vero altresì per le sezioni monoconnesse dotate di un unico nodo, anche in presenza di piccole variazioni di spessore.

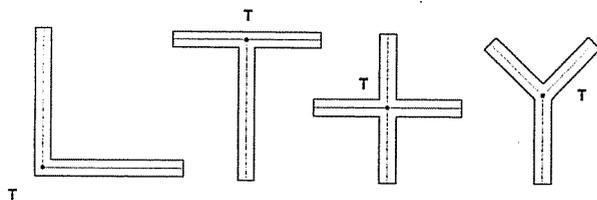


Fig. 3.4

Il centro di taglio può, in conclusione, essere ricavato anche come intersezione delle rette di applicazione delle risultanti delle tensioni  $\tau_i^{(0)}$  indotte da due forze unitarie, applicate separatamente secondo le direzioni degli assi principali d'inerzia.

### Problema 3.1

Determinare il centro di taglio della sezione sottile in figura 3.5.

Supponendo le aree addensate lungo la linea media risulta:

$$I_{yy} = \frac{h^2}{12} \cdot (h \cdot s_2 + 6b \cdot s_1)$$

e scegliendo il polo  $Q$  come in figura:

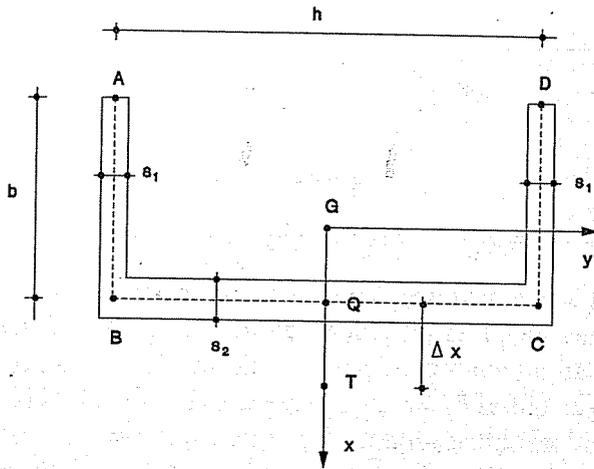


Fig. 3.5

$$x_Q = \frac{b^2 \cdot s_1}{2b \cdot s_1 + h \cdot s_2}$$

Essendo  $x$  asse di simmetria sarà:  $y_T = 0$ .

L'ascissa  $x_T$  potrà determinarsi, invece, con uno dei metodi descritti.

Utilizzando le espressioni analitiche innanzi ricavate, deve essere:

$$\Delta_x = \frac{I_{\omega_y}^Q}{I_{yy}} = \frac{\int_A \omega_Q \cdot y \cdot dy}{I_{yy}}$$

Fissati due sistemi locali di ascisse  $\xi$  uguali per simmetria, rispettivamente di origine  $B$  e  $C$ , i valori che  $\omega_Q(c)$  assume sono:

- nei tratti  $Q-B$  e  $Q-C$ :  $\omega_Q(c) = 0$
- nel tratto  $B-A$ :  $\omega_Q(c) = -h \cdot \xi/2$
- nel tratto  $C-D$ :  $\omega_Q(c) = h \cdot \xi/2$

ove  $\omega_Q(c) > 0$  quando il raggio vettore ruota in senso levogiro.

Essendo  $y$  costante nei tratti  $B-A$  e  $C-D$  e pari a  $\mp h/2$  risulta:

$$\int_A \omega_Q \cdot y \cdot dA = 2 \cdot \int_0^b \left( \frac{h}{2} \cdot \xi \right) \cdot \frac{h}{2} \cdot s_1 \cdot d\xi = \frac{h^2 \cdot b^2 \cdot s_1}{4}$$

e dunque:

$$\Delta_x = \frac{3b^2 \cdot s_1}{h \cdot s_2 + 6b \cdot s_1}$$

ovvero:

$$x_T = x_Q + \Delta_x = \frac{b^2 \cdot s_1}{2b \cdot s_1 + h \cdot s_2} + \frac{3b^2 \cdot s_1}{h \cdot s_2 + 6b \cdot s_1}$$

Nel caso particolare  $s_1 = s_2 = s$  ed  $h = 2b$  risulta:

$$x_Q = b/4; \quad \Delta_x = 3b/8; \quad x_T = 5b/8$$

In alternativa a tale metodo, si può operare determinando le risultanti  $R_i$  delle tensioni  $\tau_i^{(0)}$  nei singoli rami, indotte da  $R_y = 1$  e calcolandone il momento risultante rispetto ad un qualunque polo  $P$ : tale valore, diviso per l'unità, rappresenta il braccio  $\Delta_x$  che la  $R_y = 1$  deve possedere rispetto a  $P$  perché il momento risultante delle  $\tau_i^{(0)}$  sia nullo e, dunque, definisce la posizione del centro di taglio.

Le tensioni tangenziali nelle estremità dei singoli tratti valgono:

$$\begin{aligned} \tau_A^{(0)} = \tau_D^{(0)} &= 0 \\ \tau_B^{(0)} = -\tau_C^{(0)} &= \frac{6b}{h \cdot (h \cdot s_2 + 6b \cdot s_1)} \end{aligned}$$

ed i diagrammi sono del tipo esemplificato di seguito.

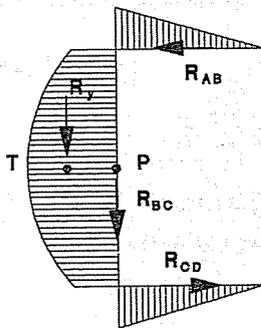


Fig. 3.6

Indicando con  $R_i$  le risultanti delle tensioni e scegliendo  $P$  come in figura, non è necessario determinare  $R_{BC}$  perché il suo momento rispetto a  $P$  risulta nullo. Sarà dunque:

$$R_{AB} = -R_{CD} = \frac{3b^2 \cdot s_1}{h \cdot (h \cdot s_2 + 6b \cdot s_1)}$$

Imponendo che il momento risultante delle  $R_{AB}$ ,  $R_{BC}$ ,  $R_{CD}$  rispetto al punto  $P$  sia nullo, ovvero che la coppia interna  $R_{AB} \cdot h$  sia uguale alla coppia esterna  $R_y \cdot \Delta_x$ , si ha:

$$\frac{3b^2 \cdot s_1}{h \cdot (h \cdot s_2 + 6b \cdot s_1)} \cdot h = 1 \cdot \Delta_x$$

da cui:

$$\Delta_x = \frac{3b^2 \cdot s_1}{h \cdot s_2 + 6b \cdot s_1}$$

### 3.3 - Le tensioni nelle sezioni bi o pluri-connesse

Per la determinazione delle tensioni tangenziali da taglio si può procedere operando  $m$  sconnessioni delle maglie in modo da rendere la sezione monoconnessa e determinando, per essa, i diagrammi delle tensioni, che indicheremo con  $\bar{\tau}$ , secondo le modalità esposte in precedenza. Dette  $\tau_j^*$  le tensioni tangenziali incognite in corrispondenza delle sconnessioni effettuate, i valori delle tensioni finali  $\tau^{(0)}$  si otterranno dalla somma, punto per punto, dei valori di  $\bar{\tau}$  e di  $\tau_j^*$ .

Per il rispetto della compagine interna della sezione, che impone l'assenza di scorrimenti tra le facce opposte ove si sono operate le sconnessioni, occorre applicare ad ogni maglia interrotta il *teorema di Stokes* che, per essere nel caso specifico  $\text{rot } \tau^{(0)} = 0$ , si traduce nell'imporre la condizione di nullo alla circuitazione delle tensioni tangenziali da taglio per ogni maglia e dunque nello scrivere tante equazioni di congruenza, quante sono le  $m$  maglie, del tipo:

$$\oint_j \tau^{(0)}(c) \cdot dc = \oint_j [\bar{\tau}(c) + \tau_j^*] \cdot dc = 0 \quad \forall j \in \{1, m\}$$

ove l'integrale al primo membro può essere espresso come somma degli integrali estesi ai singoli tratti di cui si compone la maglia, ognuno dei quali costituito da due addendi, uno derivante dall'aliquota variabile delle  $\bar{\tau}(c)$  determinate sulla sezione resa monoconnessa, l'altro dall'aliquota costante relativa alla tensione incognita  $\tau_j^*$  che ripristina la congruenza.

Tale sistema di equazioni fornisce gli  $m$  valori delle  $\tau_j^*$  che, sommati a quelli già calcolari delle  $\bar{\tau}(c)$ , consentono di ottenere le tensioni tangenziali totali  $\tau^{(0)}(c)$  relative alla sezione pluriconnessa in esame.

### 3.4 - Il centro di taglio nelle sezioni bi o pluri-connesse

Sussistendo nella maggior parte dei casi condizioni di doppia simmetria, nelle sezioni chiuse si avrà, in generale, coincidenza fra centro di taglio e baricentro.

Ove tali condizioni non si verificano si potranno adottare ancora le formulazioni che esprimono le coordinate del centro di taglio già ricavate per le sezioni

monoconnesse purché si sostituisca all'area settoriale  $\omega_G$  la *distanza areale*  $\lambda_G$  che verrà definita nel seguito trattando l'ingobbamento delle sezioni chiuse.

Nel caso di sezioni pluriconnesse si può dimostrare, con procedimento analogo a quello adottato per le sezioni monoconnesse, che le coordinate del centro di taglio sono definite dalle espressioni generali:

$$x_T = I_{\lambda y}^G / I_{yy} ; \quad y_T = - I_{\lambda x}^G / I_{xx}$$

valide per sezioni dotate di grado di connessione qualunque. Allo stesso risultato si perverrà altresì, seppure con alcune limitazioni, nel par. 4.4.2.2.

## Capitolo quarto

### La sollecitazione di torsione

#### 4.1 - Generalità

Quando la risultante dei carichi esterni non passa per il centro di taglio della sezione, si induce nella trave una sollecitazione da torsione che, nel caso più generale, dà luogo a due distinti stati tensionali (legati alle caratteristiche torcenti interne che si diranno *primaria* e *secondaria*) di cui il primo puramente tangenziale ed il secondo, di tipo membranale, comprendente anche tensioni normali.

Nel seguito, e per l'intera trattazione relativa alla torsione, le caratteristiche della sollecitazione esterna ed interna si indicheranno semplicemente con i simboli  $\mathfrak{M}$  ed  $M$ , mentre con  $M^{(1)}$  ed  $M^{(2)}$  si contrassegneranno, rispettivamente, le aliquote primaria e secondaria di cui si compone la caratteristica torcente interna  $M$ .

L'intuizione immediata della coesistenza delle due aliquote, nel caso di travi in parete sottile sottoposte a torsione, si ha osservando il semplice esempio in figura, ove la deformazione può considerarsi effetto di due sollecitazioni distinte.

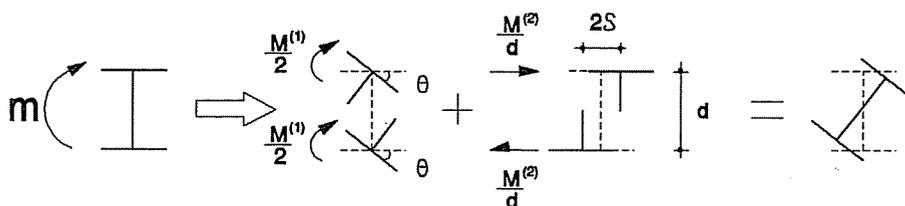


Fig. 4.1

Pur essendo le dette caratteristiche di sollecitazione sempre funzione dell'ascissa  $z$ , per semplicità di scrittura, tale dipendenza si ometterà quasi sempre nel seguito.

4.2 - *La torsione uniforme*

Il problema, risolto con la teoria classica della elasticità dal De Saint Venant nel 1853, studia il caso della trave libera da vincoli sollecitata alle estremità da due coppie torcenti uguali ed opposte: si parla in tale caso di torsione *pura* o *uniforme* (essendo costante la caratteristica torcente lungo l'asse), o *alla De Saint Venant* (essendo il carico applicato esclusivamente sulle estremità della trave e nullo lungo la superficie laterale).

Indicando con  $M^{(1)}$  la caratteristica torcente interna, che in tale caso si definisce *primaria*, la rotazione torsionale relativa tra due sezioni a distanza unitaria, cui si dà l'appellativo di *angolo unitario di torsione* o *angolo specifico di torsione* e che si indica con il simbolo  $\theta'$  o con  $\theta^{(1)}$ , ha dimensioni  $[L^{-1}]$  e vale:

$$\theta' = \frac{M^{(1)}}{G \cdot I^*} = \frac{M^{(1)}}{k^{(1)}}$$

espressione costante al variare della sezione (e del tutto analoga a quella della curvatura di una trave sollecitata a flessione semplice) per la quale è:

$G$  il modulo di elasticità tangenziale;  
 $I^*$  una grandezza legata alla geometria della sezione che possiede le dimensioni  $[L^4]$  e si definisce *modulo di torsione* o *momento di inerzia primario*;

$k^{(1)} = G \cdot I^*$  la *rigidezza torsionale primaria*, che possiede le dimensioni  $[F L^2]$ .

Si osserva, dunque, come le rotazioni torsionali siano inversamente proporzionali alle caratteristiche geometriche ed elastiche delle sezioni e direttamente proporzionali al momento torcente primario applicato.

Detto momento è quindi esprimibile nella forma:

$$M^{(1)} = G \cdot I^* \cdot \theta'$$

Le tensioni tangenziali primarie, che si indicheranno nel seguito con il simbolo  $\tau^{(1)}$  e che costituiscono un campo vettoriale identico su tutte le sezioni rette, possono porsi nella forma:

$$\tau^{(1)}(c) = \frac{M^{(1)}}{I^{(1)}(c)}$$

essendo  $I^{(1)}$  una grandezza, legata anch'essa alla geometria della sezione, che possiede le dimensioni  $[L^3]$  e si definisce *momento statico primario*.

Premesso che è possibile omettere la dipendenza dall'ascissa curvilinea  $c$  quando ciò non dia luogo ad equivoci, detta espressione fornisce, per le sezioni monoconnesse i valori massimo e minimo, e per le sezioni pluriconnesse il valore costante, delle tensioni tangenziali lungo la corda all'ascissa  $c$ .

A conclusione del presente paragrafo si osserva che nella torsione pura le rotazioni  $\theta$  della sezione (ovvero della proiezione della sezione sul piano iniziale) possono farsi avvenire intorno ad un centro qualunque: infatti, rimanendo le fibre longitudinali della trave rettilinee a deformazione avvenuta, può sempre considerarsi che la rotazione della sezione si verifichi intorno ad una qualunque di tali fibre, ritenuta fissa. È per tale motivo che nella torsione pura non ha senso di parlare di *centro di torsione*: questo assume significato, solamente, nel caso di travi vincolate e dunque nel caso di *torsione non uniforme*.

Ancora con riferimento al campo vettoriale definito dalle tensioni tangenziali primarie, applicando le definizioni di divergenza e rotazione, si dimostra facilmente come, nel caso in esame, risulti nulla la divergenza e costante la rotazione, ovvero:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tau^{(1)} &= 0 \\ \operatorname{rot} \tau^{(1)} &= 2G \cdot \theta' \end{aligned}$$

Il campo vettoriale delle tensioni tangenziali primarie è, pertanto, solenoidale.

#### 4.2.1 - Le sezioni compatte<sup>1</sup>

##### 4.2.1.1 - La sezione circolare

Rappresenta il caso più semplice di torsione pura, già studiato da Coulomb nel XVIII secolo.

Data la simmetria polare, le sezioni si conservano piane senza subire ingobbimenti, i raggi si mantengono rettilinei e gli angoli formati da due di essi non variano lungo l'asse della trave.

Se si considerano circonferenze di raggio  $r$ , appartenenti a due sezioni a distanza unitaria, la loro rotazione relativa per effetto del momento torcente costante  $M^{(1)}$  vale, per definizione,  $\theta'$  mentre lo spostamento relativo tra due punti della stessa generatrice vale  $\theta' \cdot r$ .

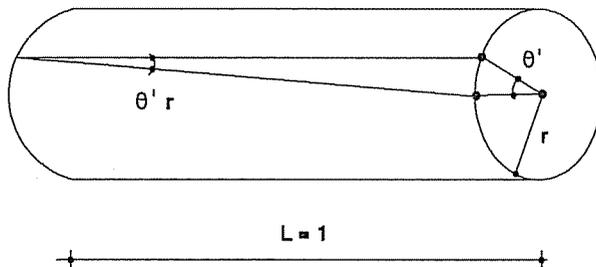


Fig. 4.2

Ciò comporta che anche lo scorrimento abbia lo stesso valore:

<sup>1</sup> Solid cross-sections.

$$\gamma^{(1)} = \tau^{(1)} / G = \theta' \cdot r$$

Poiché nel caso in esame il momento d'inerzia primario coincide con il momento d'inerzia polare della sezione,  $I^* = I_p = \pi \cdot R^4 / 2$ , risulta:

$$\theta' = \frac{M^{(1)}}{G \cdot I^*} = \frac{2 \cdot M^{(1)}}{G \cdot \pi \cdot R^4}$$

ed ancora, per sostituzione nella precedente espressione, la tensione sulla circonferenza di raggio  $r$ , ortogonale al raggio stesso in ogni punto, vale:

$$\tau^{(1)} = G \cdot \theta' \cdot r = \frac{2 \cdot M^{(1)}}{\pi \cdot R^4} \cdot r$$

Da tali espressioni è possibile dedurre il valore del momento statico primario che, per il caso particolare in esame, è:

$$I^{(1)} = \frac{\pi \cdot R^4}{2 \cdot r} = \frac{I^*}{r}$$

Le tensioni tangenziali risultano in ogni punto  $P(x,y)$  ortogonali al raggio per  $P$  e, dunque, tangenti al contorno esterno; il diagramma delle  $\tau^{(1)}$  lungo il generico diametro presenta andamento lineare con valore, nullo in corrispondenza del baricentro ed estremo sul bordo ove risulta:

$$\tau^{(1)} = \frac{2 \cdot M^{(1)}}{\pi \cdot R^3}$$

Nel caso in cui la sezione sia cava nulla cambia concettualmente, mentre momento d'inerzia primario e tensioni estreme assumono rispettivamente i valori:

$$I^* = \frac{\pi}{2} \cdot (R_e^4 - R_i^4); \quad \tau^{(1)} = \frac{2 \cdot M^{(1)} \cdot R_e}{\pi \cdot (R_e^4 - R_i^4)}$$

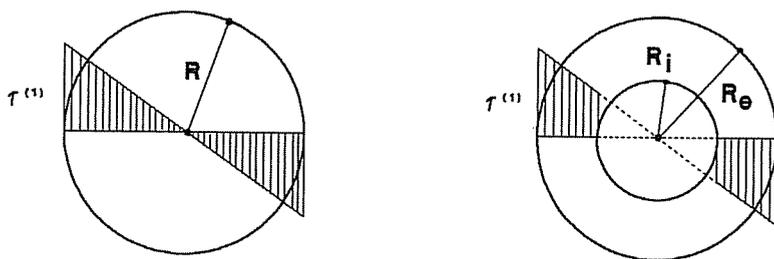


Fig. 4.3

È interessante notare, infine, la perfetta analogia esistente fra i risultati relativi alla trave di sezione circolare sollecitata a torsione pura ed a flessione semplice, come bene si evince dal confronto che segue.

*Torsione pura da  $M^{(1)}$ .*

- Conservazione delle sezioni piane
- Angolo unitario di torsione = rotazione torsionale fra due sezioni a distanza unitaria:

$$\theta' = \frac{d\theta}{dz} = \frac{M^{(1)}}{G \cdot I^*}$$

con:  $I^*$  momento d'inerzia primario (polare)  
 $GI^*$  rigidezza torsionale

- Rotazione torsionale fra due sezioni a distanza  $L$ :

$$\theta = \frac{M^{(1)} \cdot L}{G \cdot I^*}$$

- Deformazione proporzionale alla distanza  $r$  dall'asse neutro:

$$\gamma^{(1)} = \theta' \cdot r$$

- Tensioni:

$$\tau_z^{(1)} = \frac{M^{(1)} \cdot r}{I^*}$$

*Flessione semplice da  $M_y$ .*

- Conservazione delle sezioni piane
- Angolo unitario di flessione (curvatura) = rotazione flessionale fra due sezioni a distanza unitaria:

$$\varphi' = \frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_y}{E \cdot I_{yy}}$$

con:  $I_{yy}$  momento d'inerzia assiale  
 $EI_{yy}$  rigidezza flessionale

- Rotazione flessionale fra due sezioni distanti  $L$ :

$$\varphi = \frac{M_y \cdot L}{E \cdot I_{yy}}$$

- Deformazione proporzionale alla distanza  $y$  dall'asse neutro:

$$\epsilon^{(1)} = \frac{1}{r} \cdot y = \varphi' \cdot y$$

- Tensioni:

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{M_y \cdot y}{I_{yy}}$$

4.2.1.2 - *La sezione di forma qualunque*

Nel caso più generale le sezioni non si conservano piane e, dunque, la determinazione dello stato tensionale e di quello deformativo non è più così semplice.

Rispetto alla sezione circolare si hanno le seguenti differenze:

- i raggi uscenti dal centro di torsione rimangono rettilinei e le rispettive distanze angolari non mutano, ma le sezioni si ingobbano;

- le tensioni  $\tau^{(1)} = G \cdot \gamma^{(1)}$  non sono più proporzionali alla distanza dal centro di rotazione della sezione né sono perpendicolari al raggio uscente dal centro di rotazione, ma tangenti al contorno;
- le tensioni estreme si verificano per i punti più vicini del contorno.

L'analogia *idrodinamica*, dovuta a Greenhill, consente una immediata intuizione del comportamento di una sezione di forma qualsiasi sottoposta a torsione pura.

Dato un recipiente cilindrico, avente la sezione di fondo uguale a quella in esame, riempito di un liquido incompressibile, privo di attrito e dotato di un moto piano di rotazione permanente, le equazioni alle derivate parziali del moto del liquido risultano formalmente identiche a quelle della teoria dell'elasticità per lo studio della torsione pura. Componenti di velocità e componenti di tensioni tangenziali in ogni punto si corrispondono, avendo stessa direzione e valori proporzionali; linee di corrente (cui sono tangenti le velocità) e linee di tensione (cui sono tangenti le  $\tau^{(1)}$ ) sono identiche.

Un'altra analogia che si può istituire per la sollecitazione di torsione pura è quella detta *membranale*, dovuta a Prandtl.

Tendendo una membrana elastica, di spessore costante, lungo un contorno piano uguale a quello della sezione soggetta a torsione ed esercitando su di essa una pressione uniforme, è possibile verificare che:

- il valore della tensione  $\tau^{(1)}$  in un qualunque punto è proporzionale all'inclinazione del piano tangente in quel punto alla deformata della membrana;
- le linee di tensione coincidono con quelle di livello della membrana;
- il momento torcente applicato è pari al doppio del volume del solido compreso fra il piano del contorno e la membrana deformata.

In virtù di tali analogie è possibile, allora, intuire il comportamento di una sezione di forma qualunque nei riguardi della sollecitazione di torsione pura, con la possibilità di individuare già preliminarmente le zone più sollecitate e quelle meno cimentate o, addirittura, inerti.

#### 4.2.1.3 - *La sezione rettangolare*

I risultati della teoria della elasticità per il caso in esame possono compendiarsi come segue:

- lungo le mediane, la  $\tau^{(1)}$  cresce più che linearmente attingendo il valore massimo agli estremi;
- lungo le diagonali, la  $\tau^{(1)}$  cresce inizialmente per poi decrescere fino ad annullarsi negli spigoli;

- lungo i lati la tensione è pressoché costante per annullarsi rapidamente in prossimità degli angoli.

L'andamento delle tensioni tangenziali primarie lungo mediane, diagonali ed assi è compendiato qualitativamente in figura.

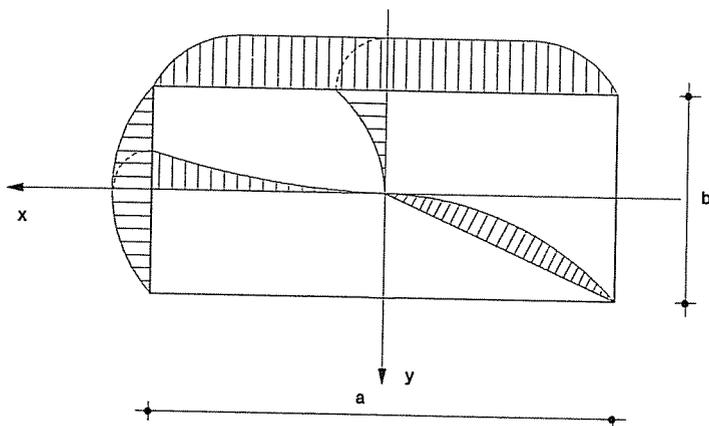


Fig. 4.4

L'angolo unitario di torsione ed i valori estremi delle tensioni valgono rispettivamente:

$$\theta' = \beta \cdot \frac{M^{(1)}}{G \cdot a \cdot b^3} = q \cdot \frac{M^{(1)}}{G \cdot I_p} = \frac{M^{(1)}}{G \cdot I^*}$$

$$\tau^{(1)} = \alpha \cdot \frac{M^{(1)}}{a \cdot b^2} = \frac{M^{(1)}}{I^{(1)}}$$

avendo indicato con:

- $a$  il lato maggiore della sezione;
- $b$  il lato minore della sezione;
- $\alpha, \beta$  due coefficienti dipendenti dal rapporto  $a/b$ ;
- $q$  il *fattore di torsione*<sup>2</sup> che consente di esprimere l'angolo unitario di torsione mediante le formule della sezione circolare
- $I_p$  il *momento d'inerzia polare*;
- $I^* = \frac{I_p}{q} = \frac{a \cdot b^3}{\beta}$  il *momento d'inerzia primario* o *modulo di torsione*
- $I^{(1)} = \frac{a \cdot b^2}{\alpha}$  il *momento statico primario*.

<sup>2</sup> Per sezione circolare:  $q=1$ ; per sezione qualunque:  $q>1$ .

#### 4.2.2 - Le sezioni monoconnesse in parete sottile<sup>3</sup>

Data la sottigliezza della sezione è lecito, come si è già detto, assumere che l'unica componente di tensione non nulla sia tangente alla linea media della sezione, ovvero ortogonale alla generica corda. Poiché nel caso di sezioni *aperte* interessano, in genere, i soli valori estremi assunti lungo la corda dalle tensioni tangenziali, per le sezioni in esame ed esclusivamente per esse, con il simbolo  $\tau^{(1)}$  si intenderanno sempre i soli valori massimo o minimo.

##### 4.2.2.1 - La sezione rettangolare

Lo scorrimento, e dunque le tensioni tangenziali primarie, variano pressoché linearmente lungo le corde perché tali fibre, più rigide delle altre, si conservano quasi rettilinee.

Indicando con  $d$  la lunghezza della sezione e con  $s(c) = s$  il suo spessore, si può dimostrare che risulta:

$$I^* = d \cdot s^3 / 3 \quad \text{e} \quad I^{(1)} = d \cdot s^2 / 3$$

per cui:

$$\theta' = \frac{3 \cdot M^{(1)}}{G \cdot d \cdot s^3}$$

$$\tau^{(1)} = \frac{3 \cdot M^{(1)}}{d \cdot s^2}$$

essendo per esse:  $\alpha = \beta = 3$ .

Nel caso di una sezione sottile scomponibile in  $r$  rettangoli, detto  $j$  il generico di essi avente lunghezza  $d_j$ , spessore  $s_j$ , ed al quale compete l'aliquota  $M_j^{(1)}$  di momento torcente, poiché per la congruenza della sezione tutti gli elementi componenti devono possedere lo stesso angolo unitario di torsione:

$$\theta'_1 = \theta'_j = \theta'_r = \theta' = \frac{M_1^{(1)}}{G \cdot I_1^*} = \frac{M_j^{(1)}}{G \cdot I_j^*} = \frac{M_r^{(1)}}{G \cdot I_r^*}$$

Potendosi anche scrivere, per una nota proprietà:

$$\theta' = \frac{\sum_1^r M_j^{(1)}}{G \cdot \sum_1^r I_j^*}$$

<sup>3</sup> Open, thin-walled cross section.

e dovendo essere:

$$\theta' = \frac{M^{(1)}}{G \cdot I^*} = \frac{\sum_1^r M_j^{(1)}}{G \cdot I^*}$$

risulta che la rigidezza torsionale primaria dell'intera sezione è somma delle singole rigidezze degli elementi componenti, ovvero<sup>4</sup>:

$$I^* = \sum_1^r I_j^* = \frac{1}{3} \cdot \sum_1^r d_j \cdot s_j^3$$

Si ha di conseguenza:

$$\theta' = \frac{3 \cdot M^{(1)}}{G \cdot \sum_1^r d_j \cdot s_j^3}$$

e, per il particolare rettangolo *i*-mo, essendo:

$$I_i^{(1)} = \frac{I^*}{s_i} = \frac{\sum_1^r d_j \cdot s_j^3}{3 \cdot s_i}$$

risulta:

$$\tau_i^{(1)} = \frac{3 \cdot M^{(1)} \cdot s_i}{\sum_1^r d_j \cdot s_j^3}$$

Nel caso di sezione a spessore costante ( $s_i = s$ ) le precedenti espressioni assumono la forma semplificata:

$$\theta' = \frac{3 \cdot M^{(1)}}{G \cdot s^3 \cdot \sum_1^r d_j}$$

$$\tau^{(1)} = \frac{3 \cdot M^{(1)}}{s^2 \cdot \sum_1^r d_j}$$

<sup>4</sup> Formula di Föppl.

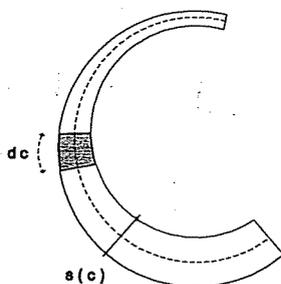
4.2.2.2 - *La sezione di forma qualunque*

Fig. 4.5

Operando in maniera analoga al caso precedente, ma con riferimento a rettangoli elementari di lunghezza  $dc$  e spessore  $s(c)$ , i simboli di sommatoria cedono il posto a quelli di integrale dando luogo alle espressioni:

$$I^* = \frac{1}{3} \cdot \int_C s^3(c) \cdot dc$$

$$I^{(1)} = \frac{I^*}{s(c)} = \frac{1}{3 \cdot s(c)} \cdot \int_C s^3(c) \cdot dc$$

da cui:

$$\theta' = \frac{3 \cdot M^{(1)}}{G \cdot \int_C s^3(c) \cdot dc}$$

$$\tau^{(1)}(c) = \frac{3 \cdot M^{(1)} \cdot s(c)}{\int_C s^3(c) \cdot dc}$$

ovvero la rigidezza torsionale primaria:

$$k^{(1)} = \frac{G}{3} \cdot \int_C s^3(c) \cdot dc$$

Si può subito osservare che l'inclinazione delle tensioni tangenziali lungo la generica corda all'ascissa  $c$ :

$$\frac{\tau^{(1)}(c)}{s(c)} = \frac{3 \cdot M^{(1)}}{\int_C s^3(c) \cdot dc}$$

assume valore costante, tali essendo numeratore e denominatore, indipendentemente da  $c$  e dunque dalla posizione della corda.

### 4.2.3 - Le sezioni biconnesse in parete sottile <sup>5</sup>

Qualunque sia la forma della sezione, purché di spessore sottile costante o variabile, si può utilizzare la trattazione di *Bredt*: supponendo, come è lecito per la piccolezza dello spessore  $s$ , che  $\tau^{(1)}$  sia costante lungo la generica corda e pari al valore assunto in corrispondenza del punto medio, si può dimostrare che il flusso  $[\tau^{(1)} \cdot s]$  è costante anch'esso lungo la linea media, attraverso l'analogia idrodinamica per il teorema della costanza della portata ovvero, per il rispetto della condizione di equilibrio  $\text{div } \tau^{(1)} = 0$  applicando il *teorema della divergenza*, ovvero ancora, per l'equilibrio alla traslazione in direzione  $z$  dell'elemento di lunghezza unitaria ottenuto sezionando longitudinalmente il concio elementare con due piani paralleli all'asse  $z$  e passanti per le corde in corrispondenza delle quali si vuole valutare il flusso.

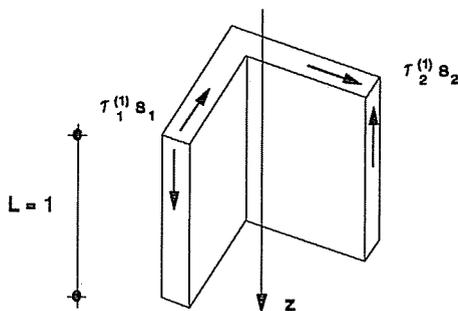


Fig. 4.6

Quanto sopra implica che  $\tau^{(1)}(c)$  sia inversamente proporzionale allo spessore  $s(c)$  e dunque costante lungo la linea media solo se tale è lo spessore della sezione.

Essendo  $M^{(1)}$  il momento risultante delle  $\tau^{(1)}$  rispetto ad un qualunque polo  $Q$ , deve essere verificata, per l'equilibrio alla rotazione, l'uguaglianza:

$$M^{(1)} = \oint \tau^{(1)} \cdot s \cdot r \cdot dc = \tau^{(1)} \cdot s \cdot \oint r \cdot dc$$

avendo indicato con il simbolo  $\oint$  l'integrale circuitale esteso all'intera linea media  $C$ .

<sup>5</sup> Closed, thin-walled sections.

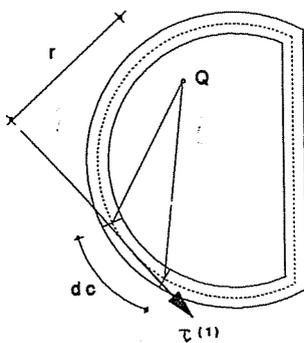


Fig. 4.7

Poiché  $r \cdot dc = d\omega_Q$  rappresenta l'area settoriale elementare di polo  $Q$  sarà:

$$\oint r \cdot dc = \oint d\omega_Q = \Omega$$

avendo indicato con  $\Omega$  il doppio dell'area racchiusa dalla linea media della sezione.

Risulta, dunque, la *formula di Bredt*:

$$\tau^{(1)}(c) = \frac{M^{(1)}}{\Omega \cdot s(c)}$$

dalla quale si può ricavare il valore del *momento statico primario*:

$$I^{(1)} = \Omega \cdot s(c)$$

o quello del *momento torcente primario*:

$$M^{(1)} = \tau^{(1)}(c) \cdot s(c) \cdot \Omega$$

Applicando il *teorema di Stokes*, che nel caso di sezione in parete sottile si scrive:

$$\oint \tau^{(1)} \cdot dc = \int_A \text{rot } \tau^{(1)} \cdot dA$$

avendo indicato con  $A$  la superficie contornata dalla linea media  $C$ , con semplici sostituzioni risulta:

$$\tau^{(1)} \cdot s \cdot \oint \frac{dc}{s} = 2 \cdot G \cdot \theta' \cdot \int_A dA = G \cdot \theta' \cdot \Omega$$

da cui si può ricavare l'angolo unitario di torsione:

$$\theta' = \frac{\tau^{(1)} \cdot s}{G \cdot \Omega} \cdot \oint \frac{dc}{s}$$

ovvero, ponendo la *circuitazione geometrica*:

$$\oint \frac{dc}{s} = H$$

si può scrivere:

$$\theta' = \frac{\tau^{(1)} \cdot s}{G \cdot \Omega} \cdot H$$

e sostituendo in essa l'espressione già ricavata di  $\tau^{(1)}$  si ha:

$$\theta' = \frac{M^{(1)} \cdot H}{G \cdot \Omega^2}$$

Da tale equazione è possibile, altresì, dedurre il valore del momento d'inerzia primario:

$$I^* = \Omega^2 / H$$

e dunque la rigidezza torsionale primaria:

$$k^{(1)} = G \cdot I^* = G \cdot \Omega^2 / H$$

Le espressioni innanzi ricavate, valide per le sole sezioni biconnesse, sono utilizzabili, per una valutazione approssimata dello stato tensionale da torsione pura, anche quando il grado di connessione sia superiore a due, come si evince facilmente, ancora una volta, dall'analogia idrodinamica.

#### 4.2.4 - Le sezioni pluriconnesse in parete sottile

Una valutazione esatta dello stato tensionale e di deformazione di una sezione pluriconnessa (con  $c > 2$ ) composta da  $r$  rami,  $m$  maglie ed  $n$  nodi, si può perseguire assumendo quali incognite gli  $r$  flussi torsionali primari nei singoli rami e l'angolo unitario di torsione della sezione stessa. Anche in tale caso si ipotizza che le tensioni  $\tau^{(1)}$  siano costanti lungo la corda alla generica ascissa  $c$  e che, per ogni ramo  $j$ , risultino costanti i flussi incogniti  $[\tau^{(1)}(c) \cdot s(c)]_j$ .

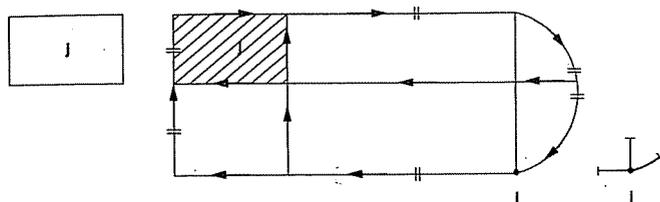


Fig. 4.8

Operate  $m$  sconnessioni e fissato un verso di percorrenza della linea media, le condizioni che risolvono il problema sono:

1 equazione di equilibrio globale alla rotazione, che esprime l'eguaglianza fra il momento torcente primario applicato alla sezione e le aliquote che competono ad ogni singola maglia  $j$ :

$$M^{(1)} = \sum_1^m M_j^{(1)} = \sum_1^m \Omega_j \cdot \tau_j^{(1)}(c) \cdot s_j(c)$$

$m$  equazioni di congruenza, in numero pari a quello delle maglie, espresse per ognuna dal *teorema di Stokes*:

$$\oint_j \tau^{(1)}(c) \cdot dc = G \cdot \theta' \cdot \Omega_j \quad \forall j \in \{1, m\}$$

$n-1 = r-m$  equazioni di equilibrio nei nodi, ottenibili imponendo per ognuno l'equilibrio alla traslazione secondo  $z$  o applicando il *teorema della divergenza*, del tipo:

$$\sum_1^k \tau_i^{(1)}(c) \cdot s_i(c) = \sum_1^k [\tau^{(1)}(c) \cdot s(c)]_i = 0$$

essendo  $k$  il numero di rami che confluiscono nel generico nodo e valendo l'equivalenza di notazione:

$$\tau_i^{(1)}(c) \cdot s_i(c) = [\tau^{(1)}(c) \cdot s(c)]_i$$

La risoluzione del sistema di  $r+1$  equazioni, nelle  $r+1$  incognite, porge i valori cercati di  $\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_r^{(1)}, \theta'$ .

#### Problema 4.1

Determinare lo stato tensionale primario per la sezioni pluriconnessa in figura.

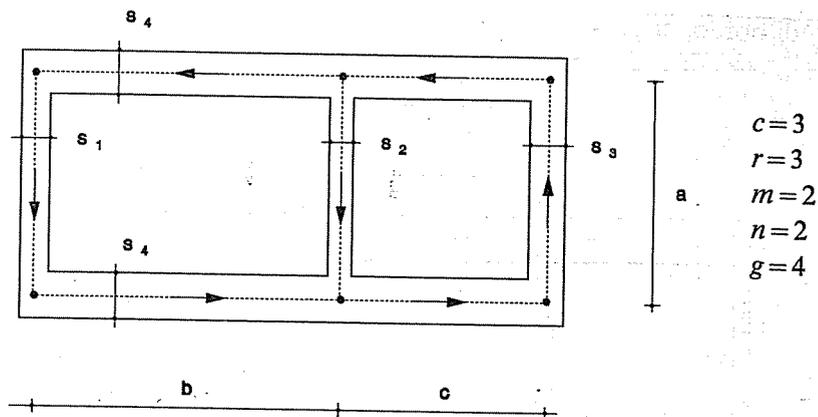


Fig. 4.9

Equazione di equilibrio globale:

$$M^{(1)} = 2 \cdot [\tau_1^{(1)} \cdot s_1 \cdot a \cdot b + \tau_3^{(1)} \cdot s_3 \cdot a \cdot c]$$

Equazioni di congruenza delle maglie:

$$\tau_1^{(1)} \cdot a + 2 \cdot \tau_1^{(1)} \cdot \frac{s_1}{s_4} \cdot b - \tau_2^{(1)} \cdot a = 2 \cdot G \cdot \theta' \cdot a \cdot b$$

$$\tau_3^{(1)} \cdot a + \tau_3^{(1)} \cdot \frac{s_3}{s_4} \cdot 2 \cdot c + \tau_2^{(1)} \cdot a = 2 \cdot G \cdot \theta' \cdot a \cdot c$$

Equazione di equilibrio del nodo:

$$\tau_1^{(1)} \cdot s_1 + \tau_2^{(1)} \cdot s_2 - \tau_3^{(1)} \cdot s_3 = 0$$

La risoluzione di tale sistema fornisce i valori delle incognite  $\tau_1^{(1)}$ ,  $\tau_2^{(1)}$ ,  $\tau_3^{(1)}$ ,  $\theta'$  note le quali è noto, implicitamente, il valore di  $\tau_4^{(1)}$  per la costanza del flusso in ogni tratto.

#### 4.2.4.1 - Il caso particolare di sezione pluricellulare a nervature uguali

Per una sezione pluriconnessa costituita da  $n + 1$  nervature rettangolari uguali, con dimensioni  $s \cdot h$  ad interasse  $\lambda_j$ , e da  $n$  campi di soletta e controsoletta con spessori costanti  $t$ , una determinazione approssimata dello stato tensionale da tensione primaria può ottenersi formulando le seguenti ipotesi:

- che il flusso  $[\tau^{(1)} \cdot s]_i$  nella generica nervatura  $i$  vari con la sua distanza  $d_i$  dal piano di simmetria longitudinale, cosicché detto  $[\tau^{(1)} \cdot s]_1$  il flusso nelle travi

di bordo, si possa assumere per la generica trave  $i$ :

$$[\tau^{(1)} \cdot s]_i = [\tau^{(1)} \cdot s]_1 \cdot \frac{2 \cdot d_i}{b}$$

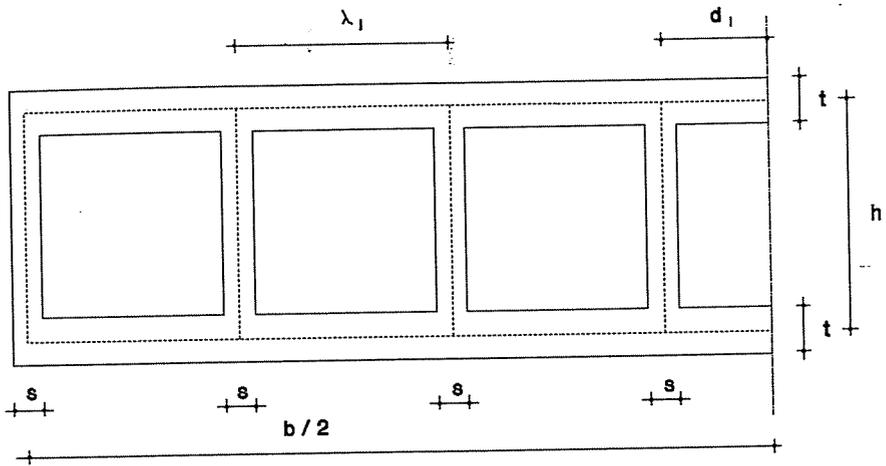


Fig. 4.10

- che il flusso nel generico campo  $j$  di soletta o controsoletta sia fornito dall'espressione:

$$[\tau^{(1)} \cdot t]_j = \sum_1^j [\tau^{(1)} \cdot s]_i = \sum_1^j [\tau^{(1)} \cdot s]_1 \cdot \frac{2 \cdot d_i}{b} = [\tau^{(1)} \cdot s]_1 \cdot \frac{2}{b} \cdot \sum_1^j d_i$$

con un diagramma di flusso, dunque, del tipo rappresentato in figura:

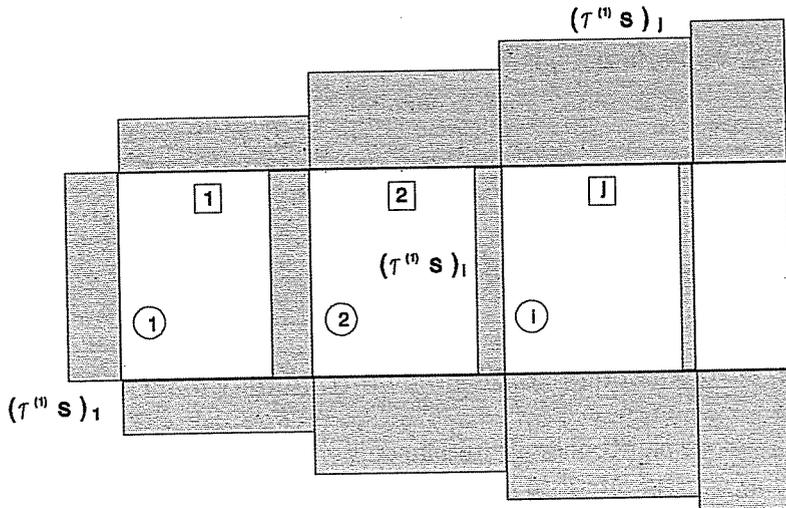


Fig. 4.11

Essendo gli impalcati che si trattano nella pratica tecnica sempre simmetrici, è possibile fare riferimento alla sola prima metà di sezione.

Per la validità delle espressioni che seguono, detta sezione è considerata sem-

pre con numero di travi dispari pari ad  $n + 1$ : nel caso di numero pari basterà aggiungere una nervatura fittizia in corrispondenza dell'asse di simmetria.

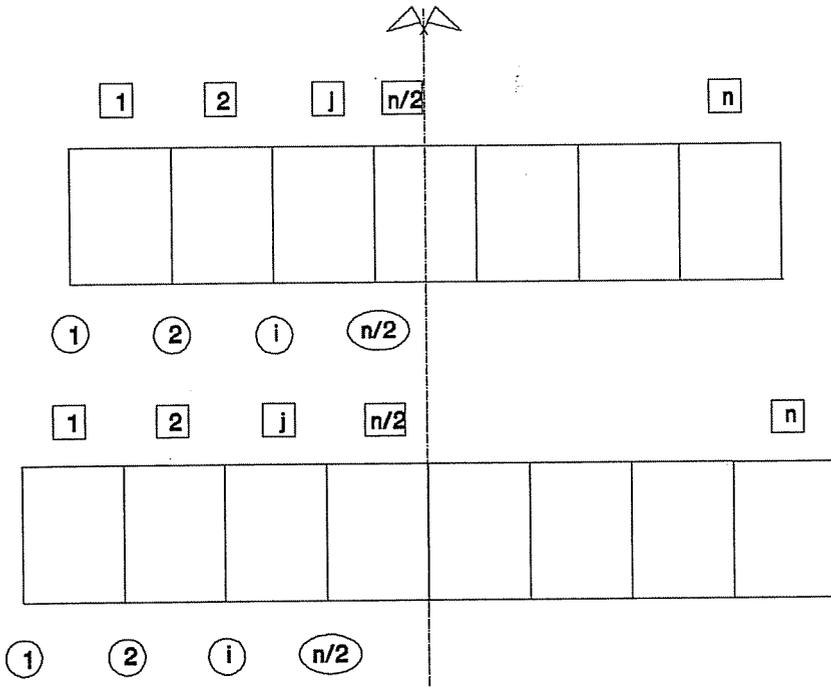


Fig. 4.12

Dette  $F_i$  ed  $F_j$ , rispettivamente, le risultanti delle tensioni nella generica nervatura  $i$  e nel generico campo  $j$ , per l'equilibrio tra il momento torcente totale  $M^{(1)}$  applicato alla sezione ed i momenti torcenti interni determinati dai singoli flussi di tensione, deve risultare:

$$\begin{aligned}
 M^{(1)} &= \sum_1^{n/2} F_i \cdot 2 \cdot d_i + 2 \cdot \sum_1^{n/2} F_j \cdot h = \\
 &= \sum_1^{n/2} [\tau^{(1)} \cdot s]_i \cdot h \cdot 2 \cdot d_i + 2 \cdot \sum_1^{n/2} [\tau^{(1)} \cdot t]_j \cdot \lambda_j \cdot h = \\
 &= \sum_1^{n/2} [\tau^{(1)} \cdot s]_1 \cdot \frac{2 \cdot d_i}{b} \cdot h \cdot 2 \cdot d_i + 2 \cdot \sum_1^{n/2} [\tau^{(1)} \cdot s]_1 \cdot \frac{2}{b} \cdot \sum_1^j d_i \cdot \lambda_j \cdot h = \\
 &= [\tau^{(1)} \cdot s]_1 \cdot \frac{2 \cdot h}{b} \cdot 2 \cdot \sum_1^{n/2} d_i^2 + [\tau^{(1)} \cdot s]_1 \cdot \frac{2 \cdot h}{b} \cdot 2 \cdot \sum_1^{n/2} \left( \lambda_j \cdot \sum_1^j d_i \right) = \\
 &= [\tau^{(1)} \cdot s]_1 \cdot \frac{2 \cdot h}{b} \cdot \left[ \sum_1^n d_i^2 + 2 \cdot \sum_1^{n/2} \left( \lambda_j \cdot \sum_1^j d_i \right) \right]
 \end{aligned}$$

Valendo l'uguaglianza<sup>6</sup>

$$2 \cdot \sum_1^{n/2} \left( \lambda_j \cdot \sum_1^j d_i \right) = 2 \cdot \sum_1^{n/2} d_i^2 = \sum_1^n d_i^2$$

si può allora scrivere:

$$M^{(1)} = [\tau^{(1)} \cdot s]_1 \cdot \frac{2 \cdot h}{b} \cdot \left[ \sum_1^n d_i^2 + \sum_1^n d_i^2 \right] = [\tau^{(1)} \cdot s]_1 \cdot \frac{2 \cdot h}{b} \cdot 2 \cdot \sum_1^n d_i^2$$

da cui:

$$[\tau^{(1)} \cdot s]_1 = \frac{M^{(1)}}{2 \cdot b \cdot h} \cdot \frac{b^2}{2 \cdot \sum_1^n d_i^2} = \frac{M^{(1)}}{\Omega} \cdot \frac{b^2}{2 \cdot \sum_1^n d_i^2}$$

La conoscenza del flusso nelle nervature di estremità consente di risalire, tramite le ipotesi formulate inizialmente, al valore del flusso nella generica nervatura o nel generico campo e, dunque, delle tensioni tangenziali primarie.

Per completezza, e per l'utilizzazione che se ne può fare nei casi pratici, si riporta, altresì, l'espressione della rigidità torsionale primaria di tale sezione

<sup>6</sup> Tale eguaglianza formale, che desta sempre nello studente qualche perplessità, può essere facilmente verificata, ad esempio, con riferimento ad una semplice applicazione nel caso di sezione esacellulare:

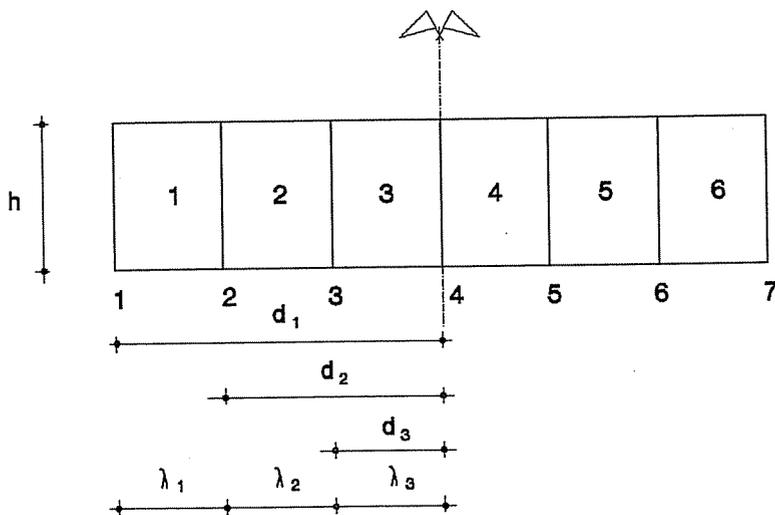


Fig. 4.13

$$\begin{aligned} 2 \sum_1^3 \left( \lambda_j \cdot \sum_1^j d_i \right) &= 2 \cdot [\lambda_1 \cdot d_1 + \lambda_2 \cdot (d_1 + d_2) + \lambda_3 \cdot (d_1 + d_2 + d_3)] = \\ &= 2 \cdot [d_1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + d_2 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3) + d_3 \cdot \lambda_3] = 2 \cdot [d_1 \cdot d_1 + d_2 \cdot d_2 + d_3 \cdot d_3] = 2 \cdot \sum_1^3 d_i^2 = \sum_1^6 d_i^2 \end{aligned}$$

che, a calcoli eseguiti, si può porre nella forma:

$$G \cdot I^* = \frac{G \cdot \Omega^2}{2 \cdot \left[ \frac{h}{s} \cdot \frac{b^2}{2 \cdot \sum_1^n d_i^2} + \frac{b}{t} \right]}$$

Per essa risulta facile verificare come nel caso di sezioni biconnesse, essendo:

$$\frac{b^2}{2 \cdot \sum_1^n d_i^2} = 1$$

si ritrova la nota espressione:

$$G \cdot I^* = G \cdot \Omega^2 / H$$

#### 4.2.5 - Le sezioni miste<sup>7</sup>

Tali si definiscono le sezioni costituite da elementi sia *aperti* che *chiusi*; alorché ci si ritrovi in tali casi, contrassegnando rispettivamente con la lettera *A* i primi e con la lettera *C* i secondi, occorre imporre le seguenti condizioni:

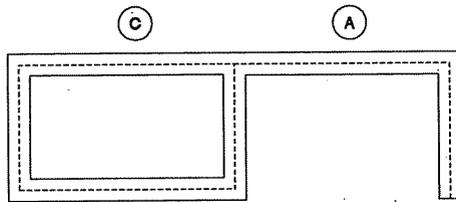


Fig. 4.14

- equilibrio fra il momento totale  $M^{(1)}$  applicato alla intera sezione e le aliquote  $M_A^{(1)}$  ed  $M_C^{(1)}$  che competono ai diversi elementi:

$$M^{(1)} = M_A^{(1)} + M_C^{(1)}$$

- congruenza fra la rotazione della parte di sezione chiusa e di quella aperta, che devono essere uguali tra loro e pari a quella dell'intera sezione:

$$\theta'_A = \frac{M_A^{(1)}}{k_A^{(1)}} = \theta'_C = \frac{M_C^{(1)}}{k_C^{(1)}} = \theta' = \frac{M^{(1)}}{k^{(1)}}$$

<sup>7</sup> Mixed open-closed sections.

ove:

$$\theta'_A = M_A^{(1)} \cdot \frac{3}{G \cdot \int_C s^3(c) \cdot dc} = \frac{M_A^{(1)}}{G \cdot I_A^*}$$

$$\theta'_C = M_C^{(1)} \cdot \frac{H}{G \cdot \Omega^2} = \frac{M_C^{(1)}}{G \cdot I_C^*}$$

essendosi indicate rispettivamente con  $k_A^{(1)}$  e  $k_C^{(1)}$  le rigidzze primarie delle parti *aperta* e *chiusa*.

Dalle precedenti equazioni risulta che le aliquote torcenti di competenza delle due parti valgono:

$$M_A^{(1)} = \frac{k_A^{(1)}}{k_A^{(1)} + k_C^{(1)}} \cdot M^{(1)}$$

$$M_C^{(1)} = \frac{k_C^{(1)}}{k_A^{(1)} + k_C^{(1)}} \cdot M^{(1)}$$

ove i primi fattori a secondo membro rappresentano i coefficienti di ripartizione del momento torcente totale.

Da queste, mediante le formulazioni espresse nei precedenti paragrafi, è possibile risalire allo stato tensionale.

L'angolo unitario di torsione della intera sezione vale invece:

$$\theta' = \frac{M^{(1)}}{k_A^{(1)} + k_C^{(1)}}$$

essendo la rigidzza torsionale primaria sempre somma delle aliquote relative alle parti componenti:

$$k^{(1)} = k_A^{(1)} + k_C^{(1)} = G \cdot \left[ \frac{\int_C s^3(c) \cdot dc}{3} + \frac{\Omega^2}{H} \right]$$

Si consideri che nella maggior parte dei casi, risultando  $k_A^{(1)} \ll k_C^{(1)}$ , le appendici monoconnesse, in un primo calcolo si massima, possono essere trascurate.

#### Problema 4.2

Determinare la rigidzza torsionale primaria della sezione in sistema misto (di frequente diffusione nella pratica tecnica) rappresentata in figura, e costitui-

ta da un cassone monocellulare, realizzato con materiale avente modulo di elasticità tangenziale  $G_a$ , e da una soletta realizzata con materiale avente modulo di elasticità tangenziale  $G_b$ .

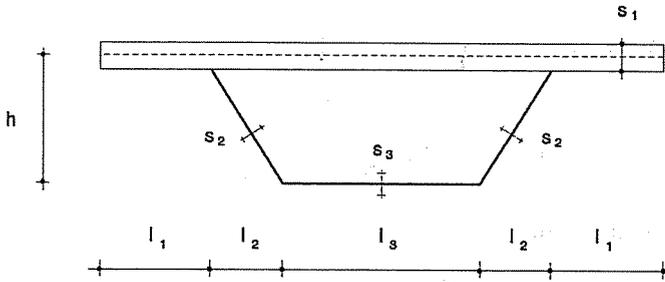


Fig. 4.15

Essendo differenti i materiali che costituiscono la sezione, gli spessori dovranno essere resi omogenei tramite un coefficiente fornito dal rapporto dei moduli di elasticità dei due materiali:  $m = G_a/G_b$ <sup>8</sup>.

Omogeneizzando tutto al materiale avente modulo  $G_a$ , risulta:

- Rigidezza degli elementi monoconnessi:

$$k_A^{(1)} = \frac{2}{3} \cdot G_b \cdot l_1 \cdot s_1^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{G_a}{m} \cdot l_1 \cdot s_1^3$$

- Rigidezza dell'elemento biconnesso:

$$k_C^{(1)} = G_a \cdot \frac{\Omega^2}{H} = G_a \cdot \frac{[2 \cdot (l_3 + l_2) \cdot h]^2}{m \cdot \frac{l_3 + 2 \cdot l_2}{s_1} + \frac{2 \cdot \sqrt{l_2^2 + h^2}}{s_2} + \frac{l_3}{s_3}}$$

La somma delle rigidezze calcolate fornisce la rigidezza totale della sezione.

Si ricordi che, ove si ricerchi anche lo stato tensionale, i valori calcolati risultano veri per le parti il cui materiale possiede modulo  $G_a$ , mentre quelli relativi alle parti realizzate con materiale dotato di modulo  $G_b$  vanno divisi per il coefficiente di omogeneizzazione  $m$ .

#### 4.2.6 - Considerazioni e confronti

Sia per le sezioni monoconnesse che per quelle biconnesse le tensioni tangenziali da torsione primaria si possono esprimere tramite la formula generale:

<sup>8</sup> Nelle travi in sistema misto acciaio-calcestruzzo tutta la sezione viene omogeneizzata all'acciaio il cui modulo di elasticità tangenziale,  $G = 7800$  MPa, si può considerare costante al variare della resistenza del materiale.

$$\tau^{(1)}(c) = \frac{M^{(1)}}{I^{(1)}(c)}$$

ove:

- per le sezioni monoconnesse:

$$I^{(1)}(c) = \frac{\int_C s^3(c) \cdot dc}{3 \cdot s(c)} = \frac{I^*}{s(c)}$$

- per le sezioni biconnesse:

$$I^{(1)}(c) = \Omega \cdot s(c)$$

Da tali espressioni si evince facilmente che per una trave in parete sottile, la cui sezione abbia spessore variabile, le tensioni tangenziali da torsione pura attingono il valore massimo:

- nel caso di sezione monoconnessa, dove massimo è lo spessore;
- nel caso di sezione biconnessa, dove lo spessore è minimo.

Per quanto riguarda la loro distribuzione lungo la generica corda, ovvero lungo lo spessore:

- nel caso di sezione monoconnessa, le tensioni variano con legge lineare ed essendo piccolo il braccio delle risultanti delle  $\tau^{(1)}$  (che dipende da  $s$ ) queste dovranno assumere valori elevati;
- nel caso di sezione biconnessa le tensioni sono costanti ed essendo grande il braccio delle risultanti delle  $\tau^{(1)}$  (che è legato, in tale caso, alle dimensioni del perimetro della sezione) queste potranno assumere anche valori modesti.

Si considerino, ad esempio, due sezioni sottoposte al medesimo momento torcente primario e dotate della stessa geometria, ma distinte dal fatto di essere una monoconnessa e l'altra biconnessa.

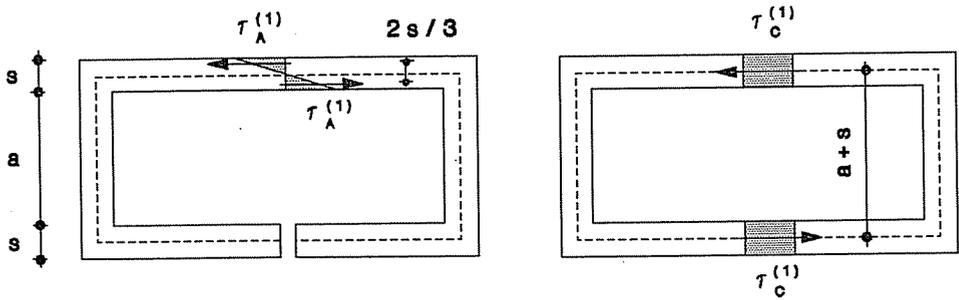


Fig. 4.16

Per l'equilibrio, lo stato tensionale di entrambe le sezioni deve essere tale da dare luogo allo stesso momento torcente risultante, per cui ad esempio, con riferimento alla tensione nella soletta superiore del concio di lunghezza unitaria, dovrà essere:

$$\tau_A^{(1)} \cdot \frac{s}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot s = \tau_A^{(1)} \cdot \frac{s^2}{6} = M^{(1)} = \tau_C^{(1)} \cdot s \cdot (a+s)$$

ovvero:

$$\tau_A^{(1)} = 6 \cdot \left(1 + \frac{a}{s}\right) \cdot \tau_C^{(1)}$$

dalla quale, essendo per le sezioni in parete sottile  $a \gg s$ , si evince che è sempre:  $\tau_A^{(1)} \gg \tau_C^{(1)}$ .

Il momento risultante delle tensioni tangenziali primarie rispetto al centro di torsione  $T$  si definisce *momento torcente primario* e si indica con:

$$M^{(1)} = k^{(1)} \cdot \theta'$$

essendo:

$$k^{(1)} = G \cdot I^*$$

la rigidità torsionale primaria, ove si ricorda che:

- per le sezioni monoconnesse:

$$I^* = \frac{1}{3} \cdot \int_C s^3(c) \cdot dc$$

- per le sezioni biconnesse:

$$I^* = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{dc}{s}} = \frac{\Omega^2}{H}$$

Si noti come per le sezioni sottili la rigidità torsionale primaria delle monoconnesse, dipendendo da  $s$ , risulti molto minore di quella relativa alle sezioni biconnesse e di quella flessionale che sono legate, invece, alle dimensioni perimetrali della sezione.

### Problema 4.3

Confrontare lo stato di deformazione e di tensione di due sezioni anulari, di spessore sottile costante  $s$  e raggio della linea media  $R$ , rispettivamente monoconnessa e biconnessa.

Per la sezione monoconnessa:

$$\theta_A^{(1)} = \frac{3}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{M^{(1)}}{G \cdot R \cdot s^3}$$

$$\tau_A^{(1)} = \frac{3}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{M^{(1)}}{R \cdot s^2}$$

Per la sezione biconnessa:

$$\theta_C^{(1)} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{M^{(1)}}{G \cdot R^3 \cdot s}$$

$$\tau_C^{(1)} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{M^{(1)}}{R^2 \cdot s}$$

ovvero, a parità di momento torcente  $M^{(1)}$ , risulta:

$$\tau_A^{(1)} / \tau_C^{(1)} = 3 \cdot (R/s)$$

$$\theta_A^{(1)} / \theta_C^{(1)} = 3 \cdot (R/s)^2$$

Tali espressioni indicano come l'introduzione di una sconnessione nella sezione anulare determini un aumento dello stato tensionale e quello di deformazione, che dipende, rispettivamente, dal rapporto  $R/s$  e dal suo quadrato.

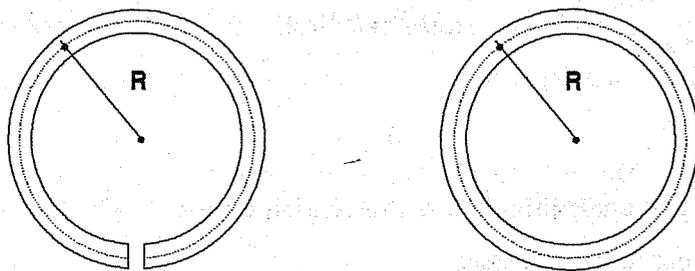


Fig. 4.17

### 4.3 - L'ingobbimento delle travi in parete sottile

Si consideri una trave in parete sottile, di sezione qualunque, sollecitata a torsione uniforme: in generale, oltre che nel piano della sezione, ogni punto subisce anche spostamenti  $w$  assiali che si definiscono ingobbimenti o, anche, ingobbamenti. Essendo sottile lo spessore, il materiale si potrà pensare addensato lungo la linea media  $e$ , dunque, nello studio della deformazione assiale, si potrà fare riferimento alla superficie cilindrica, avente per direttrice la linea media della sezione, che si definisce *superficie cilindrica media*.

Se si prende in esame il concio di lunghezza elementare  $dz$ , ottenuto sezionando la trave con due piani ortogonali all'asse, di ascissa  $z$  e  $z + dz$ , e si rappresenta l'elemento in esame con rapporto deformato della scala delle lunghezze, per consentire una migliore leggibilità della figura, si osserva che, per effetto della coppia torcente applicata costante con  $z$ , la generica sezione ruota intorno al centro di rotazione  $T$  ed il generico punto  $O$  si sposta in  $B$ . Essendo  $\overline{OB} = \theta' \cdot dz \cdot r$  si ha:

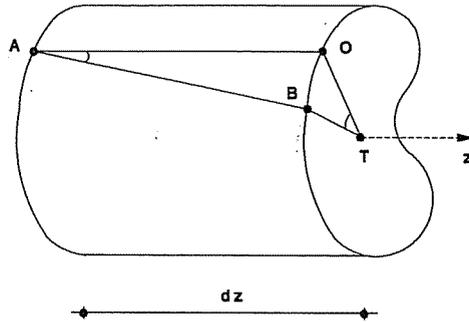


Fig. 4.18

$$\widehat{OAB} = \widehat{OB} / dz = \theta' \cdot r$$

ove si ricordi che l'angolo unitario di torsione è costante.

Inoltre, per il principio di simmetria delle tensioni tangenziali, sulla superficie cilindrica media saranno applicate le stesse tensioni  $\tau^{(1)}$  che sono presenti sulla sezione retta in corrispondenza della linea media.

#### 4.3.1 - Le sezioni monoconnesse

In questo caso, si è visto come le  $\tau^{(1)}$  varino linearmente lungo lo spessore annullandosi in corrispondenza della linea media, conformemente all'ipotesi di Timoshenko.

Per tale motivo lungo tutta la superficie cilindrica media, ivi essendo  $\tau^{(1)} = 0$ , sarà anche  $\gamma^{(1)} = \tau^{(1)} / G = 0$ , e, dunque, su di essa non si verificheranno scorrimenti tra le generatrici e le corrispondenti tangenti alla linea media.

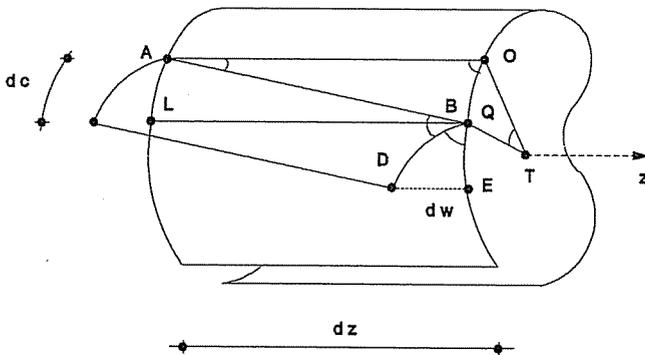


Fig. 4.19

L'elemento generico  $AOQL$ , di dimensioni  $dz \cdot dc$ , per effetto dello spostamento elementare del punto  $O$  in  $B \equiv Q$  non subirà variazioni angolari e, pertan-

to, dovrà risultare:

$$\widehat{AOB} = \widehat{ABD} \quad \text{ovvero:} \quad \widehat{EBD} = \widehat{OAB} = \theta' \cdot r$$

Poiché il punto  $Q$  si sarà spostato, a sua volta, in  $D$ , lo spostamento relativo assiale  $\overline{DE}$  fra i punti  $O$  e  $Q$  della sezione a distanza  $dc$  sarà, a deformazione avvenuta:

$$dw(OQ) = -\theta' \cdot r \cdot dc = -\theta' \cdot d\omega_T$$

essendo  $d\omega_T$  l'area settoriale di origine  $O$  ed estremo  $Q$ , descritta dal raggio vettore  $TO$  di polo  $T$  (positiva per rotazione levogira) ed essendo il segno negativo dovuto all'orientamento dell'asse  $z$ .

Detto, dunque,  $P$  il generico punto della linea media a distanza finita  $\widehat{OP}$  dal punto  $O$ , lo spostamento relativo assiale fra i due punti, conseguente alla rotazione rigida della sezione, varrà:

$$w(P) - w(O) = - \int_O^P \theta' \cdot d\omega_T = -\theta' \cdot \omega_T(OP)$$

essendo  $\omega_T(OP)$  l'area settoriale descritta dal raggio vettore  $TO$  nel passaggio da  $O$  a  $P$  e  $\theta'$  una funzione costante con  $z$ .

Lo spostamento assiale del generico punto  $P$ , e dunque il suo ingobbimento, risultano pertanto definiti a meno di una costante rappresentata dallo spostamento longitudinale (ingobbimento) del punto  $O$  di riferimento assunto.

Si osservi che la trattazione risulta approssimata in quanto, come si vedrà nel seguito, sulla superficie cilindrica media, pur annullandosi le tensioni tangenziali primarie, non sono nulle le secondarie e, dunque, neppure i relativi scorrimenti.

#### 4.3.2 - Le sezioni biconnesse

In questo caso le tensioni  $\tau^{(1)}$  sono costanti lungo lo spessore della sezione: sulla linea media e lungo la superficie cilindrica media sarà, pertanto,  $\tau^{(1)} \neq 0$ .

Il generico foglio elementare  $dc \cdot dz$  a deformazione avvenuta (rotazione intorno al centro  $T$ ) avrà subito uno scorrimento  $\gamma^{(1)}$  per cui risulterà:

$$\widehat{ABD} = \widehat{AOB} + \gamma^{(1)}$$

da cui:

$$\widehat{DBE} = \widehat{BAO} - \gamma^{(1)}$$

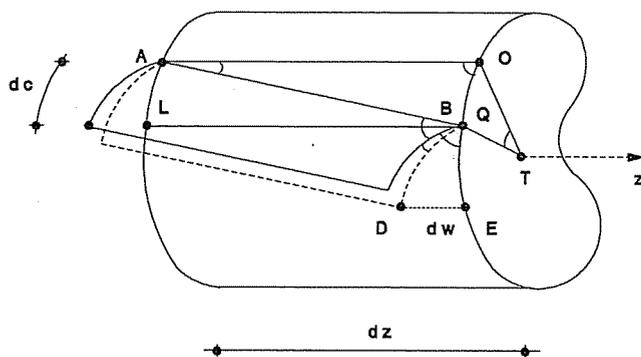


Fig. 4.20

Lo spostamento relativo assiale elementare  $\overline{DE}$  fra i due punti  $O$  e  $Q$  della linea media alla distanza elementare  $dc$  sarà, dunque, somma della rotazione rigida del foglio elementare e della sua deformazione conseguente allo scorrimento:

$$dw(OQ) = -\theta' \cdot r \cdot dc + \gamma^{(1)} \cdot dc = -\theta' \cdot d\omega_T + \gamma^{(1)} \cdot dc$$

ove si è assunto  $\gamma^{(1)} > 0$  se corrisponde a rotazioni levogire.

Lo spostamento relativo longitudinale tra il punto di riferimento  $O$  ed il generico punto  $P$  della linea media, alla distanza finita  $\overline{OP}$ , vale:

$$w(P) - w(O) = \int_O^P -\theta' \cdot d\omega_T + \gamma^{(1)} \cdot dc = -\theta' \cdot \omega_T(OP) + \int_O^P \gamma^{(1)} \cdot dc$$

che per  $\gamma^{(1)} = 0$  riproduce la formula già ricavata per le sezioni monoconnesse.

Si nota, in definitiva, che l'ingobbimento può considerarsi somma di due aliquote di cui la prima, in assenza di scorrimenti lungo la superficie cilindrica media, relativa alla sezione resa monoconnessa, e l'altra, dovuta agli scorrimenti  $\gamma^{(1)}$ , che ristabilisce la congruenza in corrispondenza delle sconessioni effettuate.

Si può già osservare che, sconnettendo la sezione biconnessa di una trave in parete sottile, gli ingobbimenti dei suoi punti subiscono un immediato aumento dovuto a due distinti fattori: l'angolo unitario di torsione della sezione aperta è maggiore di quello relativo alla sezione chiusa e, comunque, nell'espressione degli ingobbimenti scompare il secondo termine che presenta segno opposto al primo.

Ricordando le formule di Bredt per le sezioni biconnesse:

$$\theta' = \frac{M^{(1)} \cdot H}{G \cdot \Omega^2}$$

$$\tau^{(1)}(c) = \gamma^{(1)}(c) \cdot G = \frac{M^{(1)}}{\Omega \cdot s(c)}$$

ricavando  $M^{(1)}$  dalla prima relazione e sostituendo nella seconda si ha:

$$\gamma^{(1)}(c) = \frac{\Omega}{H} \cdot \frac{\theta'}{s(c)}$$

Lo spostamento relativo fra i punti  $O$  e  $P$  si può esprimere, allora, nella forma:

$$w(P) - w(O) = -\theta' \cdot \omega_T(OP) + \frac{\Omega}{H} \cdot \theta' \cdot \int_O^P \frac{dc}{s(c)}$$

ed assumendo la *funzione circuitale*:

$$\int_O^P \frac{dc}{s(c)} = h(OP)$$

risulta in definitiva:

$$w(P) - w(O) = -\theta' \cdot \left[ \omega_T(OP) - \frac{\Omega}{H} \cdot h(OP) \right]$$

Ponendo:

$$\omega_T(OP) - \frac{\Omega}{H} \cdot h(OP) = \lambda_T(OP)$$

lo spostamento relativo longitudinale si può scrivere, in forma perfettamente analoga a quella valida per le sezioni monoconnesse:

$$w(P) - w(O) = -\theta' \cdot \lambda_T(OP)$$

Tale formula esprime, dunque, l'ingobbimento della sezione  $o$ , meglio, lo spostamento relativo longitudinale fra i punti appartenenti alla superficie cilindrica media.

La quantità  $\lambda_T(OP)$ , funzione della posizione del punto  $P$  e del polo  $T$ , che possiede le dimensioni  $[L^2]$ , si definisce *distanza areale*<sup>9</sup> di polo  $T$  del generico punto  $P$  rispetto al punto iniziale di riferimento  $O$  e, come bene si evince dalla sua espressione, per le sezioni monoconnesse coincide con l'area settoriale di polo

<sup>9</sup> Per essere sempre utilizzata come una distanza geometrica seppure con le dimensioni di un'area.

$T$ . In essa si assumono  $\omega_T > 0$  e  $h > 0$  per rotazione levogira del raggio vettore, con  $w > 0$  concorde a  $z$ , ed  $M^{(1)} > 0$  se il suo vettore rappresentativo ha lo stesso verso di  $z$ .

Assumendo come punto iniziale di riferimento un punto  $O$  avente componente di spostamento longitudinale  $w(O) = 0^{10}$ , l'espressione innanzi ricavata fornisce l'ingobbimento (spostamento assoluto longitudinale) di ogni punto della linea media ovvero, dato il piccolo spessore, della sezione stessa:

$$w(P) = -\theta' \cdot \lambda_T(P)$$

Essendo lineare la dipendenza di  $w$  da  $\lambda$ , noto il diagramma delle distanze areali sarà noto altresì, a meno di  $\theta'$ , il diagramma degli ingobbimenti che, si tenga ben presente, è quello legato al solo stato tensionale primario.

Si osservi che, pur essendo in generale  $w$ ,  $\omega$  e  $\lambda$  funzioni sia dell'ascissa curvilinea  $c$  della sezione che dell'ascissa  $z$ , per semplicità di scrittura, nel seguito, tali indicazioni saranno spesso sottintese.

#### Problema 4.4

Dimostrare che la sezione anulare di spessore costante possiede ingobbimento nullo.

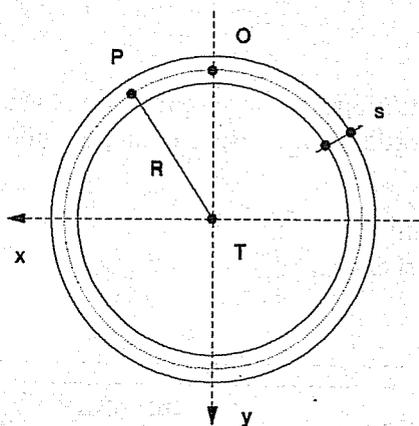


Fig. 4.21

Dovendo essere, per motivi di simmetria, il centro di rotazione coincidente con il baricentro della sezione ed il punto  $O$  dotato di ingobbimento nullo,  $w(O) = 0$ , per il generico punto  $P$  della linea media vale la seguente relazione:

<sup>10</sup> Soddisfano, ad esempio, tale requisito i punti della linea media appartenenti ad eventuali assi di simmetria della sezione: dovendo essere, infatti, i diagrammi di  $\lambda_T$ , e dunque di  $w$ , antisimmetrici rispetto a tale asse, detti punti dovranno necessariamente ingobbimento nullo e cioè trovarsi nei punti di inversione dei diagrammi.

$$w(P) = -\theta' \cdot \left[ \omega_T(P) - \frac{\Omega}{H} \cdot h(P) \right] = -\theta' \cdot \lambda_T(P)$$

Essendo:

$$\omega_T(P) = \widehat{OP} \cdot R$$

$$\Omega = 2\pi \cdot R^2$$

$$h(P) = \int_0^P \frac{dc}{s} = \frac{\widehat{OP}}{s}$$

$$H = \oint \frac{dc}{s} = \frac{2\pi \cdot R}{s}$$

a sostituzioni effettuate risulta:

$$w_T(P) = -\theta' \cdot \left( \widehat{OP} \cdot R - 2\pi \cdot R^2 \cdot \frac{\widehat{OP}}{2\pi \cdot R} \right) = 0$$

il che dimostra che tutti i punti della linea media della sezione posseggono ingobbimento nullo.

Ciò, d'altronde, si poteva evincere immediatamente dal fatto che, essendo la figura polar-simmetrica, tutti i punti appartengono ad assi di simmetria e, dunque, sono caratterizzati da ingobbimento nullo.

#### Problema 4.5

Determinare la condizione cui deve soddisfare la geometria di una sezione rettangolare in parete sottile perché risulti ovunque nullo il suo ingobbimento.

Posto:

- $\alpha$  rapporto tra i lati;
- $\beta$  rapporto tra gli spessori;

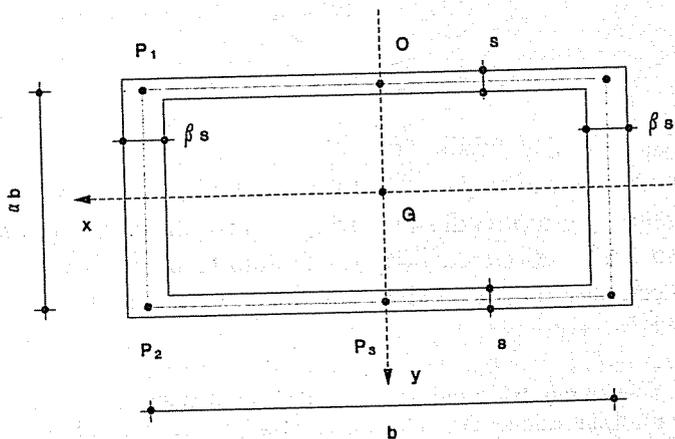


Fig. 4.22

ed essendo  $w = -\lambda_T \cdot \theta'$ , basta imporre che sia ovunque nullo il diagramma delle distanze areali:

$$\lambda_T = \omega_T - \Omega \cdot \frac{h}{H}$$

Poiché tale diagramma è lineare ed assume valori nulli nei punti appartenenti agli assi di simmetria, basterà imporre che in un qualunque altro punto  $P$  risulti:

$$\lambda_T(P) = 0 \quad \text{ovvero:} \quad \omega_T(P) = \frac{\Omega}{H} \cdot h(P)$$

In particolare, assumendo il punto di origine  $O$  su di un asse di simmetria, ed il punto  $P \equiv P_1$  risulta:

$$\begin{aligned} \omega_T(P_1) &= \frac{\alpha \cdot b^2}{4} & h(P_1) &= \frac{b}{2 \cdot s} \\ \Omega &= 2 \cdot \alpha \cdot b^2 & H &= 2 \cdot \left( \frac{b}{s} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{b}{s} \right) \end{aligned}$$

e per la condizione imposta:

$$\frac{\alpha \cdot b^2}{4} = \frac{\alpha \cdot b^2}{2} \cdot \left[ \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\beta}} \right] \quad \text{ovvero:} \quad \alpha = \beta$$

Le sezioni rettangolari in parete sottile chiuse, dunque, possiedono ingobbimento nullo solo se gli spessori delle pareti sono nello stesso rapporto dei lati; per la sezione quadrata cava, in particolare, dovrà risultare costante lo spessore.

### 4.3.3 - Le sezioni pluriconnesse

Anche nel caso in cui il grado di connessione della sezione sia superiore a due si può definire una distanza areale dalla quale risalire alla funzione ingobbimento.

Partendo dall'espressione di quest'ultima valida per le sezioni biconnesse:

$$w(P) - w(O) = -\theta' \cdot \omega_T(OP) + \int_O^P \gamma^{(1)} \cdot dc$$

e ponendo la *funzione di flusso locale*:

$$\frac{\tau^{(1)} \cdot s}{G \cdot \theta'} = t$$

che dipende dal solo flusso relativo al ramo in esame (per essere il denominatore costante), risulta:

$$\gamma^{(1)} = \frac{\tau^{(1)}}{G} = \frac{\theta' \cdot t}{s}$$

da cui:

$$w(P) - w(O) = -\theta' \cdot \omega_T(OP) + \theta' \cdot \int_0^P \frac{t}{s} \cdot dc$$

ed essendo la *funzione di circuitazione*:

$$\int_0^P \frac{dc}{s} = h(OP)$$

si ha:

$$w(P) - w(O) = -\theta' \cdot [\omega_T(OP) - t(OP) \cdot h(OP)] = -\theta' \cdot \lambda_T(OP)$$

avendo definito, in questo caso, una distanza areale:

$$\lambda_T(OP) = \omega_T(OP) - t(OP) \cdot h(OP)$$

relativa alle sezioni pluriconnesse, analoga a quella valida per le sezioni biconnesse<sup>11</sup>.

Ciò consente, in definitiva, di rendere sempre valida la espressione:

$$w(P) - w(O) = -\theta' \cdot \lambda_T(OP)$$

salvo ad attribuire alla distanza areale significati diversi in dipendenza del grado di connessione, ovvero:

$$\lambda_T(OP) = \omega_T(OP)$$

per le sezioni monoconnesse

$$\lambda_T(OP) = \omega_T(OP) - \frac{\Omega}{H} \cdot h(OP)$$

per le sezioni biconnesse

$$\lambda_T(OP) = \omega_T(OP) - t(OP) \cdot h(OP)$$

per le sezioni pluriconnesse

<sup>11</sup> Nel caso di sezione biconnessa essendo:  $\theta' = \frac{M^{(1)} \cdot H}{G \cdot \Omega^2}$  e  $\tau^{(1)} = \frac{M^{(1)}}{\Omega \cdot s}$   
 risulta:  $t = \frac{\tau^{(1)} \cdot s}{G \cdot \theta'} = \frac{M^{(1)}}{\Omega \cdot s} \cdot \frac{s}{G} \cdot \frac{\Omega^2 \cdot G}{M^{(1)} \cdot H} = \frac{\Omega}{H}$   
 da cui:  $t \cdot h = \Omega \cdot h/H$  c.v.d.

Al fine di non generare equivoci è bene chiarire che tale espressione, di evidente comodità formale, non esplicita appieno il significato dei simboli.

Trattandosi di sezione pluriconnessa, infatti, ha senso solo definire la distanza areale relativa al generico ramo  $i$  come somma dell'area settoriale e della funzione di flusso locale per la funzione circuitale che gli compete:

$$\lambda_{T_i} = \omega_{T_i} - t_i \cdot h_i$$

Per poter determinare gli  $r$  valori incogniti di  $t_i$ , ovvero di  $\lambda_{T_i}$  nei rami appartenenti alle  $m$  maglie che costituiscono la sezione, ed il valore dell'angolo unitario di torsione, è possibile operare in maniera del tutto analoga a quanto si fa per definire lo stato tensionale da torsione pura nelle sezioni pluriconnesse.

Resa la sezione monoconnessa e fissato un verso di percorrenza della linea media, è possibile scrivere  $m$  equazioni di congruenza, una per ogni maglia  $j$ , tramite il *teorema di Stokes* che porge:

$$\oint_j \tau^{(1)} \cdot dc = G \cdot \theta' \cdot \Omega_j \quad \forall j \in \{1, m\}$$

Moltiplicando e dividendo il primo termine per lo spessore  $s$  e ricordando che il flusso  $[\tau_i^{(1)} \cdot s_i] = [\tau^{(1)} \cdot s]_i$  è costante per ogni ramo, la circuitazione relativa alla singola maglia si potrà esprimere come somma dei flussi costanti che competono ai singoli  $l$  rami, costituenti la maglia  $j$ , per le rispettive funzioni di circuitazione:

$$\oint_j \tau^{(1)} \cdot dc = \oint_j \tau^{(1)} \cdot s \cdot \frac{dc}{s} = \sum_1^l [\tau^{(1)} \cdot s]_i \cdot \int_{C_i} \frac{dc}{s}$$

e posto per comodità di scrittura:

$$\int_{C_i} \frac{dc}{s} = h_i$$

l'equazione di congruenza per ogni maglia assume l'espressione:

$$\sum_1^l [\tau^{(1)} \cdot s]_i \cdot h_i = G \cdot \theta' \cdot \Omega_j$$

Essendo, per le posizioni fatte:

$$\frac{[\tau^{(1)} \cdot s]_i}{G \cdot \theta'} = t_i$$

per ogni maglia  $j$  dovrà essere soddisfatta l'equazione:

$$\sum_1^l t_i \cdot h_i = \Omega_j$$

Si possono, inoltre, scrivere  $r - m = n - 1$  equazioni di equilibrio nei singoli nodi, in cui convergono  $k$  tratti, del tipo:

$$\sum_1^k [\tau^{(1)} \cdot s]_i = 0$$

che, con le posizioni assunte, si possono esprimere nella forma:

$$\sum_1^k G \cdot \theta' \cdot t_i = 0$$

ovvero:

$$\sum_1^k t_i = 0$$

La soluzione del sistema di  $r$  equazioni così ottenuto, fornisce i valori incogniti delle  $t_i$  dai quali è possibile risalire alle distanze areali  $\lambda_{\tau_i}$  relative ai singoli rami e, dunque, alla funzione  $w$  per l'intera sezione, che consente la conoscenza degli ingobbimenti in ogni punto.

Note le  $t_i$  è possibile, ove necessario, determinare l'angolo unitario di torsione imponendo la condizione di equilibrio globale alla rotazione della sezione sottoposta al momento torcente primario che le compete:

$$M^{(1)} = \sum_1^m M_j^{(1)} = \sum_1^m \Omega_j \cdot [\tau^{(1)} \cdot s]_j = \sum_1^m \Omega_j \cdot G \cdot \theta' \cdot t_j$$

Conosciuto il valore di  $\theta'$  si può risalire alle tensioni tangenziali primarie nei singoli rami tramite l'espressione:

$$\tau_i^{(1)} = G \cdot \theta' \cdot \frac{t_i}{s_i} = G \cdot \frac{M^{(1)}}{k^{(1)}} \cdot \frac{t_i}{s_i} = \frac{M^{(1)}}{I^*} \cdot \frac{t_i}{s_i}$$

Agli stessi risultati si può pervenire determinando direttamente i valori delle tensioni  $\tau_i^{(1)}$  nella sezione pluriconnessa e sostituendoli nella espressione di  $\gamma^{(1)}$  presente in  $w$ .

Risulta particolarmente interessante osservare che la procedura descritta consente, altresì, di pervenire alla determinazione del centro di taglio, per le sezioni

pluriconnesse, essenziale per la conoscenza della funzione  $\lambda_T$  di cui costituisce il polo.

In definitiva, allora, data una sezione pluriconnessa, le fasi di lavoro da eseguire per pervenire al diagramma di  $\lambda_T$  e dunque alle grandezze che ne conseguono, sono nell'ordine (omettendo il pedice  $i$ ):

- Ricerca del baricentro  $G$  e assegnazione di un sistema di assi  $x, y, z$  centrali d'inerzia.
- Introduzione di  $c-1$  sconnessioni, al fine di rendere la sezione monoconnessa.
- Determinazione della funzione  $\omega_G$  per il sistema monoconnesso.
- Calcolo della funzione locale  $t$  e della funzione di circuitazione  $h$ , per ogni ramo  $i$  costituente la sezione, e quindi della funzione prodotto  $t \cdot h$  relativa all'intera sezione che, si ricordi, risulta indipendente dal polo.
- Determinazione della funzione  $\lambda_G = \omega_G - t \cdot h$  per l'intera sezione.
- Individuazione del centro di taglio, tramite le relazioni:

$$x_T = \frac{I_{xy}^G}{I_{yy}}; \quad y_T = -\frac{I_{xx}^G}{I_{xx}}$$

avendo calcolato i momenti centrifughi areali:

$$I_{xx}^G = \int_A \lambda_G \cdot x \cdot dA \quad \text{e} \quad I_{yy}^G = \int_A \lambda_G \cdot y \cdot dA$$

ed i momenti d'inerzia assiali:

$$I_{xx} = \int_A x^2 \cdot dA \quad \text{e} \quad I_{yy} = \int_A y^2 \cdot dA$$

- Determinazione della funzione  $\omega_T$  per l'intera sezione.
- Determinazione della funzione  $\lambda_T = \omega_T - t \cdot h$  per l'intera sezione pluriconnessa.

#### 4.4 - La torsione non uniforme

Se si fa mente locale alla variazione della funzione ingobbimento  $w(z)$  rispetto all'ascissa  $z$  della trave, che rappresenta altresì la componente di deformazione  $\epsilon_z^{(2)} = \frac{dw}{dz}$ , a seconda che tale variazione risulti nulla o diversa da zero, possono verificarsi due differenti comportamenti:

- a) - Quando le sezioni subiscono tutte il medesimo ingobbimento risulta per

esse  $w(z)$  costante e dunque:

$$dw/dz=0 \quad \text{ovvero} \quad \epsilon_z^{(2)}=0$$

La generica fibra, a deformazione avvenuta, non muta la sua lunghezza essendo traslata rigidamente e ciò si verifica quando tutte le sezioni sono sottoposte alla medesima caratteristica torcente interna (per cui si deformano tutte alla stessa maniera), ovvero quando il momento torcente interno è costante lungo  $z$  e le sezioni sono libere di ingobbarsi. In tale caso, dunque, essendo  $\epsilon_z^{(2)}=0$  risulterà anche  $\sigma_z^{(2)}=0$  e pertanto non nascerà nella sezione alcuna tensione normale da ingobbimento, ovvero l'ingobbimento si verificherà senza l'insorgere di tensioni normali.

b) - Quando gli ingobbimenti non sono uguali da sezione a sezione, vuol dire che  $dw/dz \neq 0$  e quindi i punti corrispondenti di due sezioni diverse subiscono spostamenti longitudinali differenti; la generica fibra, in tal caso, a deformazione avvenuta, muta la sua lunghezza.

Essendo la dilatazione  $\epsilon_z^{(2)} \neq 0$ , risulta anche  $\sigma_z^{(2)} \neq 0$  e ciò comporta che nelle sezioni nascano tensioni normali che verranno contrassegnate con l'indice (2) per significare che sono originate da sollecitazioni torsionali; tali tensioni dovranno possedere risultante nulla, tale essendo la caratteristica esterna normale. Si dimostrerà, inoltre nel seguito, che per equilibrare le  $\sigma_z^{(2)}$  è necessaria la presenza di nuove tensioni tangenziali  $\tau_z^{(2)}$  che verranno, anch'esse, contrassegnate con il medesimo indice (2). Tali tensioni secondarie favoriscono, peraltro, l'instabilità locale già pericolosa per la sottigliezza del profilo.

Il comportamento testè descritto si riscontra, dunque, allorchè la caratteristica torcente interna risulta variabile lungo  $z$ , ovvero nel caso di *torsione non uniforme* in quanto, per la proporzionalità esistente tra cause ed effetti, saranno diversi da sezione a sezione anche gli spostamenti assiali: ciò si verifica non solo quando il momento torcente esterno è variabile, ma anche quando, pur essendo esso costante, qualche sezione della trave è vincolata a non ingobbarsi.

Nel primo caso lo stato tensionale secondario interessa l'intero elemento strutturale mentre nel secondo è localizzato in corrispondenza delle sezioni vincolate, limitatamente alla distanza di estinzione.

Dalla relazione  $\theta'(z) = M^{(1)}/k^{(1)}$  si evince che, in tali circostanze, l'angolo unitario di torsione non risulta più costante da sezione a sezione, ma variabile con  $z$ .

Nel seguito, come già per le tensioni tangenziali da torsione primaria, sia per le componenti di deformazione che per quelle di tensione dovute a torsione non uniforme, non potendosi dare luogo ad equivoci, si ometterà sempre il pedice  $z$ .

4.4.1 - Le tensioni normali secondarie

Si è dimostrato, in precedenza, che l'ingobbimento del generico punto  $P$ , dovuto alle tensioni tangenziali primarie  $\tau^{(1)}$  e, dunque, calcolato alla *De Saint Venant*, vale:

$$w(P) = -\theta'(z) \cdot \lambda_T(P) + w(O)$$

Nel caso in cui tale spostamento sia variabile con  $z$  risulterà:

$$\epsilon^{(2)}(P) = \frac{dw(P)}{dz} = \frac{d}{dz} [-\theta'(z) \cdot \lambda_T(P) + w(O)]$$

ovvero, assumendo un punto di riferimento  $O$  ad ingobbimento nullo, per travi a sezione costante ( $\lambda_T$  costante con  $z$ ), sarà:

$$\epsilon^{(2)}(P) = -\theta''(z) \cdot \lambda_T(P)$$

ossia:

$$\sigma^{(2)}(P) = -E \cdot \theta''(z) \cdot \lambda_T(P)$$

Si può subito osservare che, dipendendo  $w$ ,  $\epsilon^{(2)}$  e  $\sigma^{(2)}$  linearmente da  $\lambda_T$ , i diagrammi dell'ingobbimento, delle componenti di deformazione e delle tensioni normali da torsione, risultano fra loro affini e noti qualitativamente quando sia noto il diagramma delle distanze areali.

**Problema 4.6**

Determinare l'andamento delle funzioni  $w(c)$ ,  $\epsilon^{(2)}(c)$  e  $\sigma^{(2)}(c)$  nella sezione biconnessa rappresentata in figura.

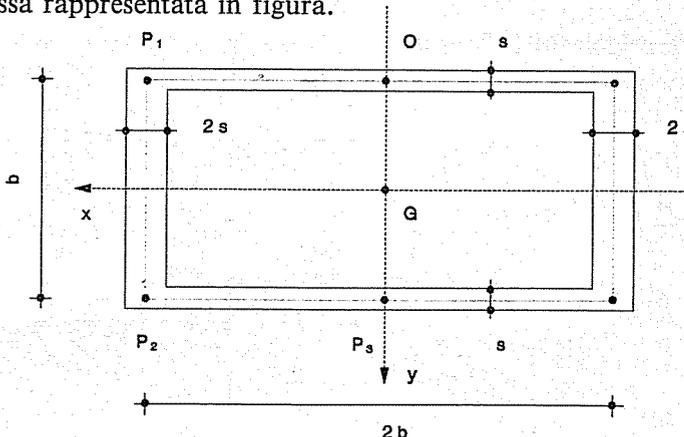


Fig. 4.23

Tale sezione bene schematizza una struttura monocellulare costituita da due travi, soletta e controsoletta.

Ricordando che:

$$w(P) = -\theta'(z) \cdot \lambda_T(P)$$

$$\epsilon^{(2)}(P) = -\theta''(z) \cdot \lambda_T(P)$$

$$\sigma^{(2)}(P) = -E \cdot \theta''(z) \cdot \lambda_T(P)$$

risulta necessaria la determinazione della funzione  $\lambda_T(P)$ : ciò si ottiene sconnettendo la sezione e tracciando separatamente i diagrammi delle due quantità  $\omega_T(c)$  e  $-\frac{\Omega}{H} \cdot h(c)$ . Fissato come polo il centro di rotazione  $T$ , che coincide in tale caso con il baricentro  $G$  della sezione, si può ottenere il diagramma di  $\lambda_T(c)$  assumendo come punto iniziale ad ingobbimento nullo un punto  $O$  che appartiene all'asse di simmetria della sezione, per il quale risulta, appunto,  $\omega_T(O) = 0$ .

**Diagramma del termine  $\omega_T(c)$ :**

$$\omega_T(O) = 0$$

$$\omega_T(P_1) = +\frac{b^2}{2}$$

$$\omega_T(P_2) = +\frac{3}{2} b^2$$

$$\omega_T(P_3) = +2 b^2$$

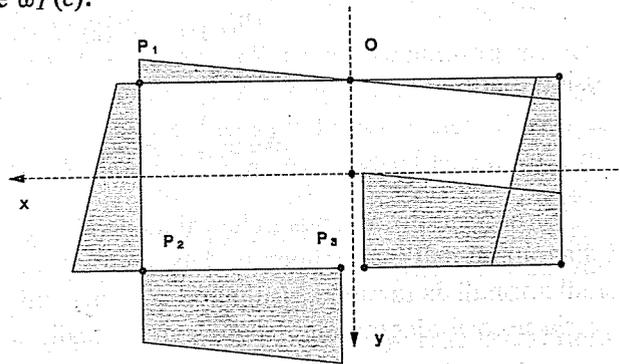


Fig. 4.24

**Diagramma del termine  $-\frac{\Omega}{H} \cdot h(c)$ :**

Essendo  $\Omega = 4b^2$  ed  $H = 5b/s$  risulta:

$$\frac{\Omega}{H} \cdot h(O) = 0$$

$$\frac{\Omega}{H} \cdot h(P_1) = -\frac{4}{5} b^2$$

$$\frac{\Omega}{H} \cdot h(P_2) = -\frac{6}{5} b^2$$

$$\frac{\Omega}{H} \cdot h(P_3) = -2b^2$$

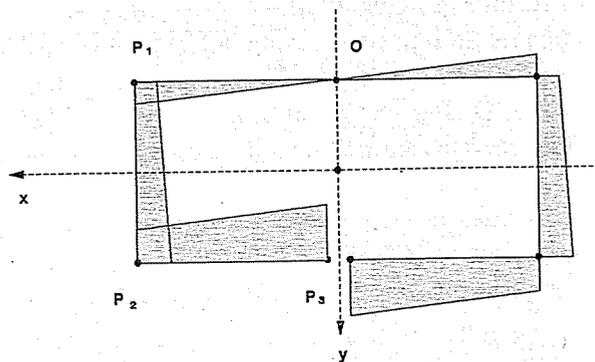


Fig. 4.25

Osservazioni:

- le coordinate di entrambi i diagrammi presentano segni opposti rispetto al piano di simmetria verticale, in quanto le due metà vengono percorse dal raggio vettore in verso opposto;
- il valore del termine  $-\frac{\Omega}{H} \cdot h(P_3)$  nel punto di discontinuità  $P_3$  è uguale, ma di segno opposto, a quello del termine  $\omega_T(P_3)$  per il ripristino della congruenza, e ciò si verifica in qualunque punto venga praticata la sconnessione iniziale della sezione chiusa.

**Diagramma di  $\lambda_T(c)$ :**

Sommando algebricamente i due diagrammi parziali trovati si ottiene:

$$\lambda_T(O) = 0$$

$$\lambda_T(P_1) = -\frac{3}{10} b^2$$

$$\lambda_T(P_2) = \frac{3}{10} b^2$$

$$\lambda_T(P_3) = 0$$

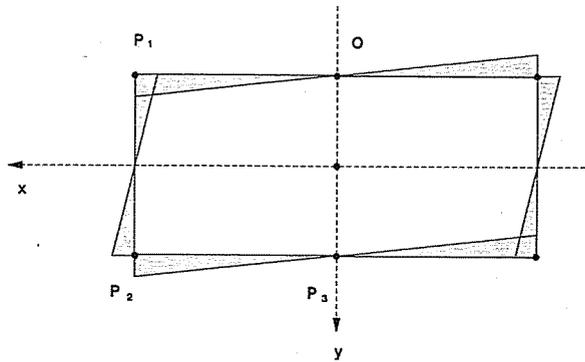


Fig. 4.26

Si può verificare facilmente che le ordinate risultano nulle nei punti ubicati sugli assi di simmetria e di egual valore nei punti nodali; l'area totale è, inoltre, nulla.

Moltiplicando tale diagramma per  $-\theta'(z)$  si ottengono gli ingobbimenti  $w(c,z)$ ; qualora, inoltre, la trave sia sottoposta a torsione non uniforme, il diagramma di  $\lambda_T(c)$ , cambiato di segno e moltiplicato per  $\theta''(z)$  o per  $E \cdot \theta''(z)$  for-

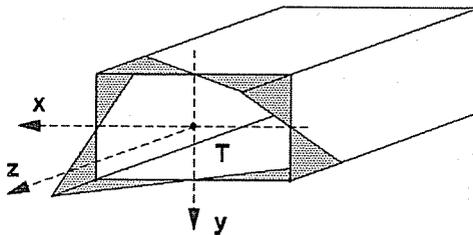


Fig. 4.27

nisce, rispettivamente, i diagrammi di  $\epsilon^{(2)}(c,z)$  e di  $\sigma^{(2)}(c,z)$  che, con efficace rappresentazione assonometrica, sono riportati in figura 4.27.

Nel caso in cui la sezione presenti diaframmi membranali intermedi, le quantità diagrammate non subiscono variazioni di rilievo: ciò significa che il contributo di tali setti, ai fini torsionali, è pressochè irrilevante.

#### 4.4.2 - Le coordinate areali principali

Poiché si considera il caso di sollecitazione da sola torsione semplice, si potrà imporre che siano nulli tanto la risultante delle forze elementari  $\sigma^{(2)} \cdot dA$  quanto i loro momenti risultanti rispetto agli assi centrali della sezione:

$$N^{(2)} = \int_A \sigma^{(2)} \cdot dA = 0$$

$$M_x^{(2)} = \int_A \sigma^{(2)} \cdot x \cdot dA = 0$$

$$M_y^{(2)} = \int_A \sigma^{(2)} \cdot y \cdot dA = 0$$

##### 4.4.2.1 - Il raggio vettore principale

Sostituendo nelle precedenti equazioni il valore di  $\sigma^{(2)}$ , la prima relazione è soddisfatta solo se:

$$- \int_A E \cdot \theta''(z) \cdot \lambda_T(c) \cdot dA = 0$$

e dunque solo se  $I_K^T = 0$ , essendo  $I_K^T = \int_A \lambda_T(c) \cdot dA$  il *momento statico areale* relativo all'intera sezione (con dimensioni  $[L^4]$ ) calcolato assumendo come polo il centro di rotazione  $T$ .

Volendo esprimere la distanza areale  $\lambda_T$  di polo  $T$  in funzione della distanza areale  $\lambda_G$  (avente come polo il baricentro  $G$  della sezione assunto come origine degli assi) e delle componenti secondo gli assi coordinati della distanza  $\overline{GT}$ , si può dimostrare il seguente *teorema di trasporto*:

$$\lambda_T = \lambda_G - x_T \cdot y + y_T \cdot x$$

Questa, sostituita nell'equazione di equilibrio precedente, porge la condizione:

$$I_{\lambda}^T = \int_A (\lambda_G - x_T \cdot y + y_T \cdot x) \cdot dA = 0$$

ed essendo nulli i momenti statici rispetto agli assi  $x$  ed  $y$  si riduce alla condizione:

$$I_{\lambda}^T = I_{\lambda}^G = 0$$

che definisce l'orientamento del *raggio vettore principale* ovvero la posizione iniziale del raggio vettore, avente come polo il centro di rotazione  $T$  e come estremo un punto  $O$  della linea media dotato di distanza areale nulla: tutti i punti che posseggono tale requisito si definiscono *punti areali nulli*.

Questi punti sono immediatamente individuabili, ad esempio, quando la sezione oggetto di studio presenti perlomeno un asse di simmetria: in tale caso essi si trovano, infatti, all'intersezione della linea media con il detto asse e, risultando i diagrammi di  $\lambda_T(c)$  antisimmetrici, il momento statico esteso all'intera area si annulla. Nelle sezioni dotate di almeno una simmetria, dunque, il raggio vettore principale risulta disteso lungo tale asse.

Quando sussistano più punti areali nulli quello più vicino al polo  $T$  prende il nome di *punto areale principale nullo*.

Quando nessun punto areale nullo sia noto a priori (ad esempio mediante considerazioni di simmetria) è possibile determinarne la posizione lungo la linea media della sezione sfruttando le considerazioni seguenti.

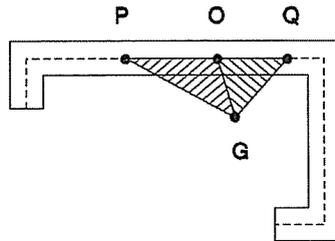


Fig. 4.28

Detto  $G$  il polo del raggio vettore, assumiamo, inizialmente in maniera arbitraria, un qualunque punto  $Q$  della linea media come ipotetico punto areale nullo: il generico punto  $P$  rispetto ad esso avrà distanza areale  $\lambda_G(OP)$ .

Detto  $O$  il vero punto areale nullo e detta  $\lambda_G(OP)$  la distanza areale di  $P$  rispetto ad  $O$ , fra le due distanze areali, calcolate con diversi punti iniziali, sussiste la relazione:

$$\lambda_G(OP) = \lambda_G(OQ) - \lambda_G(OO)$$

ed ancora:

$$\int_A \lambda_G(OP) \cdot dA = \int_A \lambda_G(QP) \cdot dA - \int_A \lambda_G(QO) \cdot dA$$

Ma essendo  $O$  il vero punto areale nullo dovrà essere verificata la condizione:

$$\int_A \lambda_G(OP) \cdot dA = I_x^G = 0$$

e, dunque, dovrà risultare per qualunque punto  $P$ :

$$\int_A \lambda_G(QP) \cdot dA = \int_A \lambda_G(QO) \cdot dA$$

Essendo, inoltre,  $\lambda_G(QO)$  costante al variare di  $P$  sarà:

$$\int_A \lambda_G(QO) \cdot dA = \lambda_G(QO) \cdot A$$

da cui la relazione:

$$\lambda_G(QO) = \frac{1}{A} \cdot \int_A \lambda_G(QP) \cdot dA = \frac{I_x^G(QP)}{A}$$

Tramite l'equazione:

$$\lambda_G(OP) = \lambda_G(QP) - \lambda_G(QO)$$

sottraendo dai valori di  $\lambda_G(QO)$ , calcolati con  $Q$  punto iniziale arbitrario, la quantità costante  $\lambda_G(QO)$  testè ricavata, si ottengono i reali valori delle distanze areali che non solo soddisfano l'equilibrio alla traslazione delle tensioni normali secondarie, ma consentono di individuare l'orientamento del raggio vettore principale ed i punti areali nulli.

Quando, dunque, si abbia a che fare con una sezione priva di assi di simmetria, per la determinazione dei punti areali nulli è possibile adottare la seguente procedura:

Individuato il baricentro  $G$  della sezione e fissato un qualunque punto areale nullo  $Q$  di primo tentativo, si determina la funzione  $\lambda_G(QP)$ . Si calcola quindi la quantità costante  $\lambda_G(QO)$  data dal rapporto tra l'integrale della detta funzione esteso all'intera sezione e l'area della sezione stessa. Sommando algebricamente punto per punto alle ordinate note di  $\lambda_G(QP)$  la quantità costante  $\lambda_G(QO)$  si ottengono le vere ordinate della distanza areale  $\lambda_G(OP)$  che definiscono, peraltro, i veri punti areali nulli.

**Problema 4.7**

Determinare i punti areali nulli per la sezione a Z, di spessore costante  $s$ , rappresentata in figura dalla sua linea media.

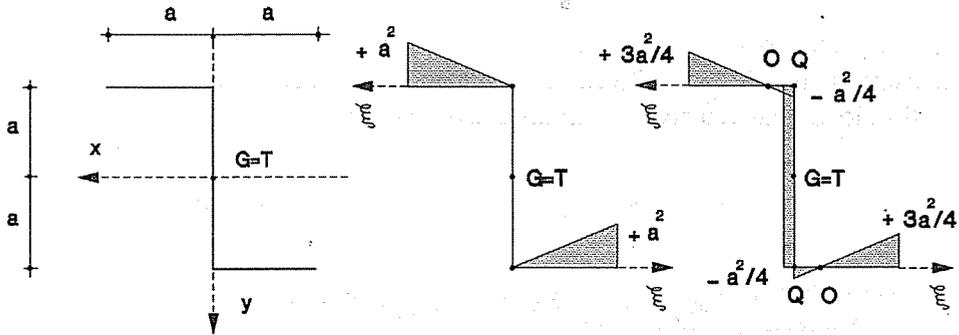


Fig. 4.29

Individuato il baricentro  $G$ , la cui posizione è immediatamente nota per motivi di simmetria, ed assunti i punti areali nulli  $Q$  di primo tentativo in corrispondenza delle estremità dell'anima, le funzioni  $\lambda_G(QP)$  hanno, per entrambe le ali, rispetto ad una stessa ascissa  $\xi$  locale di riferimento di origine  $Q$ , l'espressione:

$$\lambda_G(QP) = a \cdot \xi$$

Essendo:

$$\lambda_G(QO) = \frac{2 \cdot \int_0^a a \cdot \xi \cdot s \cdot d\xi}{4 \cdot a \cdot s} = \frac{a^2}{4}$$

La vera funzione  $\lambda_G(OP)$  presenterà, dunque, ordinate:

$$\lambda_G(OP) = a \cdot \xi - \frac{a^2}{4}$$

ovvero la distribuzione riportata in figura, che individua nella posizione  $\xi = a/4$  i punti areali nulli.

**4.4.2.2 - Il centro di torsione**

Tornando al sistema di equazioni iniziali, quelle di equilibrio alla rotazione delle forze elementari  $\sigma^{(2)} \cdot dA$ , esplicitando il valore delle tensioni normali secondarie, pongono:

$$-\int_A E \cdot \theta''(z) \cdot \lambda_T(c) \cdot x \cdot dA = 0 \quad \text{da cui:} \quad \int_A \lambda_T(c) \cdot x \cdot dA = 0$$

$$-\int_A E \cdot \theta''(z) \cdot \lambda_T(c) \cdot y \cdot dA = 0 \quad \text{da cui:} \quad \int_A \lambda_T(c) \cdot y \cdot dA = 0$$

Sostituendo anche in esse la relazione del *teorema di trasporto*, che esprime la distanza areale di polo  $T$  (centro di rotazione) in funzione della distanza areale di polo  $G$  (baricentro), si hanno le espressioni:

$$\int_A (\lambda_G - x_T \cdot y + y_T \cdot x) \cdot x \cdot dA = I_{xx}^G + y_T \cdot I_{xx} = 0$$

$$\int_A (\lambda_G - x_T \cdot y + y_T \cdot x) \cdot y \cdot dA = I_{yy}^G - x_T \cdot I_{yy} = 0$$

che individuano le coordinate:

$$x_T = \frac{I_{yy}^G}{I_{yy}}; \quad y_T = -\frac{I_{xx}^G}{I_{xx}}$$

del *polo principale*  $T$ , ovvero del centro intorno al quale ruota la sezione, che si definisce *centro di torsione*. Esso ha il significato cinematico proprio, come si è già avuto modo di dire, solo nel caso di torsione non uniforme, mentre perde senso nel caso di sollecitazione da torsione pura, per la quale ogni punto della sezione può essere assunto quale centro di rotazione.

Come si evince immediatamente dalle espressioni di  $x_T$  e  $y_T$  detto punto, nella sollecitazione di torsione semplice, coincide con il *centro di taglio*.

Si può, di contro, affermare che la sollecitazione di torsione non uniforme è semplice, ovvero non accompagnata da flessione e taglio, quando il centro di torsione coincide con il centro di taglio definito nella flessione.

Una sezione soggetta a momento torcente e sforzo normale, in genere, non ruota intorno al centro di taglio (salvo che non ammetta due assi di simmetria per cui  $G \equiv T$ ) e ciò interessa l'instabilità delle travi in parete sottile monoconnesse.

Per dimostrare in maniera semplice la coincidenza tra centro di taglio e centro di torsione, si può considerare una sezione sottoposta prima ad una forza  $F$  passante per  $T$  (sistema  $A$ ), e poi ad una coppia torcente  $\mathfrak{M}$  (sistema  $B$ ).

Per definizione di centro di taglio, la forza  $F$  passando per  $T$  produce, nel sistema  $A$ , rotazioni  $\varphi_A$  nulle. Detta  $f_B$  la componente verticale dello spostamento del punto  $T$  nel sistema  $B$ , deve essere per il *teorema di Betti*:

$$F \cdot f_B = \mathfrak{M} \cdot \varphi_A$$

da cui essendo  $\varphi_A = 0$ , dovrà risultare:  $F \cdot f_B = 0$ , ovvero, per  $F$  qualunque:  $f_B = 0$ .

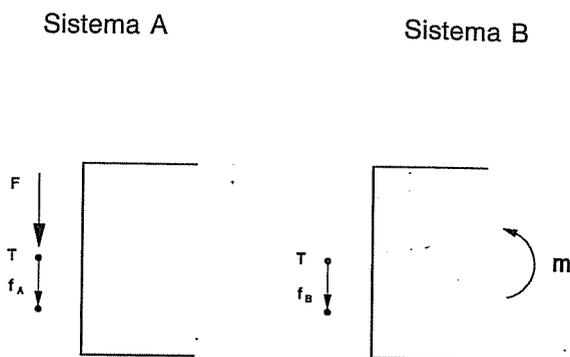


Fig. 4.30

Ciò significa che il punto  $T$ , per effetto della coppia, non subisce traslazioni e, dunque, che il centro di taglio coincide con il centro di torsione.

Le aree settoriali e le distanze areali aventi il polo coincidente con il centro di torsione della sezione si definiranno *principali*, e per esse si ometterà sempre, nel seguito, il pedice  $T$ , assumendo:

$$\omega \equiv \omega_T; \quad \lambda \equiv \lambda_T$$

ed ancora:

$$I_{abc\dots} \equiv I_{abc\dots}^T$$

Ove il polo non coincida con il centro di torsione, esso verrà indicato esplicitamente. Nel seguito i centri di taglio e di torsione si supporranno coincidenti.

Da tutto quanto detto innanzi emergono, dunque, ulteriori differenze fra i diversi tipi di sezione che si possono così compendiare:

Per le *sezioni compatte* è possibile definire una coppia di *coordinate lineari principali*  $x, y$  che individuano gli *assi centrali di inerzia* della sezione tramite le condizioni:

- $I_x = 0$  ed  $I_y = 0$  che definiscono il *baricentro*  $G$  come origine degli assi;
- $I_{xy} = 0$  che definisce l'orientamento che gli assi devono possedere per essere *principali di inerzia*, tramite la nota relazione:  

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -2 I_{xy} / (I_{yy} - I_{xx})$$

Per le *sezioni sottili*, potendosi riguardare  $\lambda$  come una vera e propria terza coordinata dei punti della sezione, è possibile definire una terna di *coordinate areali principali*  $x, y, \lambda$ , che individuano il riferimento delle distanze areali tramite le condizioni imposte ai momenti generalizzati del primo e del secondo ordine:

- $I_{\lambda x} = 0$  ed  $I_{\lambda y} = 0$  che definiscono il *centro di taglio T* come polo;
- $I_{\lambda} = 0$  che definisce l'orientamento iniziale del *raggio vettoriale principale*.

Le funzioni  $x(c)$ ,  $y(c)$ ,  $\lambda(c)$ , che soddisfano alle sei condizioni di ortogonalità innanzi espresse si dicono *coordinate generalizzate principali* della sezione trasversale della trave.

**Problema 4.8**

Determinare la distribuzione delle funzioni  $w(c)$ ,  $\epsilon^{(2)}(c)$ ,  $\sigma^{(2)}(c)$  per la sezione monoconnessa, ottenuta sconnettando la sezione del problema 4.6.

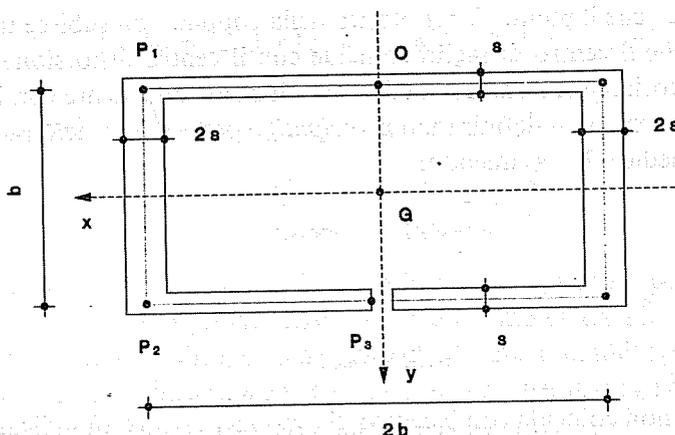


Fig. 4.31

Essendo la sezione *aperta*, il diagramma delle distanze areali coincide con quello delle aree settoriali.

Le coordinate del *centro di taglio* valgono:

$$x_T = 0$$

$$y_T = y_O - \Delta_y = \overline{OG} - \frac{\int_A \omega_O \cdot x \cdot dA}{I_{xx}}$$

Si determinano separatamente le diverse quantità, avendo assunto i riferimenti locali  $\eta$  di origine  $P_1$  e  $\xi$  di origine  $P_2$ .

Diagramma di  $\omega_O$ .

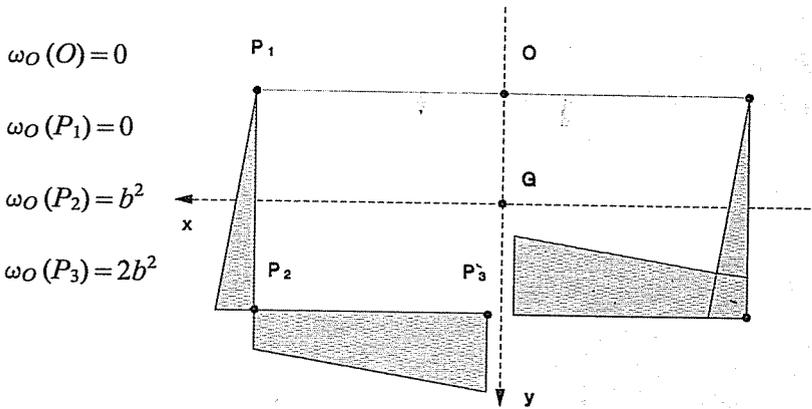


Fig. 4.32

Diagramma di  $x$ .

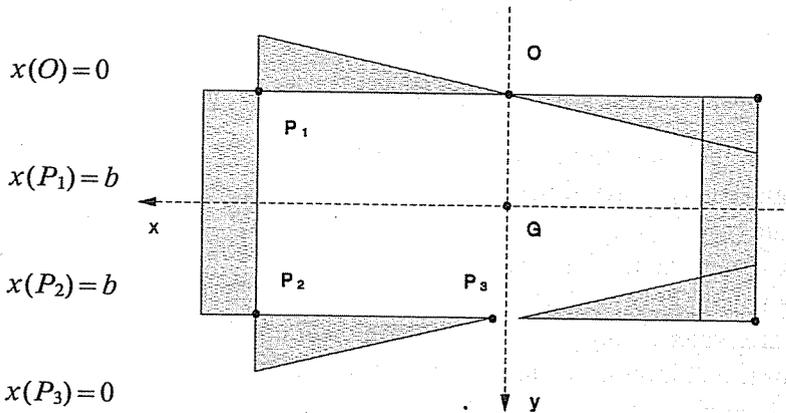


Fig. 4.33

Risulta pertanto:

$$\int_A \omega_O \cdot x \cdot dA = 2 \cdot \left[ \int_0^b (b \cdot \eta) \cdot b \cdot 2s \cdot d\eta + \int_0^b (b^2 + b \cdot \xi) \cdot (b - \xi) \cdot s \cdot d\xi \right] = \frac{10}{3} \cdot s \cdot b^4$$

Il momento d'inerzia  $I_{xx}$ , trascurando le potenze di  $s$  superiori alla prima (ciò che è lecito data la sottigliezza dello spessore) vale:

$$I_{xx} = \frac{16}{3} \cdot s \cdot b^3$$

La distanza del centro di taglio  $T$  dal polo  $O$  vale pertanto:

$$\Delta_y = -\frac{10}{3} \cdot s \cdot b^4 \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{s \cdot b^3} = -\frac{5}{8} \cdot b$$

A questo punto assumendo  $T$  come polo ed  $O$  come punto areale principale nullo, è possibile tracciare il diagramma di  $\lambda \equiv \omega$ .

$$\omega(O) = 0$$

$$\omega(P_1) = -\frac{5}{8} b^2$$

$$\omega(P_2) = +\frac{3}{8} b^2$$

$$\omega(P_3) = 2b^2$$

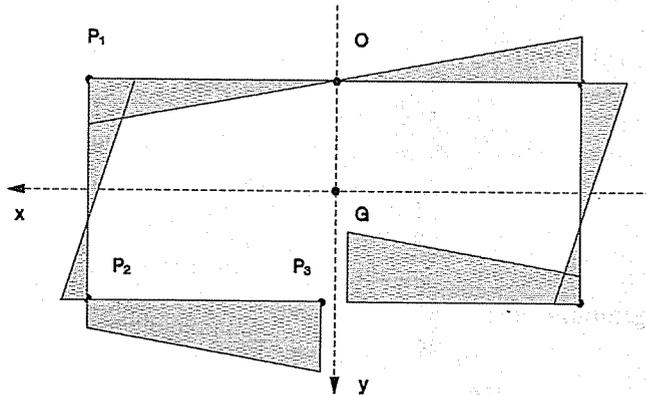


Fig. 4.34

Confrontando tale diagramma con quello relativo alla sezione biconnessa, si nota come i valori di  $\lambda_{max}$  siano, per la sezione monoconnessa, molto maggiori.

Anche in tale caso, a meno di  $\theta'(z)$ ,  $\theta''(z)$ ,  $E \cdot \theta''(z)$  e dei segni, il diagramma rappresenta rispettivamente ingobbimenti  $w(c,z)$ , componenti di deformazione  $\epsilon^{(2)}(c,z)$  e tensioni normali  $\sigma^{(2)}(c,z)$ .

In particolare, volendo operare un confronto degli ingobbimenti tra sezione aperta e chiusa, nell'ipotesi di sola torsione pura, occorre calcolare l'angolo unitario di torsione che vale:

- per la sezione monoconnessa:

$$\theta'_a = \frac{M^{(1)}}{G \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot [b \cdot (2 \cdot s)^3 + 2 \cdot b \cdot s^3]} = \frac{3}{20} \cdot \frac{M^{(1)}}{G \cdot b \cdot s^3}$$

- per la sezione biconnessa:

$$\theta'_c = \frac{M^{(1)}}{4 \cdot G \cdot (b \cdot 2 \cdot b)^2} \cdot 2 \cdot \left( \frac{2 \cdot b}{s} + \frac{b}{2 \cdot s} \right) = \frac{5}{16} \cdot \frac{M^{(1)}}{G \cdot s \cdot b^3}$$

L'ingobbimento massimo risulta, dunque:

- per la sezione monoconnessa, in  $P_3$ :

$$w_{a_{max}} = 2 \cdot b^2 \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{M^{(1)}}{G \cdot s^3 \cdot b} = \frac{3}{10} \cdot \frac{b}{s^2} \cdot \frac{M^{(1)}}{G \cdot s}$$

- per la sezione biconnessa, in P:

$$w_{c_{max}} = \frac{3}{10} \cdot b^2 \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{M^{(1)}}{G \cdot s \cdot b^3} = \frac{3}{32} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{M^{(1)}}{G \cdot s}$$

da cui:

$$\frac{w_{a_{max}}}{w_{c_{max}}} = \frac{16}{5} \cdot \frac{b^2}{s^2} = \frac{4}{5} \cdot \left( \frac{2 \cdot b}{s} \right)^2$$

Come si vede, il rapporto tra i massimi ingobbimenti, nel caso di sola torsione pura, è direttamente proporzionale al quadrato della dimensione massima della sezione, ed inversamente proporzionale al quadrato dello spessore minimo: gli ingobbimenti per la sezione aperta sono, dunque, molto maggiori e tanto più grandi quanto più la sezione risulta diffusa e sottile.

#### 4.4.3 - Le tensioni tangenziali secondarie nelle sezioni mono e bi-connesse

Si è visto come la presenza di un momento torcente variabile induca  $\sigma^{(2)}$  anch'esse variabili da sezione a sezione: la necessità di equilibrare tale differenza di tensioni normali fa sì che nascano anche tensioni tangenziali, che nel seguito saranno indicate con  $\tau^{(2)}$ .

Si consideri una sezione sottile biconnessa di spessore variabile soggetta a torsione non uniforme rappresentata, con scala falsata, in figura:

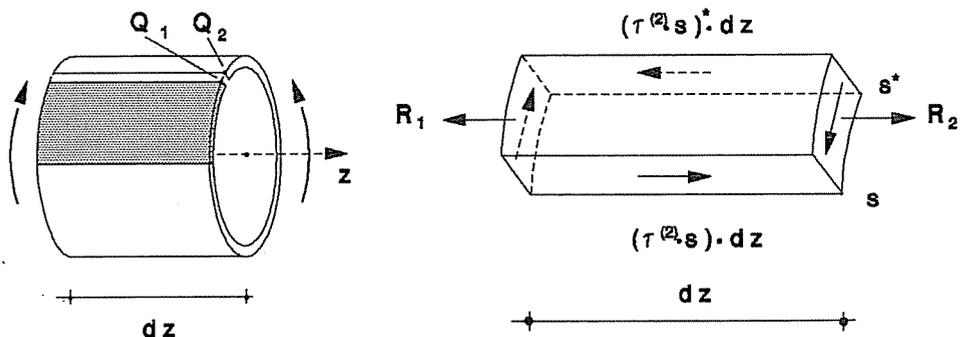


Fig. 4.35

Isolato un tronco elementare di lunghezza  $dz$  si effettuino due tagli con piani longitudinali paralleli all'asse  $z$ , rispettivamente nel generico punto di ascissa

$c^*$ , avente spessore  $s^*$  e nel punto di ascissa  $c$ , avente spessore  $s$ , in corrispondenza del quale si vuole determinare la tensione tangenziale secondaria  $\tau^{(2)}(c)$ ; l'elemento così isolato sarà soggetto a tensioni normali  $\sigma^{(2)}$  di risultanti  $R_1$  ed  $R_2$ , ed a tensioni tangenziali  $\tau^{(2)}$ , come indicato in figura. Per l'equilibrio alla traslazione, lungo l'asse  $z$ , dell'elemento dovrà essere:

$$[\tau^{(2)} \cdot s] \cdot dz = [\tau^{(2)} \cdot s]^* \cdot dz - \int_{A_c} \frac{d\sigma^{(2)}}{dz} \cdot dz \cdot dA$$

ove l'integrale è esteso alla sola area  $A_c$  di spessore  $s$  e lunghezza  $(c - c^*)$ .

Essendo per sezione costante con  $z$ :

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{dz} = \frac{d}{dz} [-E \cdot \theta''(z) \cdot \lambda(c)] = -E \cdot \theta'''(z) \cdot \lambda(c)$$

si ha:

$$\tau^{(2)} \cdot s = [\tau^{(2)} \cdot s]^* + E \cdot \theta'''(z) \cdot \int_{A_c} \lambda(c) \cdot dA = [\tau^{(2)} \cdot s]^* + E \cdot \theta'''(z) \cdot I_\lambda(c)$$

Si può osservare che tali  $\tau^{(2)}$ , come quelle da taglio, dipendono dal *momento statico areale* dell'area compresa tra la corda all'ascissa  $c$ , in corrispondenza della quale si vuole determinare la tensione, e la corda all'ascissa  $c^*$  di riferimento; inoltre  $\tau^{(2)}$ ,  $s$ ,  $I_\lambda$ , sono tutte funzioni dell'ascissa curvilinea  $c$ .

Nel caso in cui la sezione sia monoconnessa, facendo coincidere la corda di ascissa  $c^*$  con uno dei bordi liberi, risulta  $[\tau^{(2)} \cdot s]^* = 0$  e dunque:

$$\tau^{(2)} \cdot s = E \cdot \theta'''(z) \cdot I_\lambda(c) = E \cdot \theta'''(z) \cdot I_\omega(c)$$

Nell'ipotesi in cui, invece, la sezione sia biconnessa, l'ascissa  $c^*$  corrisponde ad un punto nel quale sia stata introdotta una sconnessione fittizia e, dunque, il valore del flusso incognito  $[\tau^{(2)} \cdot s]^*$  va definito tramite la condizione di congruenza che esprime l'eguaglianza degli ingobbimenti dei punti *affacciati*  $Q_1$  e  $Q_2$ , in corrispondenza dei quali si è operata la sconnessione; essendo  $dw = \gamma^{(2)} \cdot dc$ , lo spostamento relativo tra i due punti dovuto allo scorrimento  $\gamma^{(2)}$ , per la congruenza, dovrà essere nullo, ossia:

$$w(Q_1) - w(Q_2) = \int_{Q_1}^{Q_2} \gamma^{(2)} \cdot dc = \oint \frac{\tau^{(2)}}{G} \cdot dc = 0$$

da cui:

$$\oint \tau^{(2)} \cdot dc = 0$$

Tale condizione si poteva conseguire anche mediante l'applicazione del *teorema di Stokes*, ricordando che nel caso delle sezioni in parete sottile, analogamente a quanto avviene per le tensioni da taglio, le tensioni tangenziali secondarie, costanti lungo la generica corda, presentano rotore nullo:  $\text{rot } \tau^{(2)} = 0$ .

Introducendo nell'integrale il valore della  $\tau^{(2)}$  si ha:

$$\oint \frac{1}{s} \cdot \{[\tau^{(2)} \cdot s]^* + E \cdot \theta'''(z) \cdot I_\lambda(c)\} \cdot dc = 0$$

ovvero, essendo  $[\tau^{(2)} \cdot s]^*$  ed  $E \cdot \theta'''(z)$  costanti al variare di  $c$  ed avendo posto:

$$\oint \frac{dc}{s} = H \quad \text{e} \quad \frac{dc}{s} = dh(c)$$

si ha:

$$[\tau^{(2)} \cdot s]^* \cdot H + E \cdot \theta'''(z) \cdot \oint I_\lambda(c) \cdot dh(c) = 0$$

Integrando per parti il secondo addendo:

$$\oint I_\lambda(c) \cdot dh(c) = \left[ I_\lambda(c) \cdot h(c) \right]_{Q_1}^{Q_2} - \int_A h(c) \cdot dI_\lambda(c) = - \int_A h(c) \cdot dI_\lambda(c)$$

risulta l'espressione del *flusso* che ripristina la congruenza:

$$[\tau^{(2)} \cdot s]^* = E \cdot \theta'''(z) \cdot \int_A \frac{h(c)}{H} \cdot dI_\lambda(c)$$

e sostituendo tale valore nell'espressione della  $\tau^{(2)}(c)$ , si ha:

$$\tau^{(2)}(c) = \frac{E \cdot \theta'''(z)}{s(c)} \cdot \left[ I_\lambda(c) + \int_A \frac{h(c)}{H} \cdot dI_\lambda(c) \right]$$

ovvero, in forma sintetica:

$$\tau^{(2)}(c) = \frac{E \cdot \theta'''(z)}{s(c)} \cdot I^{(2)}(c)$$

ove la grandezza  $I^{(2)}$ , che ha dimensioni  $[L^4]$ , si definisce *momento statico secondario* ed assume il valore:

$$I^{(2)}(c) = I_\lambda(c) + \int_A \frac{h(c)}{H} \cdot dI_\lambda(c) = I_\lambda(c) + \int_A \frac{h(c)}{H} \cdot \lambda(c) \cdot dA$$

Nel caso di sezioni monoconnesse essendo  $[\tau^{(2)} \cdot s]^* = 0$  si ha:

$$I^{(2)}(c) = I_\lambda(c) = I_\omega(c)$$

Si può osservare che, risultando le  $\tau^{(2)}$  pressochè costanti lungo lo spessore della sezione (in analogia alle  $\tau^{(0)}$  da taglio e a differenza delle  $\tau^{(1)}$  da torsione primaria che variano con legge lineare) gli scorrimenti sulla superficie cilindrica media della trave dovuti alle  $\tau^{(2)}$  sono non nulli e ciò in palese contrasto con le ipotesi assunte nella determinazione delle distanze areali ovvero degli ingobbimenti. L'approssimazione adottata consiste nell'aver calcolato le tensioni secondarie partendo da ingobbimenti ottenuti alla De Saint Venant e dunque conseguenti alle sole  $\tau^{(1)}$ , senza tenere conto del contributo indotto dal flusso secondario delle  $\tau^{(2)}$  che può assumere, in molti casi, valori superiori a quello primario.

Ciò comporta che la teoria adottata per le travi in parete sottile possa presentare le medesime limitazioni che la teoria di De Saint Venant ha nei confronti delle travi a sezione compatta.

I risultati così ottenuti sono, comunque, accettabili essendo poco diversi da quelli esatti conseguibili a prezzo di notevoli difficoltà analitiche.

Va notato, in ogni caso, che perlomeno la funzione  $\theta(z)$  non è influenzata dagli scorrimenti conseguenti alle  $\tau^{(2)}$ .

La soluzione rigorosa di tale problema, nelle ipotesi di elasticità lineare e contorno indeformabile, è stata perseguita da Capurso [15] per la trave in parete sottile sollecitata da forze superficiali ed azioni distorcenti qualsiasi.

#### 4.4.4 - Il momento torcente secondario

Il momento risultante, rispetto al centro di taglio, delle  $\tau^{(2)}$  indotte dalla torsione non uniforme vale:

$$M^{(2)} = \oint \tau^{(2)} \cdot s \cdot dc \cdot r = \oint \tau^{(2)} \cdot s \cdot d\omega$$

e si definisce *momento torcente secondario*.

Essendo:

$$[\tau^{(2)} \cdot s] = E \cdot \theta'''(z) \cdot \left[ I_\lambda(c) + \int_A \frac{h(c)}{H} \cdot dI_\lambda(c) \right]$$

ove, integrando per parti:

$$\int_A \frac{h(c)}{H} \cdot dI_\lambda(c) = \left[ \frac{h(c)}{H} \cdot I_\lambda(c) \right]_{Q_1}^{Q_2} - \oint I_\lambda(c) \cdot \frac{dh(c)}{H} = - \oint I_\lambda(c) \cdot \frac{dh(c)}{H}$$

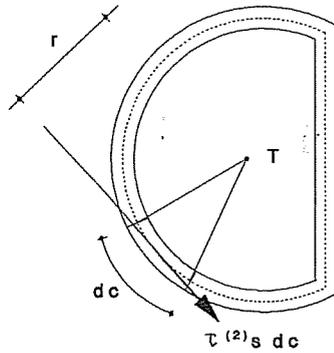


Fig. 4.36

per sostituzione si ha:

$$\begin{aligned}
 M^{(2)} &= \oint E \cdot \theta'''(z) \cdot \left[ I_{\lambda}(c) - \oint I_{\lambda}(c) \cdot \frac{dh(c)}{H} \right] \cdot d\omega = \\
 &= E \cdot \theta'''(z) \cdot \left\{ \oint I_{\lambda}(c) \cdot d\omega - \oint \left[ \oint I_{\lambda}(c) \cdot \frac{dh(c)}{H} \right] \cdot d\omega \right\}
 \end{aligned}$$

Essendo il fattore  $\oint I_{\lambda}(c) \cdot \frac{dh(c)}{H}$  costante con  $\omega$  ed essendo  $\oint d\omega = \Omega$  si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 M^{(2)} &= E \cdot \theta'''(z) \cdot \left[ \oint I_{\lambda}(c) \cdot d\omega - \oint I_{\lambda}(c) \cdot \frac{dh(c)}{H} \cdot \Omega \right] = \\
 &= E \cdot \theta'''(z) \cdot \oint I_{\lambda}(c) \cdot \left[ d\omega - \frac{dh(c)}{H} \cdot \Omega \right] = \\
 &= E \cdot \theta'''(z) \cdot \oint I_{\lambda}(c) \cdot d\lambda
 \end{aligned}$$

ed integrando per parti:

$$\oint I_{\lambda}(c) \cdot d\lambda = \left[ I_{\lambda}(c) \cdot \lambda(c) \right]_{Q_1}^{Q_2} - \int_A \lambda(c) \cdot dI_{\lambda}(c) = - \int_A \lambda^2(c) \cdot dA = -I_{\lambda\lambda}$$

da cui risulta:

$$M^{(2)} = -E \cdot \theta'''(z) \cdot I_{\lambda\lambda}$$

La quantità  $I_{\lambda\lambda}$ , che ha le dimensioni  $[L^6]$ , dipende dalla geometria della sezione e prende il nome di *momento d'inerzia secondario*.

Tali valori, unitamente a quelli del momento d'inerzia primario e ad alcuni valori notevoli di  $\lambda(c)$  e di  $I_\lambda(c)$ , si possono trovare tabellati per i profilati a caldo di uso più frequente. In Appendice vengono riportate, per comodità progettuale, alcune di tali tabelle.

L'espressione di  $M^{(2)}$ , ricavata per le sezioni biconnesse, è valida anche per quelle monoconnesse; essendo, infatti, per queste ultime:

$$[\tau^{(2)} \cdot s] = E \cdot \theta'''(z) \cdot I_\lambda(c) = E \cdot \theta'''(z) \cdot I_\omega(c)$$

si ha:

$$M^{(2)} = \int_C E \cdot \theta'''(z) \cdot I_\omega(c) \cdot d\omega = E \cdot \theta'''(z) \cdot \int_C I_\omega(c) \cdot d\omega$$

ed integrando per parti risulta:

$$M^{(2)} = -E \cdot \theta'''(z) \cdot I_{\omega\omega}$$

Definendo *rigidezza torsionale secondaria* la quantità:

$$k^{(2)} = E \cdot I_{\lambda\lambda}$$

si può scrivere altresì:

$$M^{(2)} = -k^{(2)} \cdot \theta'''(z)$$

La rigidezza  $k^{(2)}$ , dipendendo da  $I_{\lambda\lambda}$  risulta trascurabile o addirittura nulla quando l'ingobbimento della sezione, legato anch'esso a  $\lambda$ , risulta trascurabile o nullo. Ciò accade per sezioni compatte, o sezioni sottili aperte per le quali il raggio vettore descrive aree settoriali nulle, o ancora per sezioni sottili chiuse caratterizzate da particolari condizioni della geometria.

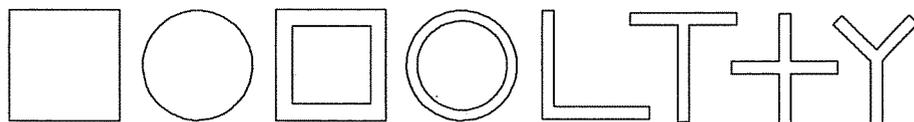


Fig. 4.37

Si può, però, osservare che talvolta lievi modifiche ad una sezione possono immediatamente conferire una rigidezza torsionale secondaria.

Ad esempio nel caso di un edificio realizzato con pilastri a *croce greca* è possibile intervenire su questi conferendo loro la capacità di reagire alle sollecitazioni torsionali attraverso uno stato tensionale secondario, fornendo le anime di ali, in modo da trasformare la sezione in una *croce potenziata*.

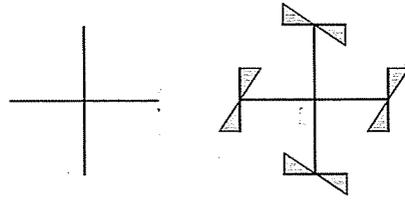


Fig. 4.38

Esprimendo  $\theta'''(z)$  in funzione di  $M^{(2)}$  si ottiene:

$$\theta'''(z) = -\frac{M^{(2)}}{E \cdot I_{\lambda\lambda}}$$

che sostituita nella:

$$\tau^{(2)}(c) = \frac{E \cdot \theta'''(z)}{s(c)} \cdot I^{(2)}(c)$$

fornisce una ulteriore espressione delle tensioni tangenziali dovute a torsione secondaria:

$$\tau^{(2)}(c) = -\frac{M^{(2)} \cdot I^{(2)}(c)}{I_{\lambda\lambda} \cdot s(c)}$$

e nel caso di sezioni monoconnesse:

$$\tau^{(2)}(c) = -\frac{M^{(2)} \cdot I_{\omega}(c)}{I_{\omega\omega} \cdot s(c)}$$

del tutto analoghe alla espressione delle  $\tau^{(0)}$  da taglio di Jourawsky.

Da quanto innanzi ricavato, può scaturire una diversa definizione di *sezioni in parete sottile*, che prescindono dallo spessore  $s$ : possono definirsi tali, infatti, le sezioni il cui momento d'inerzia secondario non sia trascurabile; di contro, si possono definire *compatte* le sezioni il cui momento d'inerzia secondario sia poco significativo.

#### Problema 4.9

Calcolare la tensione tangenziale secondaria nei punti notevoli della sezione in figura:

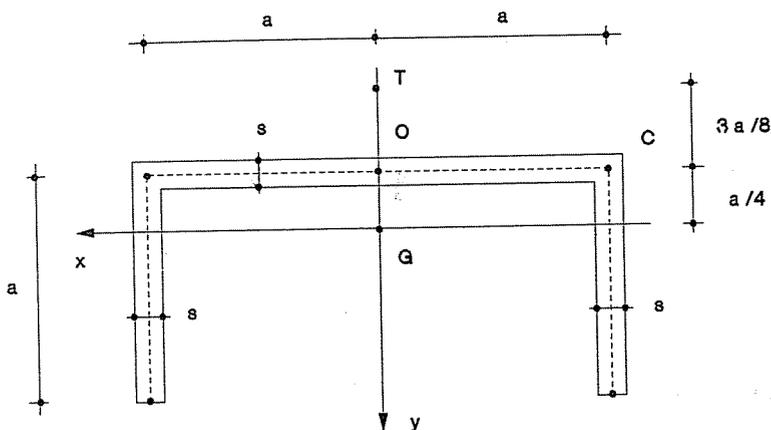


Fig. 4.39

Nota la posizione del baricentro  $G$  e del centro di taglio  $T$  (vd. **Problema 3.1**) si può tracciare il diagramma delle distanze areali di polo  $T$  che, nel caso in esame, coincidono con le aree settoriali:

$$\omega(C) = 3a^2/8$$

$$\omega(A) = -5a^2/8$$

$$\overline{CB} = 3a/8$$

$$\overline{BA} = 5a/8$$

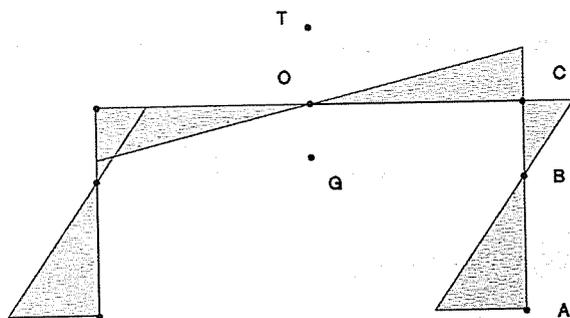


Fig. 4.40

Dall'andamento della funzione  $\omega(c)$  si evince subito come la tensione tangenziale secondaria abbia andamento parabolico, con valori estremi rispettivamente nei punti  $B$  ed  $O$ .

In particolare, adottando come origine delle ascisse curvilinee  $c$  il punto  $A$  ed assumendo positivo il verso levogiro, le funzioni aree settoriali presentano le espressioni:

$$\omega(c) = a \cdot c - 5a^2/8 \quad \text{nel tratto } AC$$

$$\omega(c) = -3a \cdot c/8 + 3a^2/4 \quad \text{nel tratto } CO$$

Le tensioni tangenziali secondarie, a meno del fattore  $M^{(2)}/s \cdot I_{\omega\omega}$  costante, sono fornite per i punti  $A, B, C, O$  dal valore che assume in essi il momento statico secondario uguale, nel caso in esame, al momento statico areale  $I_{\lambda}$ , ovvero al momento statico settoriale  $I_{\omega}$ :

$$I_{\omega}(A) = 0$$

$$I_{\omega}(B) = \int_0^{5a/8} \left[ a \cdot c - \frac{5}{8} \cdot a^2 \right] \cdot s \cdot dc = -\frac{25}{128} \cdot a^3 \cdot s$$

$$I_{\omega}(C) = \int_0^a \left[ a \cdot c - \frac{5}{8} \cdot a^2 \right] \cdot s \cdot dc = -\frac{1}{8} \cdot a^3 \cdot s$$

$$I_{\omega}(O) = -\frac{1}{8} \cdot a^3 \cdot s + \int_a^{2a} \left[ -\frac{3}{8} \cdot a \cdot c + \frac{3}{4} \cdot a^2 \right] \cdot s \cdot dc = \frac{1}{16} \cdot a^3 \cdot s$$

L'andamento della funzione  $\tau^{(2)}(c)$  è quello rappresentato in figura:

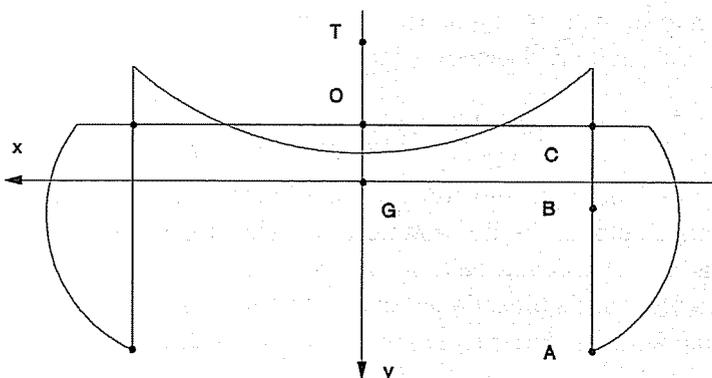


Fig. 4.41

**Problema 4.10**

Determinare la rigidezza torsionale secondaria di una sezione costituita da due nervature distanti  $2d$  ed aventi dimensioni  $s \times a$ .

Il problema si riduce al calcolo di  $I_{\lambda\lambda}$ .

Essendo la sezione monoconnessa, risulta  $\lambda = \omega$  ed il relativo diagramma è quello rappresentato in figura:

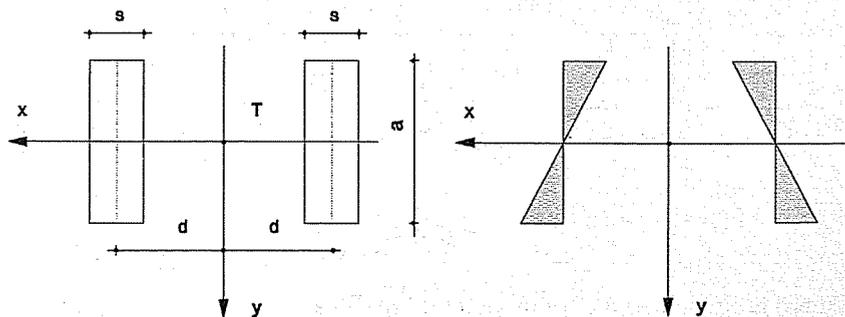


Fig. 4.42

Poichè la funzione  $\lambda(c)$ , per ogni nervatura, si può scrivere:

$$\lambda = d \cdot y \quad \text{con} \quad -a/2 \leq y \leq a/2$$

il momento d'inerzia secondario vale:

$$I_{\lambda\lambda} = 2 \cdot \int_A \lambda^2 \cdot dA = 2 \cdot d^2 \cdot \int_A y^2 \cdot dA = 2 \cdot d^2 \cdot I_{yy} = \frac{s \cdot d^2 \cdot a^3}{6}$$

il che implica:

$$k^{(2)} = 2 \cdot E \cdot I_{yy} \cdot d^2 = E \cdot \frac{s \cdot d^2 \cdot a^3}{6}$$

Per  $n$  nervature uguali, simmetriche rispetto al piano  $y-z$ , aventi momento d'inerzia  $I_{yy}$  e distanti  $d_i$  dal detto piano, sarà:

$$I_{\lambda\lambda} = \sum_i^n d_i^2 \cdot I_{yy}$$

Tale espressione, non solo consente una immediata valutazione della rigidità torsionale secondaria di un impalcato cosiddetto *a pettine*, trascurando, in una prima fase, la presenza della soletta, ma permette, altresì, di notare come tale rigidità secondaria dipenda dal quadrato della distanza tra le nervature e, dunque, come aumenti fortemente con la larghezza dell'impalcato.

#### Problema 4.11

Determinare la rigidità torsionale secondaria della sezione ad  $I$  rappresentata in figura.

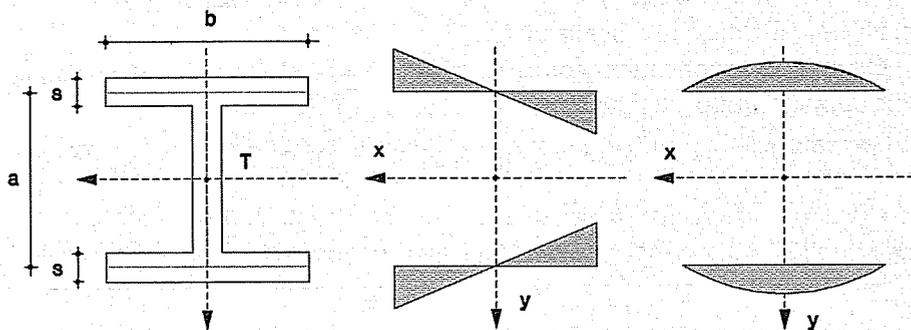


Fig. 4.43

Lungo la linea media di ogni ala la legge di variazione di  $\lambda(c)$  si può scrivere:

$$\lambda = a \cdot x/2 \quad \text{con} \quad -b/2 \leq x \leq b/2$$

per cui:

$$I_{\lambda\lambda} = \int_A \lambda^2 \cdot dA = 2 \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \left( \frac{a \cdot x}{2} \right)^2 \cdot s \cdot dx = \frac{s \cdot a^2 \cdot b^3}{24}$$

il che implica:

$$k^{(2)} = E \cdot \frac{s \cdot a^2 \cdot b^3}{24}$$

Osservando il diagramma di  $\lambda(c)$ , si può ricordare che esso risulta affine sia a quello degli ingobbimenti che a quello delle tensioni normali  $\sigma^{(2)}$ .

Ricordando che, per le sezioni monoconnesse:

$$\tau^{(2)}(c) = \frac{E \cdot \theta'''(z)}{s(c)} \cdot I_{\lambda}(c)$$

ed essendo nel caso in esame:

$$I_{\lambda}(c) = \int \lambda \cdot dA = \pm \int \frac{a}{2} \cdot x \cdot s \cdot dx = \pm \frac{a \cdot s}{4} \cdot x^2 + D$$

risulta che la  $\tau^{(2)}(c)$  varia parabolicamente con  $x$ .

Ad esempio, per l'ala superiore, con il riferimento locale  $\xi$  avente origine nel punto di nodo risulta:

$$I_{\lambda}(\xi) = -\frac{a \cdot s}{4} \cdot \left[ x^2 \right]_{-b/2}^{\xi} = -\frac{a \cdot s}{16} \cdot [4 \cdot \xi^2 - b^2]$$

da cui:

$$\tau^{(2)}(\xi) = -\frac{E \cdot \theta'''}{16} \cdot a \cdot [4 \cdot \xi^2 - b^2]$$

e dunque:

$$\tau_{max}^{(2)} = \frac{E \cdot \theta'''}{16} \cdot a \cdot b^2$$

Si osservi come l'esempio trattato dimostri ancora una volta la non applicabilità della *teoria tecnica delle travi* alle sezioni sottili: per effetto della torsione secondaria, infatti, le due ali risultano sollecitate da coppie flettenti uguali ed opposte mentre per De Saint Venant lo stato di sollecitazione, oltre la distanza di estinzione, dovrebbe essere nullo.

Se nella determinazione dello stato tensionale secondario si opera in maniera rigorosa, tenendo cioè conto anche della deformazione secondaria [15], si ottengono distribuzioni, rispettivamente di  $\sigma^{(2)}$  e  $\tau^{(2)}$ , del tipo di quelle riportate in figura, che sono state, peraltro, verificate anche sperimentalmente [27].

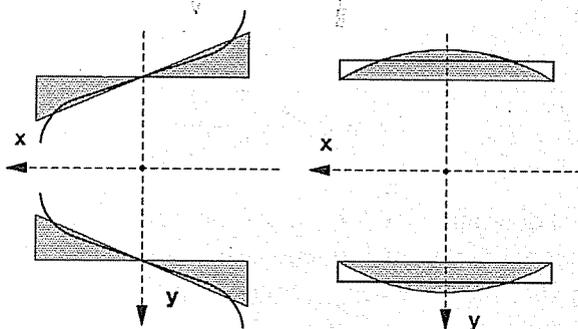


Fig. 4.44

Si può allora osservare che la differenza fra i risultati desumibili tramite la *teoria della torsione non uniforme* ed una *teoria rigorosa*, per quanto riguarda le tensioni normali  $\sigma^{(2)}$  è poco significativa (tranne che in corrispondenza dei bordi ove si riscontra una tendenza verso valori infinitamente grandi) mentre per quanto attiene la distribuzione delle tensioni tangenziali  $\tau^{(2)}$  tale differenza diviene notevole, in quanto alla legge parabolica si sostituisce un andamento uniforme.

**Problema 4.12**

Determinare, per le sezioni in figura, il momento d'inerzia secondario.

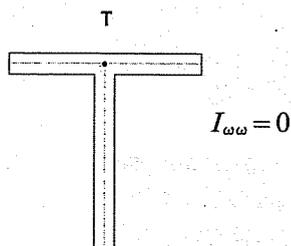


Fig. 4.45

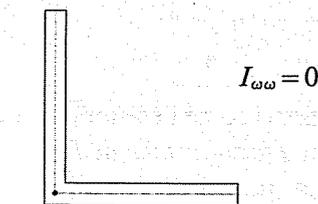
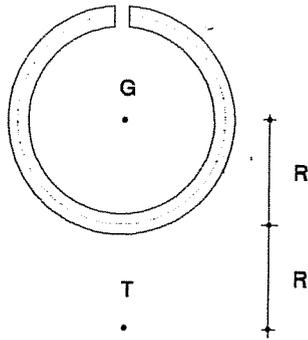
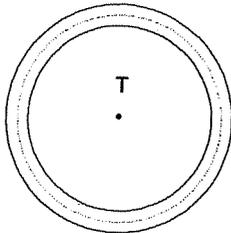


Fig. 4.46



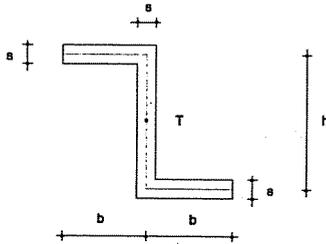
$$I_{\omega\omega} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot s \cdot R^5 \cdot (\pi^2 - 6)$$

Fig. 4.47



$$I_{\omega\omega} = 0$$

Fig. 4.48



$$I_{\omega\omega} = \frac{s \cdot h^2 \cdot b^3}{12} \cdot \frac{2 \cdot h + b}{h + 2 \cdot b}$$

Fig. 4.49

4.4.5 - *Le tensioni tangenziali secondarie nelle sezioni pluriconnesse*

Nel caso di sezioni pluriconnesse, costituite da  $m$  maglie,  $r$  rami ed  $n$  nodi, per determinare le  $\tau^{(2)}$ , si operano  $m$  sconnesse tali da rendere la sezione monoconnessa. Indicando con  $[\tau^{(2)} \cdot s]_i^*$ , il valore costante del flusso che, in corrispondenza della generica sconnessa all'ascissa  $c_i^*$ , ripristina la congruenza, è possibile porre questo nella forma<sup>12</sup>:

$$[\tau^{(2)} \cdot s]_i^* = E \cdot \theta'''(z) \cdot \alpha_i$$

ove:

$$\alpha_i = \frac{[\tau^{(2)} \cdot s]_i^*}{E \cdot \theta'''(z)}$$

Con tale assunto, ricordando l'espressione generale valida per le sezioni biconnesse:

$$[\tau^{(2)} \cdot s] = [\tau^{(2)} \cdot s]^* + E \cdot \theta'''(z) \cdot I_\lambda(c)$$

l'incognito flusso vero nel generico ramo  $i$ , assume l'espressione:

$$[\tau^{(2)} \cdot s]_i = E \cdot \theta'''(z) \cdot \{ [I_\lambda(c)]_i + \alpha_i \}$$

ove:

$$[I_\lambda(c)]_i = \int_{A_i} \lambda \cdot dA_i$$

con  $A_i$  area del ramo in esame.

Per la determinazione delle  $r$  incognite  $\alpha_i$ , che consentono di definire lo stato tensionale tangenziale secondario da torsione, occorre imporre che le  $\tau_i^{(2)}$  soddisfino la congruenza delle maglie e l'equilibrio dei nodi.

Per la congruenza, applicando ad ognuna delle  $m$  maglie il *teorema di Stokes*, si possono scrivere  $m$  equazioni che, per essere nullo il rotore di  $\tau^{(2)}$ , saranno del tipo:

$$\oint_j \tau^{(2)} \cdot dc = 0 \quad \forall j \in \{1, m\}$$

Sostituendo in essa l'espressione di  $\tau_i^{(2)}$  innanzi trovata, si può scrivere:

<sup>12</sup> Nel caso di sezione biconnessa in corrispondenza dell'unica sconnessa operabile risulta:  $\alpha_1 = \int_A \frac{h}{H} \cdot dI_\lambda$ .

$$\oint_j \tau_i^{(2)} \cdot dc = \oint_j \{ [I_\lambda(c)]_i + \alpha_i \} \cdot \frac{dc}{s_i} = \oint_j [I_\lambda(c)]_i \cdot \frac{dc}{s_i} + \oint_j \alpha_i \cdot \frac{dc}{s_i} = 0$$

e potendosi esprimere la circuitazione di  $\alpha_i$  lungo la generica maglia  $j$  come sommatoria dei flussi costanti relativi agli  $l$  tratti che la costituiscono, si può porre:

$$\oint_j \alpha_i \cdot \frac{dc}{s_i} = \sum_1^l \alpha_i \cdot \int_{C_i} \frac{dc}{s_i} = \sum_1^l \alpha_i \cdot h_i$$

che sostituita nella precedente fornisce la generica delle  $m$  equazioni di congruenza:

$$\sum_1^l \alpha_i \cdot h_i = - \oint_j \left[ \frac{I_\lambda(c)}{s} \right]_i \cdot dc \quad \forall j \in \{1, m\}$$

Inoltre, per l'equilibrio di ogni nodo nel quale convergono  $k$  tratti, è possibile scrivere  $r - m = n - 1$  equazioni di equilibrio del tipo:

$$\sum_1^k [\tau^{(2)} \cdot s]_i = \sum_1^k \{ [I_\lambda(c)]_i + \alpha_i \} = 0$$

Considerando che ogni nodo rappresenta una sezione monoconnessa, sottoposta alle tensioni  $\tau_i^{(2)}$  relative ad ognuno dei rami che in esso convergono, che, per l'equilibrio, la somma di tali tensioni deve risultare nulla e ricordando che nelle sezioni monoconnesse le  $[I_\lambda(c)]_i$  sono proporzionali alle  $\tau_i^{(2)}$ , dovrà risultare, per l'equilibrio del generico nodo, anche:

$$\sum_1^k [I_\lambda(c)]_i = 0$$

e dunque:

$$\sum_1^k \alpha_i = 0$$

La risoluzione dell'intero sistema di  $r = m + n - 1$  equazioni fornisce gli  $r$  valori incogniti di  $\alpha_i$ , noti i quali è possibile risalire, per le posizioni iniziali, alle  $\tau_i^{(2)}$  in ogni ramo della sezione.

#### 4.4.6 - La caratteristica bimomento

Per effetto della presenza delle tensioni normali secondarie si può introdurre una particolare caratteristica della sollecitazione interna che prende nome di

*bimomento* ed è definita dall'espressione:

$$B(z) = \int_A \sigma^{(2)} \cdot \lambda(c) \cdot dA$$

Questa, esplicitando il valore di  $\sigma^{(2)} = -E \cdot \theta''(z) \cdot \lambda(c)$ , si può scrivere anche nella forma:

$$B(z) = -E \cdot \theta''(z) \cdot \int_A \lambda^2(c) \cdot dA = -E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta''(z) = -k^{(2)} \cdot \theta''(z)$$

Tale caratteristica, che ha dimensioni  $[FL^2]$ , contrariamente alle altre è equivalente a zero dovendo presentare risultante e momento risultante nulli.

Moltiplicando per  $\lambda$  il primo ed il terzo termine delle precedenti eguaglianze e ricordando l'espressione di  $\sigma^{(2)}$ , si ottiene la relazione che lega la caratteristica bimomento alle tensioni normali secondarie:

$$\sigma^{(2)} = \sigma^{(2)}(z, c) = \frac{B(z) \cdot \lambda(c)}{I_{\lambda\lambda}}$$

La caratteristica bimomento è, dunque, diretta conseguenza delle  $\sigma^{(2)}$ , così come le altre caratteristiche di sollecitazione interna, già note, lo sono delle corrispondenti componenti di tensione.

Come si può subito osservare, la precedente espressione è in tutto e per tutto analoga alla *formula di Navier* per la sollecitazione di flessione semplice: in effetti, mentre il momento flettente si può pensare definito da due forze parallele uguali ed opposte, il bimomento può pensarsi definito da due coppie uguali ed opposte agenti in piani fra loro paralleli. In tale caso, il suo vettore rappresentativo possiede intensità pari al prodotto delle coppie per la distanza fra i piani nei quali esse giacciono e direzione parallela ai detti piani; il segno si assume positivo se un osservatore disteso lungo il vettore vede le due coppie ruotare sempre in verso levogiro.

Se, ad esempio, prendiamo in esame un profilo monoconnesso ad  $I$ , per effetto di una sollecitazione da torsione non uniforme, si genera nelle ali lo stato tensionale da tensioni normali secondarie già determinato in precedenza e rappresentato in figura.

Essendo la legge di distribuzione delle  $\sigma^{(2)}$  definita, nel caso particolare, dalla funzione:

$$\sigma^{(2)} = E \cdot \theta''(z) \cdot \omega(c) = -E \cdot \theta''(z) \cdot \left( \frac{a \cdot x}{2} \right)$$

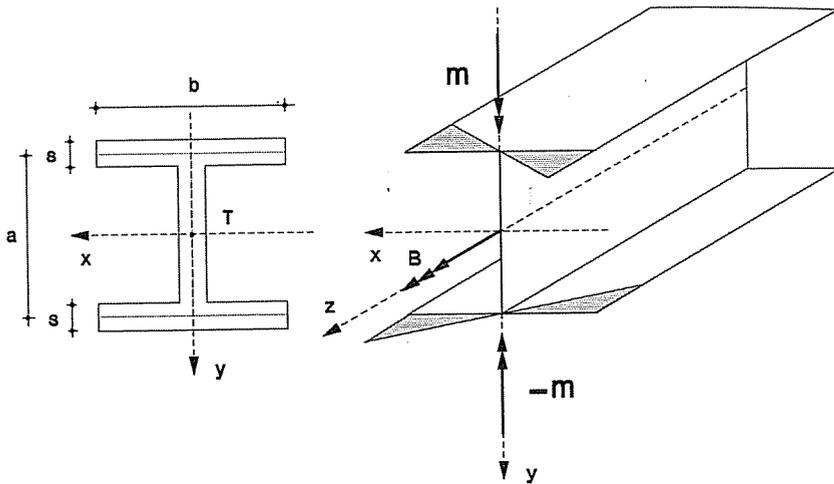


Fig. 4.50

è possibile calcolare il *bimomento* nella sezione in esame, che vale:

$$B = \int_A \sigma^{(2)} \cdot \omega(c) \cdot dA = -s \cdot E \cdot \theta''(z) \cdot 2 \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \left( \frac{a \cdot x}{2} \right)^2 \cdot dx = -E \cdot \theta''(z) \cdot \frac{s \cdot a^2 \cdot b^3}{24}$$

Se a questo punto si calcolano le coppie risultanti delle tensioni  $\sigma^{(2)}$  sulle due ali, di verso opposto ma di intensità uguale, pari a:

$$\mathfrak{M} = \frac{s \cdot a \cdot b^2}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot b$$

si può immediatamente verificare che il bimomento precedentemente calcolato, altro non è se non il momento generato dalle dette coppie  $\mathfrak{M}$ , agenti nei due piani paralleli passanti per le linee medie delle ali, moltiplicato per la loro distanza  $a$ . Tale risultato consente, altresì, di comprendere la genesi dell'appellativo *bimomento*, che, nel caso in esame, si configura proprio come il *momento di un momento*.

Per convenzione, il vettore bimomento viene rappresentato con una coppia curvilinea, dotata di due frecce, ovvero con una forza dotata di tre frecce.

A differenza delle altre caratteristiche della sollecitazione interna, il bimomento, che, come si è detto, rappresenta una *forza generalizzata equilibrata*, ovvero sia una *forza staticamente equivalente a zero*, non è sempre calcolabile tramite le azioni esterne applicate alla struttura ma è comunque determinabile tramite l'*equazione fondamentale della torsione* della quale si tratterà nel capitolo successivo.

Confrontando l'espressione del bimomento:

$$B(z) = -k^{(2)} \cdot \theta''(z)$$

con quella del momento torcente secondario:

$$M^{(2)}(z) = -k^{(2)} \cdot \theta'''(z)$$

si ottiene la relazione:

$$M^{(2)}(z) = \frac{dB(z)}{dz}$$

dalla quale si evince che il momento torcente secondario si può ottenere, in ogni sezione della trave, come derivata del bimomento rispetto all'ascissa della sezione o, viceversa, si può ricavare la funzione bimomento come integrale della funzione  $M^{(2)}(z)$ ; tale relazione, come si vede, è perfettamente analoga a quella che lega la caratteristica tagliante a quella flettente nella sollecitazione di flessione retta.

È comunque importante ricordare che, tanto la caratteristica bimomento quanto il momento torcente secondario, e dunque l'intero stato tensionale secondario costituito da  $\sigma^{(2)}$  e  $\tau^{(2)}$ , non sono necessariamente legati all'esistenza di sollecitazioni esterne di tipo torsionale ma possono essere generate, in maniera imprevedibile, dalle più svariate condizioni di carico. Alcune di esse, costituite da sollecitazioni esterne parallele all'asse longitudinale della trave, ed i bimomenti che ne conseguono, sono definiti, per le sezioni monoconnesse, da Vlassov [11].

Se, ad esempio, si sollecita una trave con sezione a doppio  $T$  mediante una forza concentrata  $F$ , applicata all'estremo di un'ala, per il *principio di sovrapposizione degli effetti*, è lecito scomporre tale sollecitazione nelle quattro condizioni rappresentate in figura, con carichi concentrati di intensità pari ad  $F/4$ , che danno luogo, rispettivamente, a tensioni normali da sforzo normale, da flessione retta nei due piani  $x-z$  ed  $y-z$ , e da bimomento.

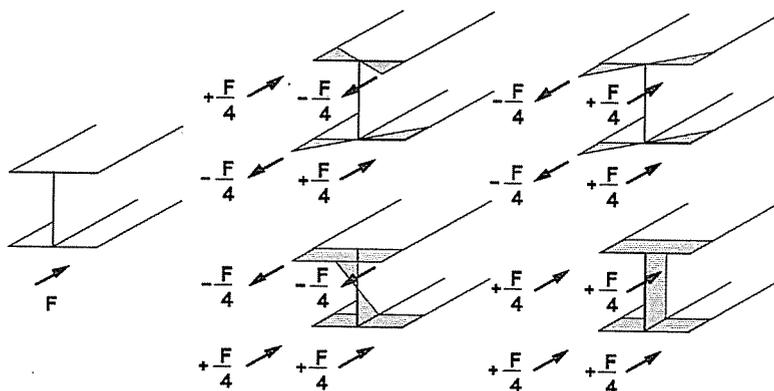


Fig. 4.51

Tale semplice esempio dimostra come uno stato tensionale secondario sia possibile, in una trave in parete sottile, anche in assenza di sollecitazioni da torsione, per il solo effetto di uno sforzo assiale eccentrico.

Il bimomento generato da una simile condizione di carico, può essere valutato utilizzando i *teoremi di Vlassov*.

Se il carico  $F$  è applicato alla linea media della sezione, il valore del bimo-

mento è dato dal prodotto dell'intensità della forza per l'area settoriale  $\omega(P)$  del punto al quale è applicata la forza:

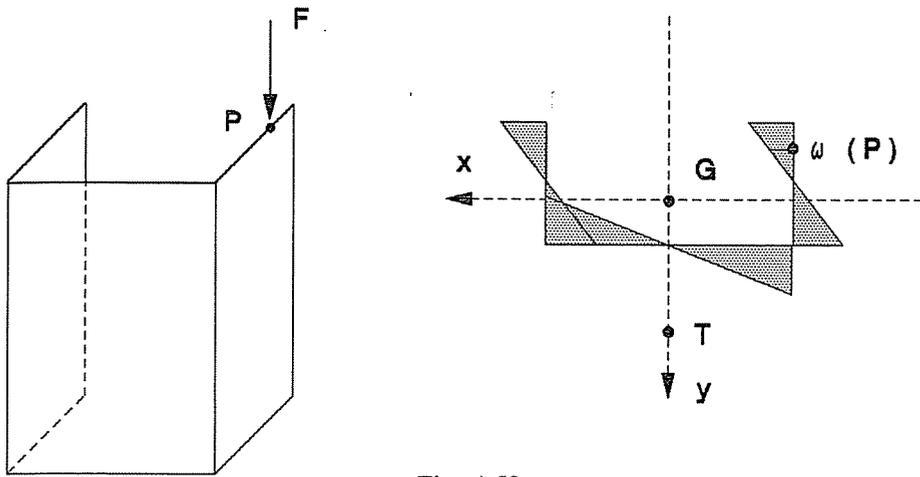


Fig. 4.52

Qualora il carico  $F$  sia, invece, applicato indirettamente alla sezione, la distanza areale principale del punto di applicazione sarà valutata considerando il detto punto rigidamente collegato alla sezione stessa.

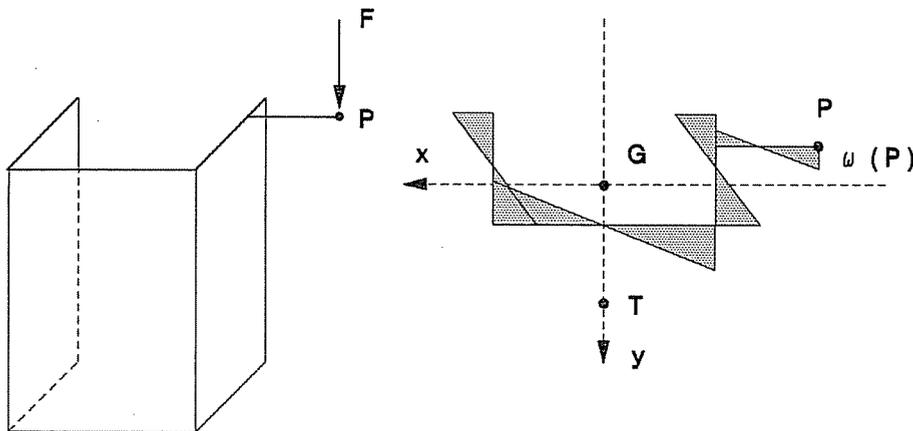


Fig. 4.53

Quanto sin'ora detto conferma, ancora una volta, come la *teoria di De Saint Venant*, applicata impropriamente alle travi in parete sottile, possa dare luogo a valutazioni completamente errate dello stato tensionale.

La condizione di carico illustrata nella figura seguente, ad esempio, che per la detta teoria dovrebbe dare luogo a stati tensionali nulli oltre la distanza di estinzione, produce, invece, un bimomento fornito dall'applicazione del precedente teorema.

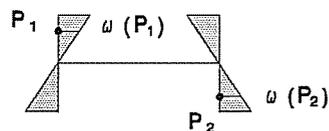
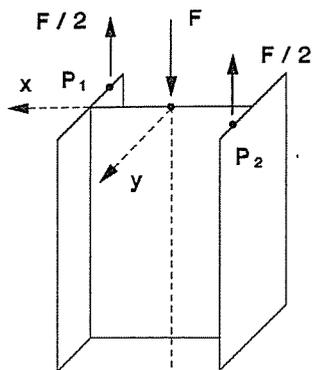


Fig. 4.54

Ancora, nel successivo esempio, la sezione a Z sollecitata nel baricentro da due forze uguali e contrarie dovrebbe, secondo De Saint Venant, presentare tensioni normali uniformi lungo tutta la sezione mentre, per Vlassov, essa è sollecitata da un bimomento e dunque da tensioni normali secondarie non costanti.

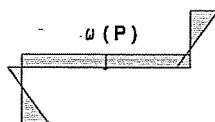
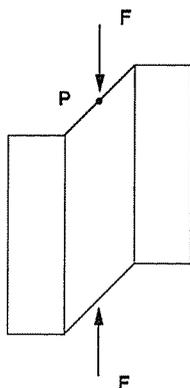


Fig. 4.55

#### 4.5 - L'equazione fondamentale della torsione

Si consideri la generica trave di sezione qualunque e lunghezza  $L$ , sottoposta ad un carico torcente ripartito per unità di lunghezza, comunque variabile  $m_z(z)$  e si contrassegni con  $M_z$  la caratteristica torsionale della sollecitazione interna.

Isolato un concio elementare della superficie cilindrica media, di lunghezza  $dz$ , ottenuto sezionando la trave mediante due piani ortogonali all'asse  $z$ , passanti per le ascisse  $z$  e  $z + dz$ , per l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse  $z$  del detto concio, con le convenzioni positive assunte, risulta:

$$-M_z + (M_z + dM_z) + m_z(z) \cdot dz = 0$$

da cui:

$$dM_z/dz = -m_z(z)$$

ovvero:

$$M_z = - \int m_z(z) \cdot dz + C$$

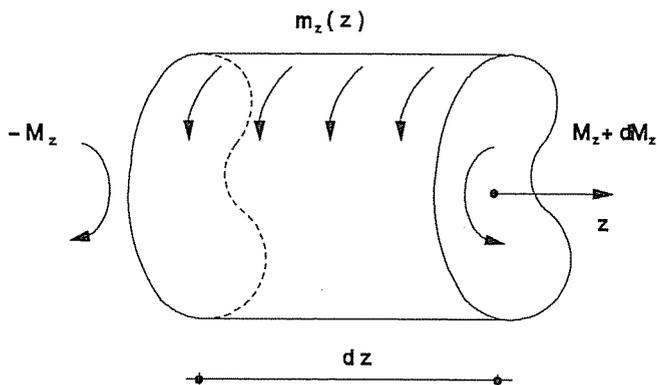


Fig. 4.56

Si è visto in precedenza che le tensioni tangenziali che possono nascere in una sezione sollecitata a torsione sono solamente  $\tau^{(1)}$  o  $\tau^{(2)}$  e che i momenti risultanti di tali tensioni sono rispettivamente:

- il *momento torcente primario*:  $M^{(1)} = G \cdot I^* \cdot \theta'(z) = k^{(1)} \cdot \theta'(z)$
- il *momento torcente secondario*:  $M^{(2)} = -E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta'''(z) = -k^{(2)} \cdot \theta'''(z)$

Dovendo sempre essere, sezione per sezione, la caratteristica torcente interna somma dell'aliquota primaria e di quella secondaria, si potrà scrivere l'equazione di equilibrio:

$$M^{(1)} + M^{(2)} = M_z$$

ovvero:

$$k^{(1)} \cdot \theta'(z) - k^{(2)} \cdot \theta'''(z) = M_z(z)$$

Derivando rispetto a  $z$  si ottiene, nell'ipotesi di rigidzze costanti, l'equazione fondamentale della torsione:

$$k^{(2)} \cdot \theta''''(z) - k^{(1)} \cdot \theta''(z) = m_z(z)$$

esprimibile altresì nella forma:

$$E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta''''(z) - G \cdot I^* \cdot \theta''(z) = m_z(z)$$

valida per le travi aventi caratteristiche elasto-geometriche costanti.

Entrambe le equazioni differenziali sono lineari del quarto ordine a coefficienti costanti, non omogenee.

Per quanto riguarda i coefficienti della equazione differenziale, le espressioni della:

- *rigidezza torsionale primaria:*

$$k^{(1)} = \frac{G}{3} \cdot \int_C s^3(c) \cdot dc \quad \text{per sezioni monoconnesse}$$

$$k^{(1)} = G \cdot \frac{\Omega^2}{H} \quad \text{per sezioni biconnesse}$$

- *rigidezza torsionale secondaria:*

$$k^{(2)} = E \cdot \int_A \lambda^2 \cdot dA \quad \text{con:} \quad \begin{array}{l} \lambda = \omega \quad \text{per sezioni monoconnesse} \\ \lambda = \omega - \frac{\Omega}{H} \cdot h \quad \text{per sezioni biconnesse} \end{array}$$

consentono le considerazioni seguenti che, per essere più significative, vengono operate confrontando due travi con la stessa luce e con la stessa sezione, ma una biconnessa e l'altra ottenuta da questa operando una sconnessione.

- Confrontando  $k^{(1)}$  si evince come la rigidezza primaria sia molto maggiore per le sezioni biconnesse, per le quali dipende dal quadrato dell'area racchiusa dalla linea media, che non per le sezioni *aperte* nelle quali dipende dal cubo delle spessore, comunque molto ridotto.
- Confrontando  $k^{(2)}$  si vede che la rigidezza secondaria è maggiore per le sezioni aperte rispetto alle chiuse, essendo per queste ultime  $\lambda(c)$  più piccolo.
- Per le sezioni monoconnesse la rigidezza torsionale secondaria, essendo condizionata dalle dimensioni massime della sezione, risulta prevalente nel caso di strutture in parete sottile, per le quali aumenta con la diffusione dell'area; dunque, passando da sezioni compatte a sezioni diffuse aperte, diminuisce  $k^{(1)}$  ed aumenta  $k^{(2)}$ .
- Per le sezioni biconnesse si ha che seppure  $k^{(1)}$ , dipendendo dal quadrato delle dimensioni della sezione, prevale su  $k^{(2)}$ , il repentino smorzamento delle  $w$ ,  $\epsilon^{(2)}$  e  $\sigma^{(2)}$  può dare luogo a valori notevoli delle  $\tau^{(2)}$  che, peraltro, rendono meno accettabile l'approssimazione compiuta con il trascurare la deformazione secondaria. Tale fenomeno risulta, però, limitato alle sezioni vincolate ed a quelle caricate e può quindi, per certi versi, essere riguardato come un fenomeno *locale*.
- Qualunque sia la sezione, risulta sempre:  $G < E$ .

In definitiva per le sezioni in parete sottile:

- nei profili monoconnessi prevale, in genere, la torsione secondaria;
- nei profili biconnessi prevale, in genere, la torsione primaria, anche se lo stato tensionale secondario non è trascurabile in corrispondenza dei vincoli e delle sezioni caricate.

Riguardo l'equazione fondamentale si può notare che la prevalenza dell'aliquota primaria o di quella secondaria è legata all'entità delle rigidezze  $k^{(1)}$  e  $k^{(2)}$  e, come si vedrà in seguito, anche alla *luce*  $L$  della trave.

I casi limite che possono verificarsi sono:

- a) - Torsione tutta secondaria (ad es. sezioni monoconnesse, aventi notevole diffusione e spessori sottili, per le quali sia lecito assumere  $k^{(1)} = 0$ ) nel qual caso l'equazione fondamentale si scrive:

$$E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta'''(z) = m_z(z)$$

ed è perfettamente analoga all'equazione che regge il problema della sollecitazione di flessione semplice:

$$E \cdot I_{yy} \cdot v'''(z) = p_y(z)$$

- b) - Torsione interamente primaria (ad es. sezioni che non si ingobbano o biconnesse o sezioni compatte, per le quali sia lecito assumere  $k^{(2)} = 0$ ) nel qual caso l'equazione fondamentale assume la forma:

$$-G \cdot I^* \cdot \theta''(z) = m_z(z)$$

Integrando tale espressione si ha, nel caso di carico costante:

$$-k^{(1)} \cdot \theta'(z) - m_z \cdot z + c = 0$$

e quindi:

$$-k^{(1)} \cdot \theta(z) - \frac{m_z \cdot z^2}{2} + c \cdot z + d = 0$$

da cui:

$$\theta(z) = \frac{1}{k^{(1)}} \cdot \left[ -\frac{m_z \cdot z^2}{2} + c \cdot z + d \right]$$

Nel caso particolare di trave con vincoli di estremità che impediscano le rotazioni torsionali, le condizioni ai limiti, porgono:

$$\theta(0) = 0 \quad \text{da cui:} \quad d = 0$$

$$\theta(L) = 0 \quad \text{da cui:} \quad c = \frac{m_z \cdot L}{2}$$

Risulta pertanto:

$$\theta(z) = \frac{m_z}{2 \cdot k^{(1)}} \cdot \left[ -z^2 + L \cdot z \right]$$

ovvero:

$$\theta'(z) = \frac{m_z}{k^{(1)}} \cdot \left[ -z + \frac{L}{2} \right]$$

ed essendo:

$$M^{(1)}(z) = k^{(1)} \cdot \theta'(z)$$

per sostituzione si ha:

$$M^{(1)}(z) = M_z = m_z \cdot \left[ \frac{L}{2} - z \right]$$

Le espressioni di  $\theta(z)$  ed  $M^{(1)}(z)$  mostrano come l'angolo di torsione ed il momento torcente varino, in tale caso, rispettivamente come il momento flettente ed il taglio di una trave semplicemente appoggiata caricata uniformemente.

#### 4.5.1 - La risoluzione dell'equazione fondamentale

Dividendo ambo i membri dell'equazione fondamentale per  $E \cdot I_{\lambda\lambda}$  e ponendo:

$$\alpha = \sqrt{\frac{G \cdot I^*}{E \cdot I_{\lambda\lambda}}} = \sqrt{\frac{k^{(1)}}{k^{(2)}}}$$

il cui inverso  $1/\alpha$  si definisce *lunghezza caratteristica*, si può scrivere:

$$\theta''''(z) - \alpha^2 \cdot \theta''(z) = \frac{m_z(z)}{E \cdot I_{\lambda\lambda}} = \frac{m_z(z)}{k^{(2)}}$$

L'integrale generale di tale equazione è del tipo:

$$\theta(z) = a \cdot \text{sh } \alpha z + b \cdot \text{ch } \alpha z + c \cdot z + d + \bar{\theta}(z)$$

avendo indicando con  $\bar{\theta}(z)$  l'integrale particolare che dipende dalla condizione di carico e con  $a, b, c, d$  le costanti di integrazione.

Le funzioni caratteristiche del problema assumono le espressioni:

$$\theta'(z) = \alpha \cdot a \cdot \text{ch } \alpha z + \alpha \cdot b \cdot \text{sh } \alpha z + c + \bar{\theta}'(z)$$

da cui:

$$M^{(1)} = k^{(1)} \cdot [\alpha \cdot a \cdot \text{ch } \alpha z + \alpha \cdot b \cdot \text{sh } \alpha z + c + \bar{\theta}'(z)]$$

ovvero:

$$\theta''(z) = \alpha^2 \cdot \left[ a \cdot \operatorname{sh} \alpha z + b \cdot \operatorname{ch} \alpha z + \frac{\bar{\theta}''(z)}{\alpha^2} \right]$$

da cui:

$$B(z) = -k^{(1)} \cdot \left[ a \cdot \operatorname{sh} \alpha z + b \cdot \operatorname{ch} \alpha z + \frac{\bar{\theta}''(z)}{\alpha^2} \right]$$

ovvero:

$$\theta'''(z) = \alpha^3 \cdot \left[ a \cdot \operatorname{ch} \alpha z + b \cdot \operatorname{sh} \alpha z + \frac{\bar{\theta}'''(z)}{\alpha^3} \right]$$

da cui:

$$M^{(2)}(z) = -k^{(1)} \cdot \alpha \cdot \left[ a \cdot \operatorname{ch} \alpha z + b \cdot \operatorname{sh} \alpha z + \frac{\bar{\theta}'''(z)}{\alpha^3} \right]$$

ed infine:

$$M_z = M^{(1)} + M^{(2)} = k^{(1)} \cdot \left[ c + \bar{\theta}'(z) - \frac{\bar{\theta}'''(z)}{\alpha^2} \right]$$

Per la definizione delle costanti di integrazione valgono le seguenti condizioni ai limiti:

- $\theta(z) = 0$  nel caso di sezione la cui rotazione torsionale sia impedita o, comunque, nulla;
- $\theta'(z) = 0$  nel caso di sezione il cui ingobbamento sia impedito per la presenza di vincoli o per condizioni di simmetria, ovvero qualora risulti nullo  $M^{(1)}$ ;
- $\theta''(z) = 0$  nel caso in cui le tensioni normali sulla sezione siano nulle, o la sezione sia libera di ingobbarsi, ovvero qualora risulti nullo  $B$ ;
- $\theta'''(z) = 0$  nelle sezioni in cui risulti nullo  $M^{(2)}$ .

Nel caso di struttura costituita da più tronchi, ulteriori condizioni ai limiti possono riguardare le sezioni a sinistra e a destra di un vincolo come:

- $\theta_s = \theta_d$  che esprime l'eguaglianza delle rotazioni;
- $\theta'_s = \theta'_d$  che esprime l'eguaglianza degli ingobbamenti;
- $\theta''_s = \theta''_d$  che esprime l'eguaglianza delle tensioni normali.

In definitiva potendo i vincoli torsionali essere classificati come:

- *appoggi torsionali* con diaframmi a comportamento membranale che impediscono le rotazioni ma consentono gli ingobbamenti e si indicheranno con il simbolo  $\hat{\Delta}$ ;
- *incastri torsionali* con diaframmi rigidi che impediscono sia le rotazioni che gli ingobbamenti e si indicheranno con il simbolo  $\bar{\Delta}$ ;

le condizioni ai limiti si scrivono:

- nel caso di sezione libera non caricata:

$$\theta''(z) = 0$$

$$M_z = -E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta'''(z) + G \cdot I^* \cdot \theta'(z) = 0$$

- nel caso di sezione vincolata da appoggio torsionale:

$$\theta(z) = 0$$

$$\theta''(z) = 0$$

- nel caso di sezione con incastro torsionale:

$$\theta(z) = 0$$

$$\theta'(z) = 0$$

#### 4.5.2 - Il caso della trave appoggiata torsionalmente e sollecitata da un carico torcente uniforme

L'equazione risoltrice:

$$\theta''''(z) - \alpha^2 \cdot \theta''(z) = \frac{m_z}{k^{(2)}}$$

presenta il secondo membro costante ed ammette l'integrale particolare:

$$\bar{\theta}(z) = -\frac{m_z}{k^{(1)}} \cdot \frac{z^2}{2}$$

per cui l'integrale generale assume l'espressione:

$$\theta(z) = a \cdot \operatorname{sh} \alpha z + b \cdot \operatorname{ch} \alpha z + c \cdot z + d - \frac{m_z}{k^{(2)}} \cdot \frac{z^2}{2 \cdot \alpha^2}$$

Imponendo le condizioni ai limiti:

$$\theta(0) = 0 \quad \text{da cui: } b + d = 0$$

$$\theta''(0) = 0 \quad \text{da cui: } b \cdot \alpha^2 - \frac{m_z}{k^{(1)}} = 0$$

$$\theta(L) = 0 \quad \text{da cui: } a \cdot \operatorname{sh} \alpha L + b \cdot \operatorname{ch} \alpha L + c \cdot L + d - \frac{m_z}{k^{(1)}} \cdot \frac{L^2}{2} = 0$$

$$\theta''(L) = 0 \quad \text{da cui: } a \cdot \alpha^2 \cdot \operatorname{sh} \alpha L + b \cdot \alpha^2 \cdot \operatorname{ch} \alpha L - \frac{m_z}{k^{(1)}} = 0$$

si ricavano i valori delle costanti di integrazione:

$$a = \frac{m_z}{\alpha^2 \cdot k^{(1)}} \cdot \frac{1 - \operatorname{ch} \alpha L}{\operatorname{sh} \alpha L} = -\frac{m_z}{\alpha^2 \cdot k^{(1)}} \cdot \operatorname{th} \frac{\alpha L}{2}$$

$$b = -d = \frac{m_z}{\alpha^2 \cdot k^{(1)}}$$

$$c = \frac{m_z}{k^{(1)}} \cdot \frac{L}{2}$$

La soluzione si scrive dunque:

$$\theta(z) = \frac{m_z}{\alpha^2 \cdot k^{(1)}} \cdot \left[ -th \frac{\alpha L}{2} \cdot sh \alpha z + ch \alpha z + \frac{\alpha^2 z}{2} \cdot (L - z) - 1 \right]$$

La rotazione, naturalmente nulla alle estremità della trave, assume in mezzeria il valore massimo:

$$\theta\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{m_z}{\alpha^2 \cdot k^{(1)}} \cdot \left[ -th \frac{\alpha L}{2} \cdot sh \frac{\alpha L}{2} + ch \frac{\alpha L}{2} + \frac{\alpha^2 L^2}{8} - 1 \right]$$

Nota l'espressione corrente della rotazione torsionale è possibile determinare, per successive derivazioni, le espressioni del momento torcente primario e di quello secondario in funzione dell'ascissa  $z$ :

$$M^{(1)}(z) = k^{(1)} \cdot \theta'(z) = \frac{m_z}{\alpha} \cdot \left[ -th \frac{\alpha L}{2} \cdot ch \alpha z + sh \alpha z + \frac{\alpha L}{2} - \alpha z \right]$$

$$M^{(2)}(z) = -k^{(2)} \cdot \theta'''(z) = \frac{m_z}{\alpha} \cdot \left[ th \frac{\alpha L}{2} \cdot ch \alpha z - sh \alpha z \right]$$

che assumono i valori massimi nelle sezioni di estremità per le quali risulta rispettivamente:

$$M^{(1)}(0) = k^{(1)} \cdot \theta'(0) = \frac{m_z}{\alpha} \cdot \left[ \frac{\alpha L}{2} - th \frac{\alpha L}{2} \right]$$

$$M^{(2)}(0) = -k^{(2)} \cdot \theta'''(0) = \frac{m_z}{\alpha} \cdot th \frac{\alpha L}{2}$$

Nelle dette sezioni si verifica, inoltre:

$$B(0) = B(L) = 0$$

Ricordando la legge di variazione della caratteristica torcente interna:

$$M_z(z) = m_z \cdot \left( \frac{L}{2} - z \right)$$

che attinge anch'essa il massimo nelle sezioni di estremità:

$$M_z(0) = -M_z(L) = \frac{m_z \cdot L}{2}$$

si possono formulare le seguenti osservazioni:

- è verificata per ogni sezione l'eguaglianza:

$$M^{(1)} + M^{(2)} = M_z$$

- il rapporto fra momento torcente secondario e momento torcente totale nelle sezioni di estremità, ove assumono il massimo valore:

$$\frac{M^{(2)}(0)}{M_z(0)} = \frac{2}{\alpha L} \cdot th \frac{\alpha L}{2}$$

evidenza che il momento torcente secondario risulta inversamente proporzionale alla luce della trave per cui, a parità di rapporto fra rigidità torsionale primaria e secondaria, all'aumentare della luce il momento torcente secondario decresce a vantaggio di quello primario.

In definitiva si può concludere che la ripartizione della caratteristica torcente nelle sue aliquote primaria e secondaria dipende dal parametro  $\alpha L$  (e dunque da  $k^{(1)}$ ,  $k^{(2)}$ ,  $L$ ) ovvero dal rapporto adimensionale tra la lunghezza della trave e la sua *lunghezza caratteristica*.

I diagrammi delle caratteristiche torcenti primaria e secondaria e del bimomento sono riportati nella figura che segue:

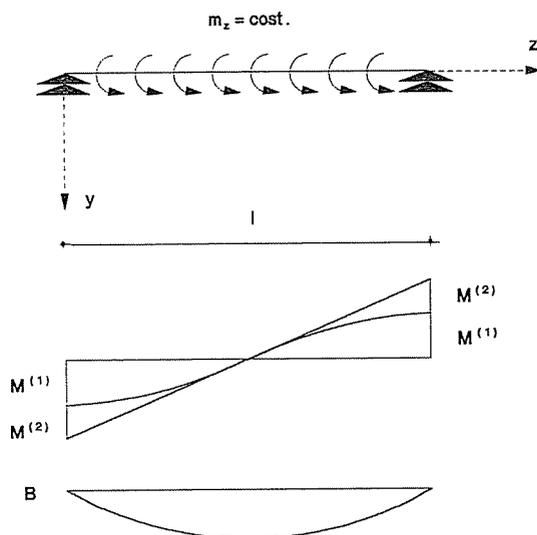


Fig. 4.57

Una significativa indagine è stata condotta da Kollbrunner e Basler [26] che, operando su travi vincolate con appoggi torsionali e flessionali sottoposte a differenti condizioni di carico, hanno esaminato il comportamento torsionale al variare delle caratteristiche di rigidità delle sezioni.

Riportando su un diagramma semilogaritmico, in ascisse il parametro adimensionale  $\alpha L$  di cui si è detto innanzi, e in ordinate il rapporto adimensionale  $\beta$ , fra il bimomento nella sezione di mezzeria, funzione di  $\alpha L$ , ed il bimomento, sempre nella medesima sezione per  $\alpha L = 0$  (ovvero per torsione tutta secondaria) sono state ottenute le curve relative alle tre condizioni di carico costituite da:

- una coppia torcente concentrata in mezzeria;
- una distribuzione uniforme di coppie torcenti;
- due bimomenti applicati alle estremità della trave.

Poichè al crescere del parametro  $\alpha L$  aumenta la rigidità torsionale primaria rispetto a quella secondaria, mentre per  $\beta$  variabile tra 0 ed 1 la torsione primaria diminuisce sempre più a vantaggio di quella secondaria, è possibile operare una classificazione del comportamento torsionale delle travi al variare dei diversi tipi di sezione: ciò consente, essenzialmente, di stabilire quando sia lecito semplificare il problema della torsione utilizzando equazioni ridotte, approssimate, in luogo di quella fondamentale, esatta, e dunque di trattare le sezioni come *sottili* ovvero di considerare il bimomento esclusivamente quale effetto *locale* in prossimità delle sezioni caricate o vincolate.

Si può, allora, osservare come travi di eguale lunghezza sottoposte alla medesima condizione di carico diano luogo a comportamenti, e dunque a stati tensionali, molto diversi al variare delle caratteristiche della sezione.

Un attento esame del diagramma in figura 4.58, tratto da [26], consente di pervenire alle considerazioni che seguono:

- Il campo nel quale  $\alpha L$  varia tra 0.1 e 0.5 è caratterizzato da un comportamento torsionale esclusivamente secondario, per cui risulta possibile studiare il problema utilizzando l'equazione ridotta  $k^{(2)} \cdot \theta'''(z) = m_z$ . Presentano tale comportamento, ad esempio, le travi laminate a freddo e gli impalcati in acciaio a lastra ortotropa con sezione monoconnessa.
- Nel campo in cui  $\alpha L$  varia tra 0.5 e 2 il comportamento torsionale delle travi è prevalentemente secondario: ciò significa che solamente in un calcolo di prima approssimazione, ovvero di proporzionamento, si può trascurare il termine primario, del quale, in un'analisi rigorosa, si dovrà poi tenere il debito conto. Presentano un comportamento di tale genere, ad esempio, le travi metalliche costituite da profili ad *I* saldati, le volte sottili cilindriche e gli impalcati in sistema misto acciaio-calcestruzzo o in c.a., a sezione monoconnessa, perlomeno per le tipologie usualmente adottate.

- Il campo entro il quale i valori di  $\alpha L$  sono compresi tra 2 e 5 è quello caratterizzato da una equilibrata presenza di torsione primaria e secondaria. In tali casi, lo studio della torsione può essere effettuato solamente mediante l'equazione fondamentale nella sua forma completa. Tale comportamento è caratteristico, ad esempio, di tutte le travi metalliche laminate a caldo, ed in generale delle travi di copertura (tegoloni) in c.a. o c.a.p. e degli impalcati in c.a.p.
- Il campo nel quale  $\alpha L$  assume valori compresi tra 5 e 20 è caratterizzato, invece, da un comportamento torsionale prevalentemente primario, che può essere studiato, perlomeno in prima approssimazione, trascurando la rigidità torsionale secondaria, della quale si dovrà tenere conto in una fase di calcolo rigoroso. È questo il comportamento delle sezioni *tozze* in genere.
- Infine, nel campo dei valori di  $\alpha L$  che vanno da 20 a 100 il comportamento torsionale è quello alla *De Saint Venant*, ed è dunque possibile determinare lo stato tensionale primario tramite l'equazione ridotta:  $-k^{(1)} \cdot \theta''(z) = m_z$ . Presentano tale comportamento tutte le travi a sezione *compatta* e quelle in parete sottile con sezione bi o pluriconnessa.

Per non incorrere in facili equivoci, occorre precisare che la classificazione di Kollbrunner e Basler non solo non va riguardata in senso tassativo ma è riferita all'impiego di travi sulle luci di uso comune relativamente alle singole tecnologie.

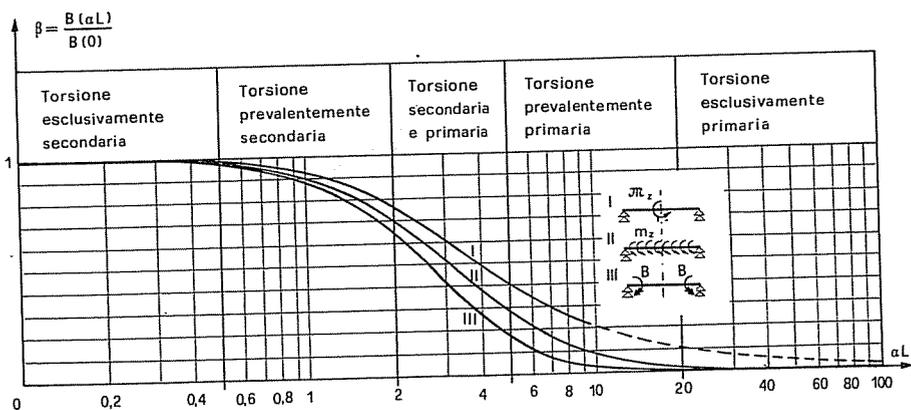


Fig. 4.58

Problema 4.13

Per la trave da ponte in cemento armato di luce 20 m, semplicemente appoggiata alle estremità, costituita da sei innervature  $0,35 \times 1,91 \text{ m}^2$  e da una soletta  $13 \times 0,22 \text{ m}^2$ , determinare le percentuali primaria e secondaria del momento torcente totale.

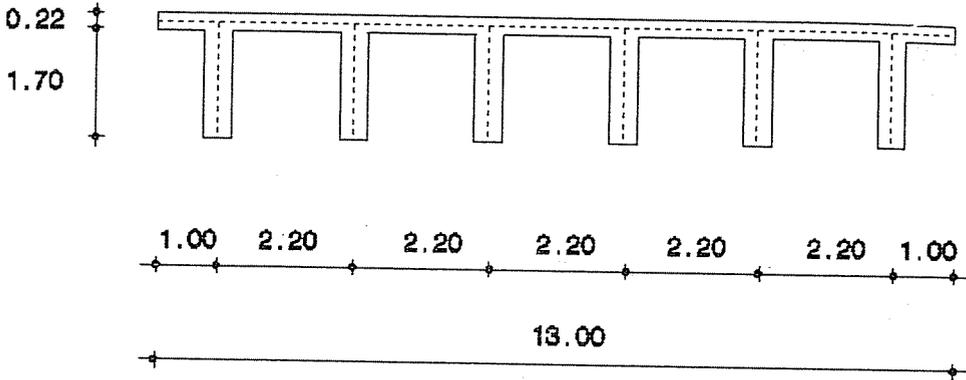
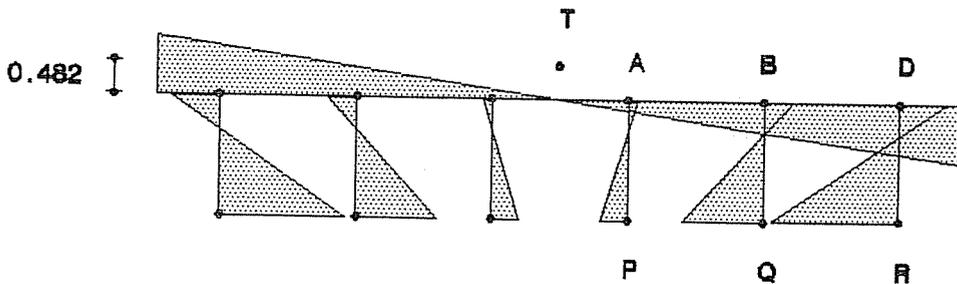


Fig. 4.59

Applicando uno dei metodi già esposti si determina la posizione dal centro di taglio che, sull'asse di simmetria, a calcoli eseguiti, dista dal punto di intersezione  $O$  con la linea media della soletta della quantità:

$$\overline{OT} = 0,482 \text{ m}$$

Il diagramma dell'area settoriale di polo  $T$  presenta la distribuzione riportata nella figura 4.60, con punti di nullo in corrispondenza delle nervature a distanza dalla linea media della soletta pari ad  $\overline{OT}$ :



$$\omega(A) = +0,530 \text{ m}^2$$

$$\omega(B) = +1,591 \text{ m}^2$$

$$\omega(D) = +2,651 \text{ m}^2$$

$$\omega(P) = -1,450 \text{ m}^2$$

$$\omega(Q) = -4,349 \text{ m}^2$$

$$\omega(R) = -7,249 \text{ m}^2$$

Fig. 4.60

Nota tale diagramma è possibile calcolare il momento d'inerzia secondario che vale:

$$I_{\omega\omega} = \int_A \omega^2(c) \cdot dA = 33,05 \text{ m}^6$$

È possibile, quindi, determinare il rapporto tra le rigidzze torsionali primaria e secondaria che, assunto per il conglomerato cementizio armato un coefficiente di Poisson  $\nu = 0,10$  ovvero  $E/G = 2,2$  vale:

$$\frac{k^{(1)}}{k^{(2)}} = \frac{G \cdot I^*}{E \cdot I_{\omega\omega}} = \frac{G \cdot 0,191}{2,2 \cdot G \cdot 33,05} = 2,63 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-2}$$

da cui il rapporto tra la lunghezza effettiva della trave e la sua lunghezza caratteristica:

$$\alpha L = \sqrt{\frac{k^{(1)}}{k^{(2)}}} \cdot L = 1,026$$

Sfruttando la relazione che esprime il rapporto tra momento torcente secondario e momento torcente totale nelle sezioni di estremità della trave, ove assumono il valore massimo, risulta:

$$\frac{M^{(2)}(0)}{M_z(0)} = \frac{2}{\alpha L} \cdot th \frac{\alpha L}{2} = 0,92$$

Da ciò si evince come il 92% del momento torcente applicato venga assorbito come torsione secondaria, che dà luogo alle tensioni  $\sigma^{(2)}$  e  $\tau^{(2)}$ , mentre solamente l'8% è assorbito come momento torcente primario che genera le tensioni  $\tau^{(1)}$ .

Si può notare, allora, come il trattare una simile trave con la teoria di De Saint Venant darebbe luogo ad errori di notevole gravità; di contro, però, anche una trattazione alla Engesser, basata sull'ipotesi di torsione tutta secondaria, non sarebbe del tutto corretta facendo trascurare una percentuale non insignificante dello stato tensionale primario.

#### Problema 4.14

Verificare la resistenza di una trave rettilinea in acciaio Fe 360, avente la sezione in figura 4.61, di luce  $L = 1,20$  m, vincolata alle estremità con appoggi flessionali e torsionali, sottoposta ad un carico torcente uniformemente ripartito  $m_z$ .

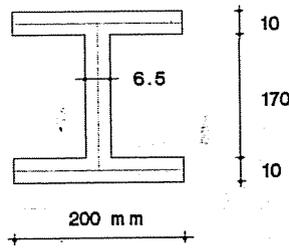


Fig. 4.61

*Caratteristiche elasto-geometriche.*

Moduli di elasticità:  $G = 0,4 \cdot E$ .

Rigidezza torsionale primaria:

$$k^{(1)} = G \cdot I^* = 0,4 \cdot E \cdot \sum_1^3 \frac{1}{3} \cdot s_i^3 \cdot d_i = 0,4 \cdot E \cdot \frac{1}{3} [20 + 20 + 0,65^3 \cdot 17] = E \cdot 5,96$$

Rigidezza torsionale secondaria:

$$k^{(2)} = E \cdot I_{\lambda\lambda} = E \cdot \frac{s \cdot a^2 \cdot b^3}{24} = E \cdot 108000$$

Lunghezza caratteristica inversa:

$$\alpha = \sqrt{k^{(1)}/k^{(2)}} = 7,42 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

Lunghezza adimensionalizzata:

$$\alpha L = 7,42 \cdot 10^{-3} \cdot 120 = 0,89$$

Omettendo per brevità gli sviluppi di calcolo, si perviene alle funzioni che seguono.

*Funzione rotazione torsionale:*

$$\theta(z) = \frac{m_z}{689,086} \cdot \left[ -0,41778 \cdot sh(7,42 \cdot 10^{-3} \cdot z) + ch(7,42 \cdot 10^{-3} \cdot z) + (3,30338 \cdot 10^{-3}) \cdot z - 1 - (2,75282 \cdot 10^{-3}) \cdot z^2 \right]$$

il cui massimo, nella sezione di mezzeria, assume il valore:

$$\theta_{max} = \theta(L/2) = 1,78671 \cdot 10^{-5} \cdot m_z$$

*Funzione momento torcente primario:*

$$M^{(1)}(z) = k^{(1)} \cdot \theta'(z) = \frac{m_z}{7,42 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[ -0,41778 \cdot ch(7,42 \cdot 10^{-3} \cdot z) + sh(7,42 \cdot 10^{-3} \cdot z) + 0,445 - 7,42 \cdot 10^{-3} \cdot z \right]$$

il cui massimo, nelle sezioni di estremità, assume il valore:

$$M_{max}^{(1)} = M^{(1)}(0) = -M^{(1)}(L) = 3,67 \cdot m_z$$

*Funzione momento torcente secondario:*

$$M^{(2)}(z) = -k^{(2)} \cdot \theta'''(z) = -\frac{m_z}{7,42 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[ -0,41778 \cdot ch(7,42 \cdot 10^{-3} \cdot z) + sh(7,42 \cdot 10^{-3} \cdot z) \right]$$

il cui massimo, nelle sezioni di estremità, assume il valore:

$$M_{max}^{(2)} = M^{(2)}(0) = -M^{(2)}(L) = 56,30 \cdot m_z$$

Per verifica si può ritrovare la nota funzione momento torcente totale:

$$M_z(z) = M^{(1)} + M^{(2)} = \frac{m_z}{7,42 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[ 0,445 - 7,42 \cdot 10^{-3} \cdot z \right] = m_z \cdot (59,97 - z)$$

praticamente esatta a meno delle inevitabili approssimazioni di calcolo.

Si può notare come il momento torcente secondario risulti prevalente rispetto a quello primario, attingendo nelle sezioni di estremità circa il 93% del momento torcente totale.

*Funzione tensione normale secondaria:*

$$\sigma^{(2)}(c, z) = -E \cdot \theta''(z) \cdot \lambda(c) = -\frac{m_z}{5,96} \cdot \left[ -0,41778 \cdot sh(7,42 \cdot 10^{-3} \cdot z) + ch(7,42 \cdot 10^{-3} \cdot z) - 1 \right] \cdot (\pm 9 \cdot x)$$

il cui massimo, alle estremità delle ali nella sezione di mezzzeria, assume il valore:

$$\sigma_{max}^{(2)} = \sigma^{(2)}(\xi_{max}, L/2) = \sigma^{(2)}(10, 60) = m_z \cdot 1,59865 \cdot 10^{-2} \cdot 90 = 1,44 \cdot m_z$$

*Funzione tensione tangenziale secondaria:*

$$\tau^{(2)}(c, z) = \frac{E}{s} \cdot \theta'''(z) \cdot I_\lambda(c) = m_z \cdot 1,2496 \cdot 10^{-3} \cdot \left[ -0,41778 \cdot ch(7,42 \cdot 10^{-3} \cdot z) + sh(7,42 \cdot 10^{-3} \cdot z) \right] \cdot \int \pm 9 \cdot x \cdot dx$$

il cui massimo, nei punti di nodo delle sezioni di estremità, assume il valore:

$$\tau_{max}^{(2)} = m_z \cdot 5,20 \cdot 10^{-4} \cdot 450 = 0,234 \cdot m_z$$

Nelle medesime posizioni, lungo i bordi del profilo, anche le tensioni tangenziali primarie assumono i valori estremi:

$$\tau_{max}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(0)}{I^{(1)}} = \frac{3 \cdot s}{\int_C s^3 \cdot dc} \cdot M^{(1)}(0) = 0,246 \cdot m_z$$

Verifiche.

Nei punti di nodo delle sezioni di estremità risulta:

$$\tau_{max} = \tau_{max}^{(1)} + \tau_{max}^{(2)} = 0,48 \cdot m_z$$

da cui la tensione ideale:

$$\sigma_{id} = \sqrt{3 \cdot \tau^2} = 0,83 \cdot m_z$$

Nei punti di estremità delle ali della sezione di mezzeria risulta:

$$\sigma_{max} = 1,44 \cdot m_z$$

Operando le medesime determinazioni per una trave avente lunghezza dieci volte maggiore, e cioè  $L = 12$  m, ma vincolata allo stesso modo, si ha a calcoli eseguiti:

$$\alpha L = 8,904$$

$$\theta_{max} = 1,29647 \cdot 10^{-2} \cdot m_z$$

$$M_{max}^{(1)} = 465,26684 \cdot m_z$$

$$M_{max}^{(2)} = 134,73315 \cdot m_z$$

$$M_{max} = 600 \cdot m_z$$

Dall'esame dei risultati precedenti si evince che l'aliquota di momento torcente secondario, rispetto a quello totale, si è ridotta al 22% circa, con una prevalenza, dunque, del momento torcente primario.

Risulta ancora:

Nei punti di estremità della sezione di mezzeria:

$$\sigma_{max}^{(2)} = \sigma_{max} = 14,74 \cdot m_z$$

Nei punti di nodo delle ali nelle sezioni estreme:

$$\tau_{max}^{(2)} = 0,56 \cdot m_z$$

$$\tau_{max}^{(1)} = 31,25 \cdot m_z$$

da cui:

$$\tau_{max} = 31,81 \cdot m_z$$

$$\sigma_{id} = 55,09 \cdot m_z$$

In tale caso, allora, le sezioni maggiormente sollecitate sono quelle di estremità ed il carico torcente massimo sopportabile dalla trave risulta pari al 2,6% circa di quello ammissibile per la precedente trave.

Si può osservare che la mancata rispondenza con le indicazioni fornite da Kollbrunner e Basler è da imputare alla circostanza che le luci adottate in entrambi gli esempi, volutamente inusuali per evidenziare taluni fenomeni, risultano ben lontane dai valori relativi alle travi di uso comune.

#### Problema 4.15

Studiare il comportamento di una trave a sezione costante incastrata torsionalmente ad un estremo e caricata nell'estremo libero da una coppia torcente di valore  $\mathfrak{M}_z$ .

L'equazione che regge il problema si scrive, in tale caso:

$$k^{(2)} \cdot \theta'''(z) - k^{(1)} \cdot \theta''(z) = 0$$

ovvero:

$$\theta'''(z) - \alpha^2 \cdot \theta''(z) = 0 \quad \text{con} \quad \alpha^2 = k^{(1)}/k^{(2)}$$

La soluzione è del tipo:

$$\theta(z) = A \cdot sh \alpha z + B \cdot ch \alpha z + C \cdot z + D$$

ed imponendo le condizioni ai limiti:

$$\theta(0) = 0 \quad \text{da cui:} \quad B + D = 0$$

$$\theta'(0) = 0 \quad \text{da cui:} \quad \alpha \cdot A + C = 0$$

$$\theta''(L) = 0 \quad \text{da cui:} \quad \alpha^2 \cdot (A \cdot sh \alpha L + B \cdot ch \alpha L) = 0$$

$$-k^{(2)} \cdot \theta'''(L) + k^{(1)} \cdot \theta''(L) = \mathfrak{M}_z \quad \text{da cui:} \quad \alpha [k^{(1)} - \alpha \cdot k^{(2)}] \cdot (A \cdot ch \alpha L + B \cdot sh \alpha L) + k^{(1)} \cdot C = \mathfrak{M}_z$$

si ottengono i valori delle costanti di integrazione:

$$A = -\frac{\mathfrak{M}_z}{\alpha \cdot k^{(1)}}$$

$$B = \frac{\mathfrak{M}_z}{\alpha \cdot k^{(1)}} \cdot th \alpha L$$

$$C = \frac{\mathfrak{M}_z}{k^{(1)}}$$

$$D = -\frac{\mathfrak{M}_z}{\alpha \cdot k^{(1)}} \cdot th \alpha L$$

Risulta dunque:

$$\theta(z) = \frac{\mathfrak{M}_z}{\alpha \cdot k^{(1)}} \cdot [-sh \alpha z + th \alpha L \cdot (ch \alpha z - 1) + \alpha z]$$

$$\theta'(z) = \frac{\mathfrak{M}_z}{k^{(1)}} \cdot [-ch \alpha z + th \alpha L \cdot sh \alpha z + 1]$$

$$\theta''(z) = \frac{\mathfrak{M}_z \cdot \alpha}{k^{(1)}} \cdot [-sh \alpha z + th \alpha L \cdot ch \alpha z]$$

$$\theta'''(z) = \frac{\mathfrak{M}_z}{k^{(2)}} \cdot [-ch \alpha z + th \alpha L \cdot sh \alpha z]$$

Da cui:

$$M^{(1)}(z) = k^{(1)} \cdot \theta'(z) = \mathfrak{M}_z \cdot [-ch \alpha z + th \alpha L \cdot sh \alpha z + 1]$$

$$M^{(2)}(z) = -k^{(2)} \cdot \theta'''(z) = \mathfrak{M}_z \cdot [ch \alpha z - th \alpha L \cdot sh \alpha z]$$

che nelle sezioni di estremità assumono i valori:

$$M^{(1)}(0) = 0$$

$$M^{(2)}(0) = \mathfrak{M}_z$$

$$M^{(1)}(L) = \mathfrak{M}_z \left( 1 - \frac{1}{ch \alpha L} \right)$$

$$M^{(2)}(L) = \mathfrak{M}_z \cdot \frac{1}{ch \alpha L}$$

Da queste si nota chiaramente come l'effetto del vincolo si attenui con la distanza da esso (ma molto lentamente rispetto a quanto prevedibile secondo il *postulato di De Saint Venant*), e come la somma delle aliquote primaria e secondaria riproduca il momento torcente totale.

I diagrammi, *a maniera*, delle diverse caratteristiche sono riportati in figura 4.62.

Ove si consideri la trave dotata di sezione ad *I* lo stato tensionale indotto dalla caratteristica torcente si può esemplificare come in figura 4.63.

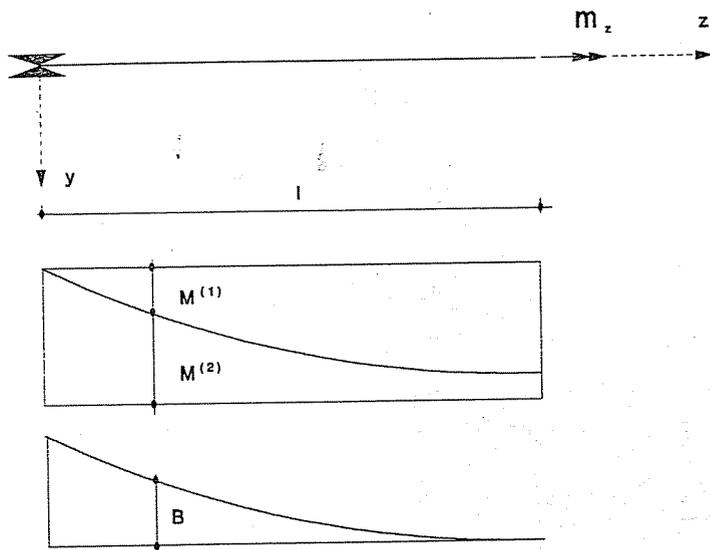
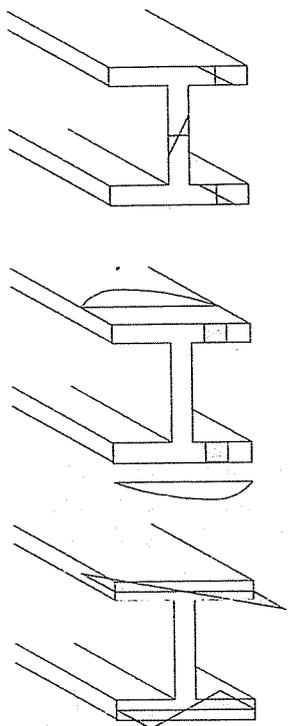


Fig. 4.62



$$\tau^{(1)} = \frac{M^{(1)}}{I^{(1)}} = \frac{3 \cdot k^{(1)} \cdot \theta'(z)}{\sum_i s_i^2 \cdot d_i}$$

$$\tau^{(2)} = -\frac{M^{(2)} \cdot I^{(2)}}{I_{\lambda\lambda} \cdot s} = \frac{k^{(2)} \cdot I_{\lambda}}{I_{\lambda\lambda} \cdot s} \cdot \theta'''(z)$$

$$\sigma^{(2)} = -E \cdot \lambda \cdot \theta''(z)$$

Fig. 4.63

#### 4.6 - La ripartizione della caratteristica torcente

L'affinità esistente fra l'equazione fondamentale della torsione:

$$k^{(2)} \cdot \theta'''(z) - k^{(1)} \cdot \theta''(z) = m_z(z)$$

e l'equazione che regge il problema della trave tenso-inflessa, sollecitata dal carico trasversale  $p_y(z)$  e dal carico assiale  $F$ :

$$E \cdot I_{yy} \cdot v''''(z) + F \cdot v''(z) = p_y(z)$$

consente di trattare il problema della torsione non uniforme con gli stessi metodi validi per le travi inflesse, facendo corrispondere:

- alla traslazione  $v(z)$ , la rotazione  $\theta(z)$ ;
- al carico flettente  $p_y(z)$ , il carico torcente  $m_z(z)$ ;
- al carico assiale  $F$ , la rigidezza primaria  $k^{(1)}$ ;
- alla rigidezza flessionale  $E \cdot I_{yy}$ , la rigidezza torsionale secondaria  $k^{(2)}$ .

Come si è visto in precedenza, peraltro, esiste una perfetta corrispondenza, per quanto attiene i vincoli, fra appoggi ed incastri flessionali e torsionali.

In definitiva tale analogia consente di riguardare le rotazioni torsionali  $\theta(z)$  come le componenti verticali  $v(z)$  degli spostamenti di una trave fittizia di sezione costante, avente rigidezza flessionale  $E \cdot I_{yy} = k^{(2)}$ , sollecitata da un carico trasversale  $p_y(z) = m_z(z)$  e da una forza assiale di trazione il cui valore è  $F = k^{(1)}$ .

Infine, la caratteristica torcente  $M_z(z)$ , somma dell'aliquota primaria e secondaria, può essere calcolata come taglio della trave fittizia, mentre la caratteristica bimomento  $B(z)$  si può determinare come momento flettente  $M_y(z)$  della stessa trave.

Risulta evidente che, nel caso in cui sia nulla la rigidezza torsionale secondaria, la trave fittizia si riduce ad un filo (privo di rigidezza flessionale), sollecitato da sforzi di trazione, con conseguente immediata semplificazione delle equazioni risolutrici.

La detta analogia consente, tra l'altro, di risolvere il problema della ripartizione del momento torcente totale nelle sue aliquote *primaria* e *secondaria*, ovvero di determinare la funzione bimomento (dalla quale risalire alle  $\sigma^{(2)}$ ) per le travi torsionalmente iperstatiche, adottando procedimenti in tutto e per tutto simili a quelli usati per le travi inflesse.

Adottando il *metodo delle forze* si possono assumere quali incognite i bimomenti e scrivere equazioni di congruenza fra gli angoli unitari di torsione delle sezioni nelle quali sono state introdotte labilità, che corrispondono alle rotazioni  $\varphi(z) = v'(z)$  delle travi inflesse.

In perfetta analogia con la trattazione delle travi sottoposte a flessione, si assume come modello elementare l'asta vincolata alle estremità con appoggi torsionali e sollecitata dal carico torcente ripartito  $m_z(z)$ , e dai bimomenti incogniti.

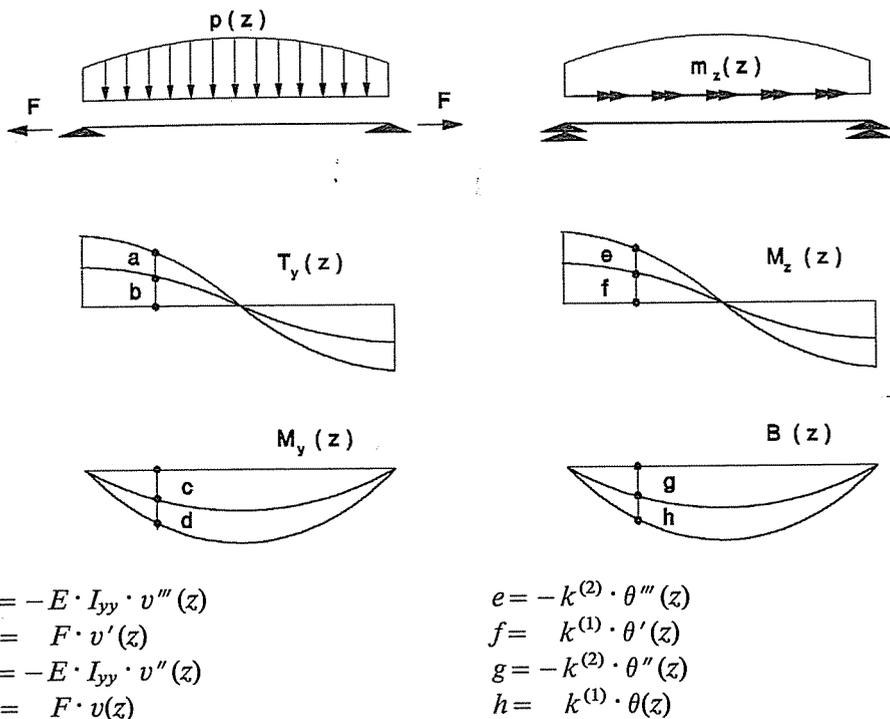


Fig. 4.64

Gli angoli unitari di torsione  $\theta'_i$  e  $\theta'_j$  possono essere ottenuti come somma delle variazioni di rotazione indotte rispettivamente dal carico esterno  $m_z(z)$  e dai bimomenti  $B$ .

Gli angoli unitari di torsione provocati dalle azioni esterne  $\bar{\theta}'_i$  e  $\bar{\theta}'_j$  sono determinabili tramite l'equazione fondamentale della torsione, per la trave vincolata con appoggi torsionali, una volta definita la condizione di carico. Ad esempio, per  $m_z = \text{cost.}$ , dagli sviluppi di calcolo eseguiti nei paragrafi precedenti risulta:

$$\bar{\theta}'_i = \bar{\theta}'_j = \frac{m_z}{\alpha \cdot k^{(1)}} \cdot \left[ \frac{\alpha L}{2} - th \frac{\alpha L}{2} \right]$$

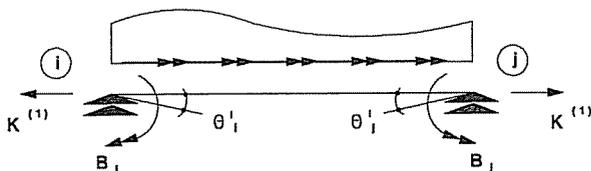


Fig. 4.65

In perfetta analogia ai coefficienti elastici flessionali, si definiscono *coefficienti elastici torsionali*  $\gamma_i$ ,  $\gamma_j$ ,  $\delta$  gli angoli unitari di torsione, rispettivamente delle sezioni:

- $i$  quando in essa sia applicato  $B_i = 1$ ;
- $j$  quando in essa sia applicato  $B_j = 1$ ;
- $i$  o  $j$  quando in  $j$  o  $i$  sia applicato  $B_j = 1$  o  $B_i = 1$ .

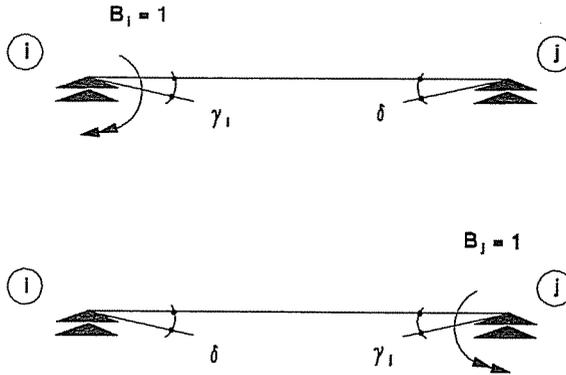


Fig. 4.66

Essi, come è ovvio, dipendono esclusivamente dalla geometria della trave, essendo legati al parametro  $L$ , e sono del tutto indipendenti dalla condizione di carico.

Gli angoli unitari di torsione all'estremità della trave, assumono, in definitiva, le espressioni:

$$\theta'_i = \bar{\theta}'_i + B_i \cdot \gamma_i + B_j \cdot \delta$$

$$\theta'_j = \bar{\theta}'_j + B_i \cdot \delta + B_j \cdot \gamma_j$$

Ad entrambe può essere aggiunto, a secondo membro, l'eventuale termine che tenga conto di rotazioni torsionali anelastiche dei vincoli, ove sussistano.

In conclusione, per strutture costituite da travi continue su appoggi torsionali, si potranno scrivere tante equazioni di congruenza degli ingobbimenti quanti sono i bimomenti incogniti assunti, riducendo così la struttura ad un insieme di campate singole, delle quali siano noti i bimomenti di estremità.

Per analogia con il problema delle travi iperstatiche inflesse, si potrà parlare, nel caso in esame, di *equazioni dei tre bimomenti*.

Per i sistemi di travi, in alternativa al procedimento testè esposto, si potrebbe operare nello spirito del *metodo delle deformazioni*, adottando un procedimento iterativo tipo *Cross*.

**Problema 4.16**

Si determinino i coefficienti elastici torsionali di una trave a sezione costante di luce  $L$ .



Fig. 4.67

L'equazione che regge il problema del modello in figura è:

$$\theta''''(z) - \alpha^2 \cdot \theta''(z) = 0 \quad \text{con:} \quad \alpha^2 = k^{(1)}/k^{(2)}$$

la cui soluzione ha la forma:

$$\theta(z) = A \cdot \text{sh } \alpha z + B \cdot \text{ch } \alpha z + C \cdot z + D$$

Le condizioni ai limiti porgono:

$$\theta(0) = 0 \quad \text{da cui:} \quad B + D = 0$$

$$B(0) = -k^{(2)} \cdot \theta''(0) = 1 \quad \text{da cui:} \quad k^{(2)} \cdot \alpha^2 \cdot B = 1$$

$$\theta(L) = 0 \quad \text{da cui:} \quad A \cdot \text{sh } \alpha L + B \cdot \text{ch } \alpha L + C \cdot L + D = 0$$

$$B(L) = 0 \quad \text{da cui:} \quad A \cdot \text{sh } \alpha L + B \cdot \text{ch } \alpha L = 0$$

Le costanti di integrazione assumono, allora, i valori:

$$A = \frac{1}{k^{(1)}} \cdot \frac{\text{ch } \alpha L}{\text{sh } \alpha L}$$

$$B = -\frac{1}{k^{(1)}}$$

$$C = -\frac{1}{L \cdot k^{(1)}}$$

$$D = \frac{1}{k^{(1)}}$$

La rotazione torsionale vale dunque:

$$\theta(z) = \frac{1}{k^{(1)}} \cdot \left[ \frac{\text{ch } \alpha L}{\text{sh } \alpha L} \cdot \text{sh } \alpha z - \text{ch } \alpha z - \frac{z}{L} + 1 \right]$$

e l'angolo unitario di torsione vale, nella sezione generica:

$$\theta'(z) = \frac{\alpha}{k^{(1)}} \cdot \left[ \frac{ch \alpha L}{sh \alpha L} \cdot ch \alpha z - sh \alpha z - \frac{1}{\alpha L} \right]$$

mentre nelle sezioni di estremità assume i valori:

$$\gamma = \theta'(0) = \frac{\alpha}{k^{(1)}} \cdot \left[ \frac{ch \alpha L}{sh \alpha L} - \frac{1}{\alpha L} \right]$$

$$\delta = \theta'(L) = \frac{\alpha}{k^{(1)}} \cdot \left[ \frac{1}{sh \alpha L} - \frac{1}{\alpha L} \right]$$

#### Problema 4.17

Determinare il bimomento incognito di una trave incastrata torsionalmente all'estremità  $i$  ed appoggiata all'altra.

Dovendo essere  $\theta'_i = 0$  deve risultare:

$$\bar{\theta}'_i + B_i \cdot \gamma = 0$$

da cui si ricava il bimomento all'incastro:

$$B_i = -\frac{\bar{\theta}'_i}{\gamma}$$

#### Problema 4.18

Determinare il bimomento incognito per una trave ad una campata con sezione costante, incastrata torsionalmente alle estremità:

Dovendo essere  $\theta'_i = \theta'_j = 0$  sarà:

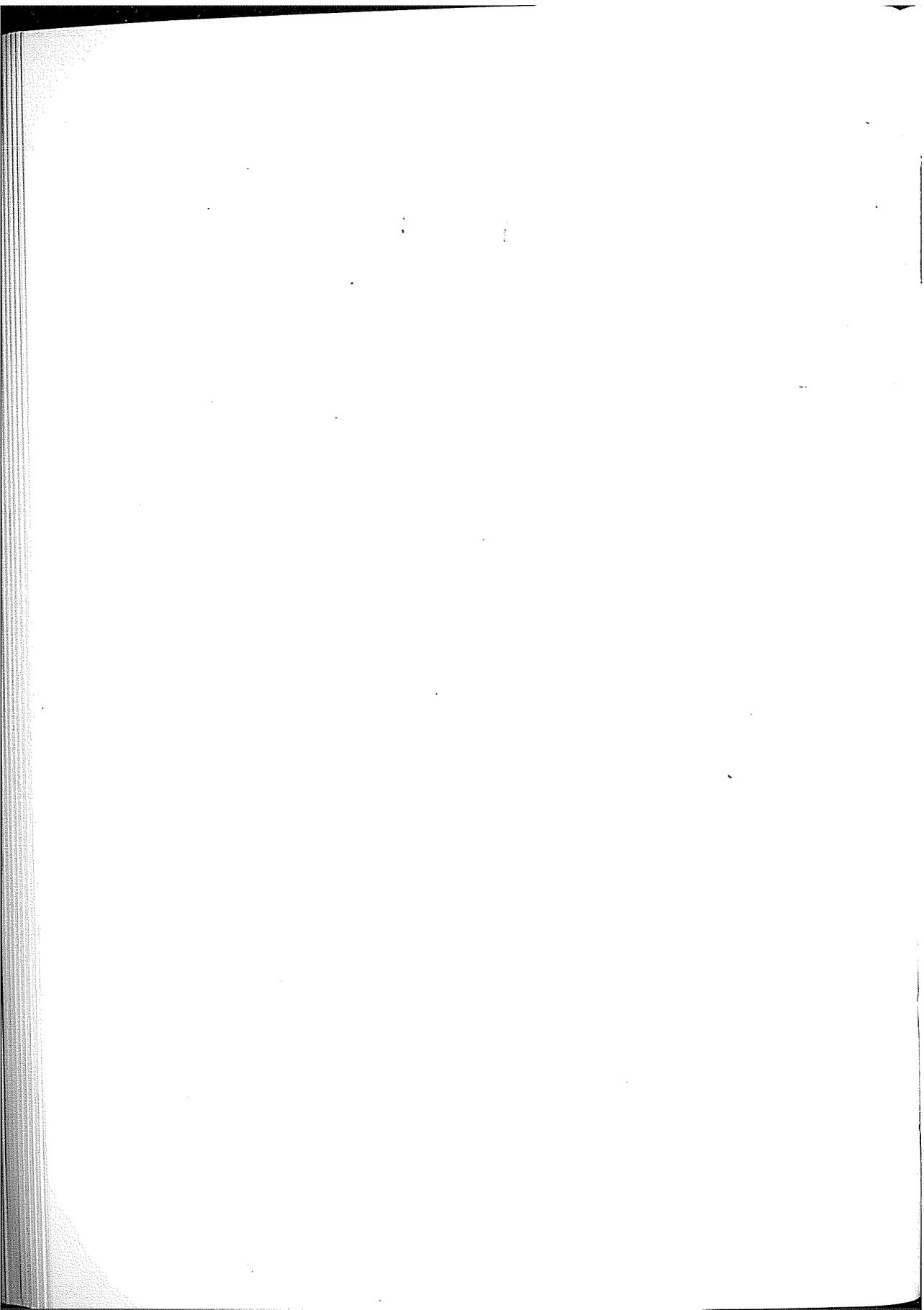
$$\bar{\theta}'_i + B_i \cdot \gamma + B_j \cdot \delta = 0$$

$$\bar{\theta}'_j + B_i \cdot \delta + B_j \cdot \gamma = 0$$

la cui soluzione porge i bimomenti incogniti:

$$B_i = \frac{\bar{\theta}'_j \cdot \delta - \bar{\theta}'_i \cdot \gamma}{\gamma^2 - \delta^2}$$

$$B_j = \frac{\bar{\theta}'_i \cdot \delta - \bar{\theta}'_j \cdot \gamma}{\gamma^2 - \delta^2}$$



## Capitolo quinto

### Le sollecitazioni combinate

Alla luce di quanto detto circa lo stato tensionale secondario, il *principio di De Saint Venant*, secondo il quale il sistema di forze applicato ad una trave può essere sostituito da uno ad esso equivalente, va inteso nel senso che la *equivalenza* richiesta riguarda non solo forze risultanti e momenti risultanti ma anche bimomenti.

Si riporta di seguito un quadro riepilogativo delle caratteristiche della sollecitazione interna e dei relativi stati tensionali che possono determinarsi nello studio delle strutture monodimensionali piane.

I segni dei singoli termini corrispondono, ovviamente, a caratteristiche della sollecitazione positive, ovvero aventi vettori rappresentativi concordi agli assi, mentre le coordinate generalizzate principali vanno assunte con i segni che loro competono secondo la convenzione positiva adottata.

#### 5.1 - Lo stato tensionale normale

Le caratteristiche della sollecitazione interna sono espresse di seguito in funzione delle caratteristiche di rigidezza e delle componenti di spostamento, unitamente alle tensioni che esse generano:

$$\begin{array}{ll} N = E \cdot A \cdot w' & \sigma_z^{(0)} = \frac{N}{A} \\ M_x = E \cdot I_{xx} \cdot u'' & \sigma_{zx}^{(1)} = -\frac{M_x}{I_{xx}} \cdot x \\ M_y = -E \cdot I_{yy} \cdot v'' & \sigma_{zy}^{(1)} = \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot y \\ B = -E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta'' & \sigma_z^{(2)} = \frac{B}{I_{\lambda\lambda}} \cdot \lambda \end{array}$$

La tensione normale totale, per il *principio di sovrapposizione degli effetti*, risulta essere dunque:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{I_{xx}} \cdot x + \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot y + \frac{B}{I_{\lambda\lambda}} \cdot \lambda$$

## 5.2 - Lo stato tensionale tangenziale

Le caratteristiche della sollecitazione interna vengono espresse attraverso le singole rigidzze e le derivate delle funzioni spostamento, unitamente alle tensioni tangenziali da esse generate:

$$\begin{aligned} T_x &= -E \cdot I_{xx} \cdot u''' & \tau_z^{(0)} &= -\frac{T_x \cdot I_x(c)}{I_{xx} \cdot s} \\ T_y &= -E \cdot I_{yy} \cdot v''' & \tau_z^{(0)} &= -\frac{T_y \cdot I_y(c)}{I_{yy} \cdot s} \\ M^{(2)} &= -E \cdot I_{\lambda\lambda} \cdot \theta''' & \tau_z^{(2)} &= -\frac{M^{(2)} \cdot I^{(2)}(c)}{I_{\lambda\lambda} \cdot s} \\ M^{(1)} &= G \cdot I^* \cdot \theta' & \tau_z^{(1)} &= \frac{M^{(1)}}{I^{(1)}} \end{aligned}$$

Anche in tale caso, con le convenzioni adottate nei precedenti capitoli, è possibile esprimere la tensione tangenziale massima come somma dei singoli effetti:

$$\tau_{z,max} = \frac{1}{s} \cdot \left[ \frac{T_x \cdot I_x}{I_{xx}} + \frac{T_y \cdot I_y}{I_{yy}} + \frac{M^{(2)} \cdot I^{(2)}}{I_{\lambda\lambda}} \right] + \frac{M^{(1)}}{I^{(1)}}$$

### Problema 5.1

Determinare lo stato tensionale per l'impalcato in cemento armato a sezione costante, schematizzato nelle figure 5.1 e 5.2, sollecitato da un carico unitario uniformemente ripartito,  $p_y = 1 \text{ N/m}$ , avente eccentricità unitaria,  $e = 1 \text{ m}$ , rispetto al piano di simmetria longitudinale.

Modello di calcolo longitudinale:

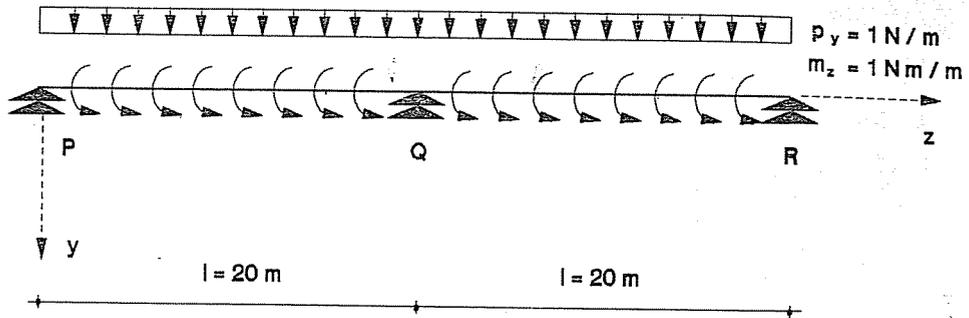


Fig. 5.1

Modello di calcolo trasversale:

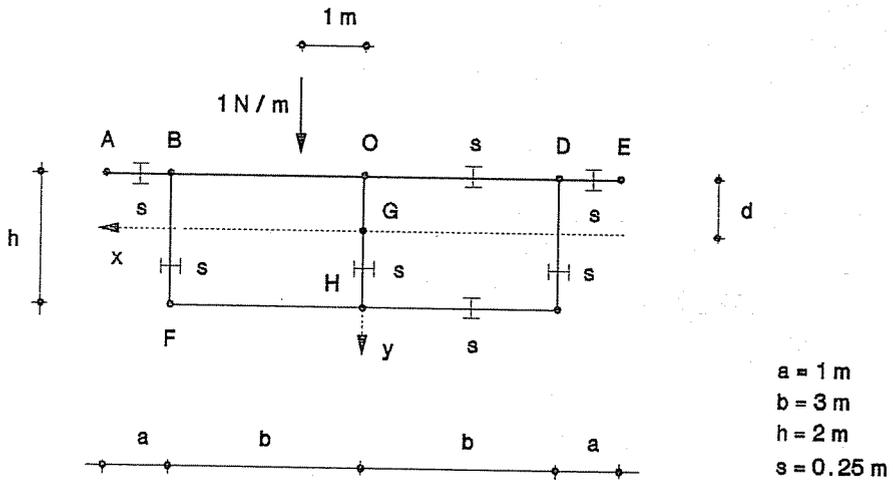


Fig. 5.2

$a = 1 \text{ m}$   
 $b = 3 \text{ m}$   
 $h = 2 \text{ m}$   
 $s = 0.25 \text{ m}$

Ipotizzando che il materiale costituente la struttura sia un calcestruzzo di classe  $R_{ck} = 30 \text{ MPa}$ , si assumono le seguenti caratteristiche elastiche:

modulo di elasticità normale	$E = 3,1 \cdot 10^4 \text{ MPa}$
coefficiente di Poisson	$\nu = 0,1$
modulo di elasticità tangenziale	$G = 1,4 \cdot 10^4 \text{ MPa}$

Quali sistemi di riferimento si assumono:

- una terna cartesiana ortogonale levogira di assi  $x, y, z$  dei quali  $z$  coincidente con l'asse longitudinale della trave;
- un sistema di ascisse curvilinee  $c$ , con origine nel punto  $O$  e verso positivo levogiro nelle maglie.

**I) - Analisi della sezione generica**

**1.a) - Determinazione della posizione del baricentro:**

$$d = \frac{h}{2} \cdot \frac{3h + 4b}{4b + 2a + 3h} = 0,9 \text{ m}$$

**1.b) - Determinazione dei momenti d'inerzia principali:**

$$I_{xx} = \frac{s}{12} \cdot [(2a + 2b)^3 + h \cdot s^2 + 2 \cdot (h \cdot s^2 + 12 \cdot h \cdot b^2) + (2b)^3] = 24,18 \text{ m}^4$$

$$I_{yy} = \frac{s}{12} \cdot [(2a + 2b) \cdot s^2 + 12 \cdot (2a + 2b) \cdot d^2 + 3 \cdot h^3 + 18 \cdot h \cdot (h - 2d)^2 + 2b \cdot s^2 + 24b \cdot (h - d)^2] = 3,97 \text{ m}^4$$

**1.c) - Ricerca della posizione del centro di taglio.**

La sezione, tre volte connessa, per motivi di simmetria si comporta, in effetti, come se fosse biconnessa.

Si effettua la determinazione della funzione:

$$\lambda_G(c) = \omega_G(c) - \frac{\Omega}{H} \cdot h(c)$$

rendendo la sezione monoconnessa, mediante l'introduzione di due sconnessioni in corrispondenza della controsoletta al piede della nervatura centrale, e tracciando separatamente i diagrammi di  $\omega_G(c)$  e di  $\Omega \cdot h(c)/H$ .

*Diagramma di  $\omega_G(c)$ :*

$$\begin{aligned} \omega_G(O) &= 0 &= 0 \text{ m}^2 \\ \omega_G(B) &= 0,9 \cdot b &= 2,7 \text{ m}^2 \\ \omega_G(A) &= 0,9 \cdot (a + b) &= 3,6 \text{ m}^2 \\ \omega_G(F) &= b \cdot (0,9 + h) &= 8,7 \text{ m}^2 \\ \omega_G(H) &= b \cdot (2 + h) &= 12 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

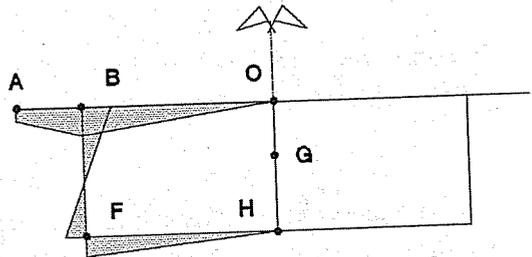


Fig. 5.3

*Diagramma di  $\Omega \cdot h(c)/H = \omega_G^*(c)$ .*

Essendo:

$$\frac{\Omega}{H} \cdot h(c) = 4b \cdot h \cdot \frac{s}{2 \cdot (2b + h)} \cdot \frac{1}{s} \cdot \int dc = 1,5 \cdot c(P)$$

con  $c(P)$  ascissa curvilinea del generico punto  $P$ , risulta:

$$\begin{aligned} \omega_G^*(O) &= 0 &= 0 \text{ m}^2 \\ \omega_G^*(B) &= 1,5 \cdot b &= 4,5 \text{ m}^2 \\ \omega_G^*(A) &= 1,5 \cdot b &= 4,5 \text{ m}^2 \\ \omega_G^*(F) &= 1,5 \cdot (b+h) &= 7,5 \text{ m}^2 \\ \omega_G^*(H) &= 1,5 \cdot (2b+h) &= 12 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

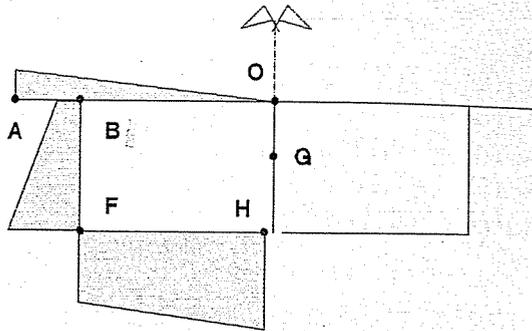


Fig. 5.4

Diagramma di  $\lambda_G(c) = \omega_G(c) - \omega_G^*(c)$ :

$$\begin{aligned} \lambda_G(O) &= 0 \text{ m}^2 \\ \lambda_G(B) &= -1,80 \text{ m}^2 \\ \lambda_G(A) &= -0,90 \text{ m}^2 \\ \lambda_G(F) &= +1,20 \text{ m}^2 \\ \lambda_G(H) &= 0 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

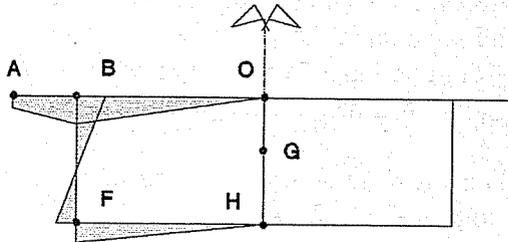


Fig. 5.5

Eseguendo l'integrale della funzione prodotto  $\lambda_G(c) \cdot x$  esteso a tutta l'area della sezione, si ottiene il momento centrifugo areale:

$$\begin{aligned} I_{\lambda x}^G &= \int_A \lambda_G \cdot x \cdot dA = s \cdot \int_C \lambda_G \cdot x \cdot dc = \\ &= 2 \cdot s \cdot \left\{ \int_0^3 -\frac{1,8}{3} \cdot c^2 \cdot dc + \int_0^1 (-1,8 + 0,9 \cdot c) \cdot (b+c) \cdot dc + \int_0^2 b \cdot (1,5 \cdot c - 1,8) \cdot dc + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^3 1,2 \cdot \left(1 - \frac{c}{3}\right) \cdot (b-c) \cdot dc \right\} = 2 \cdot (-1,35 - 1,16 - 0,45 + 0,9) = -4,12 \text{ m}^5 \end{aligned}$$

da cui l'ordinata del centro di taglio:

$$y_T = -\frac{I_{\lambda x}^G}{I_{xx}} = \frac{4,12}{24,18} = 0,17 \text{ m}$$

I.d) - *Diagramma delle distanze areali di polo T.*

Omettendo le operazioni intermedie, il diagramma, unitamente ai suoi va-

lori notevoli, viene riportato nella figura seguente.

$$\begin{aligned}\lambda_G(O) &= 0 \quad \text{m}^2 \\ \lambda_G(B) &= -1,29 \quad \text{m}^2 \\ \lambda_G(A) &= -0,22 \quad \text{m}^2 \\ \lambda_G(F) &= +1,71 \quad \text{m}^2 \\ \lambda_G(H) &= 0 \quad \text{m}^2\end{aligned}$$

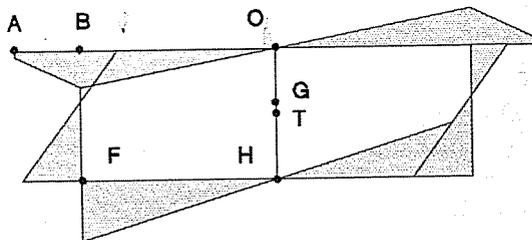


Fig. 5.6

Esso rappresenta, a meno del fattore  $-E \cdot \theta''(z)$ , anche il diagramma delle tensioni normali secondarie  $\sigma^{(2)}$ .

Il punto  $V$  di nullo lungo la nervatura possiede ordinata  $y = -0,04$  m, ovvero distanza dalla linea media della soletta  $BV = 0,86$  m.

I.e) - *Determinazione delle tensioni tangenziali  $\tau^{(0)}(c)$  indotte da una forza tagliante unitaria  $F = 1$  N, centrata.*

Si operano due sconnessioni nella soletta ai lati della nervatura centrale e si determina il diagramma delle tensioni tangenziali da taglio  $\bar{\tau}(c)$  per la sezione resa monoconnessa.

Nel tratto  $OBA$  la  $\bar{\tau}(c)$  assume valori nulli agli estremi e andamento lineare con pendenza:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dc} = \frac{1 \cdot d}{I_{yy}} = \frac{0,9}{3,97} = 0,227 \text{ Nm}^{-3}$$

i valori nelle sezioni del nodo  $B$  risultano:

$$\bar{\tau}(B \rightarrow A) = 0,227 \cdot 1 = 0,227 \text{ Pa}$$

$$\bar{\tau}(B \rightarrow O) = 0,227 \cdot 3 = 0,680 \text{ Pa}$$

$$\bar{\tau}(B \rightarrow F) = 0,227 + 0,680 = 0,907 \text{ Pa}$$

Lungo il tratto  $BF$  il diagramma ha andamento parabolico con punto di massimo in corrispondenza dell'asse neutro pari a:

$$\bar{\tau}(U) = 0,907 + \frac{1}{3,97 \cdot s} \cdot \int_0^{-0,9} y \cdot s \cdot dy = 1,009 \text{ Pa}$$

e valore nel punto  $F$ :

$$\bar{\tau}(F) = 0,857 \text{ Pa}$$

Nel tratto  $FH$  risulta:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dc} = -\frac{GH}{I_{yy}} = -0,277 \text{ Nm}^{-3}$$

e

$$\bar{\tau}(H \rightarrow F) = 0,026 \text{ Pa}$$

Nel tratto  $OH$  il massimo, in corrispondenza del baricentro, è pari a:

$$\bar{\tau}(G) = 0,102 \text{ Pa}$$

e nel nodo  $H$ :

$$\bar{\tau}(H \rightarrow O) = 0,052 \text{ Pa}$$

valori accettabili con le approssimazioni numeriche consentite.

Il diagramma delle  $\bar{\tau}(c)$  è riportato nella figura che segue, unitamente alle risultanti relative ai singoli tratti.

- $R_{OB} = 1,020 \text{ N/m}$
- $R_{BF} = 1,931 \text{ N/m}$
- $R_{FH} = 1,246 \text{ N/m}$
- $R_{OH} = 0,117 \text{ N/m}$

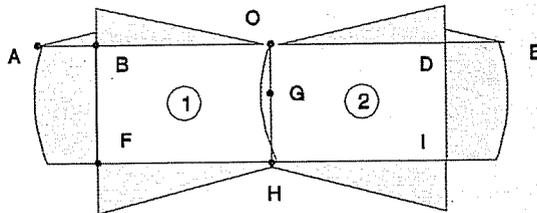


Fig. 5.7

Applicando il teorema di Stokes alle due maglie, deve risultare:

$$\oint_j \tau^{(0)}(c) \cdot dc = 0 \quad \text{con} \quad j=1,2$$

ovvero, considerando i quattro tratti di ognuna:

$$\sum_1^4 \int_{C_i} \tau^{(0)}(c) \cdot dc = \sum_1^4 \int_{C_i} [\bar{\tau}(c) + \tau_j^*] \cdot dc = 0$$

ove  $\tau_1^*$  e  $\tau_2^*$  costituiscono i valori costanti delle tensioni tangenziali che ripristinano la congruenza e che vengono rappresentati di seguito.

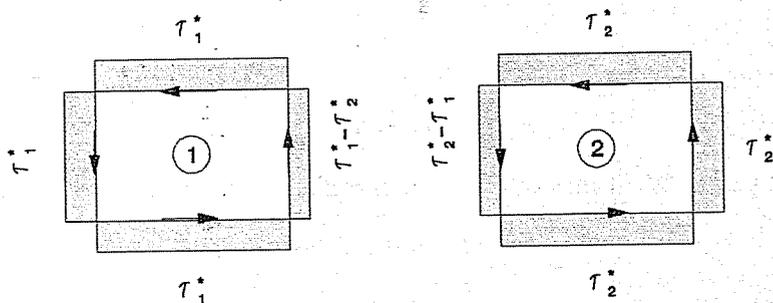


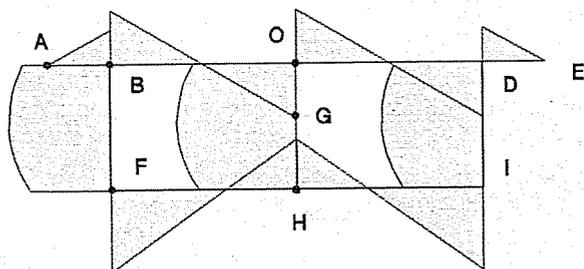
Fig. 5.8

Le due equazioni di congruenza, con le convenzioni adottate, si scrivono rispettivamente, per le maglie 1 e 2:

$$\begin{aligned}
 &+1,020 + 1,931 + 1,246 - 0,112 + 10\tau_1^* - 2\tau_2^* = 0 \\
 &-1,020 - 1,931 - 1,246 + 0,112 - 10\tau_1^* + 2\tau_2^* = 0
 \end{aligned}$$

La soluzione del sistema porge  $\tau_1^* = 0,34 \text{ Pa}$  e  $\tau_2^* = -0,34 \text{ Pa}$  che, sommate ai valori già trovati di  $\bar{\tau}(c)$ , forniscono le tensioni tangenziali effettive da taglio  $\tau^{(0)}(c)$  nella sezione.

Il diagramma, unitamente ai valori notevoli assunti, viene riportato in figura:



$$\begin{aligned}
 \tau^{(0)}(O \rightarrow B) &= -0,340 \text{ Pa} \\
 \tau^{(0)}(B \rightarrow O) &= +0,340 \text{ Pa} \\
 \tau^{(0)}(B \rightarrow A) &= +0,228 \text{ Pa} \\
 \tau^{(0)}(B \rightarrow F) &= +0,567 \text{ Pa} \\
 \tau^{(0)}(F) &= +0,517 \text{ Pa} \\
 \tau^{(0)}(H \rightarrow F) &= -0,314 \text{ Pa} \\
 \tau^{(0)}(H \rightarrow O) &= +0,630 \text{ Pa} \\
 \tau^{(0)}(O \rightarrow H) &= -0,680 \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

Fig. 5.9

Il valore massimo, in corrispondenza dell'asse neutro, è:

- per le nervature esterne:  $\tau^{(0)}(U) = 0,669 \text{ Pa}$
- per la nervatura centrale:  $\tau^{(0)}(G) = 0,782 \text{ Pa}$

I.f) - *Determinazione delle tensioni tangenziali primarie  $\tau^{(1)}$  (c) indotte dal momento torcente unitario  $M=1 \text{ Nm}$ .*

Essendo la sezione *mista*, indicheremo con il pedice *A* le tensioni relative agli elementi monoconnessi e con *C* le tensioni che competono alle maglie.

Si rende la sezione monoconnessa operando due sconessioni nella soletta, ai lati della nervatura centrale, e si assumono quali incognite i flussi  $f_j = [\tau^{(1)} \cdot s]_j$  nei tre rami della sezione, positivi come in figura.

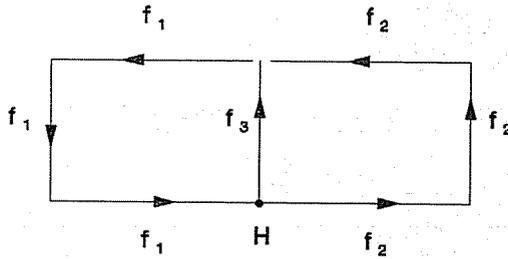


Fig. 5.10

Le equazioni che risolvono il problema sono:

- per l'equilibrio del nodo *H*:

$$f_1 - f_3 - f_2 = 0 \quad \text{da cui:} \quad f_3 = f_1 - f_2$$

- per la congruenza delle due maglie, con le convenzioni assunte:

$$\oint_1 \tau_c^{(1)} \cdot dc = G \cdot \theta' \cdot \Omega_1 \quad \text{da cui:} \quad \frac{1}{s} \cdot [2f_1 \cdot b + h \cdot (f_1 + f_3)] = 2b \cdot h \cdot G \cdot \theta'$$

$$\oint_2 \tau_c^{(1)} \cdot dc = G \cdot \theta' \cdot \Omega_2 \quad \text{da cui:} \quad \frac{1}{s} \cdot [2f_2 \cdot b + h \cdot (f_1 - f_3)] = 2b \cdot h \cdot G \cdot \theta'$$

La soluzione di tale sistema porge i valori:

$$f_1 = f_2 = 0,375 \cdot G \cdot \theta' = f \quad \text{ed} \quad f_3 = 0$$

ovvero:

$$\tau_{1c}^{(1)} = \tau_{2c}^{(1)} = 1,5 \cdot G \cdot \theta' = \tau_c^{(1)} \quad \text{e} \quad \tau_{3c}^{(1)} = 0$$

Per l'equilibrio alla rotazione globale della intera sezione, costituita da *p* elementi monoconnessi ed *m* maglie, deve essere:

$$M^{(1)} = M_A^{(1)} + M_C^{(1)} = \sum_1^p k_i^{(1)} \cdot \theta' + \sum_1^m \Omega_j \cdot [\tau_c^{(1)} \cdot s]_j$$

$$\text{da cui:} \quad 1 = 2 \cdot k_A^{(1)} \cdot \theta' + 2 \cdot \Omega \cdot f$$

$$\text{ovvero:} \quad 1 = 2 \cdot \frac{G \cdot a \cdot s^3}{3} \cdot \theta' + 2 \cdot 2b \cdot h \cdot 0,375 \cdot G \cdot \theta'$$

ovvero ancora:

$$\theta' = 0,111/G \text{ m}^{-1}$$

e dunque:

$$\tau_c^{(1)} = 0,166 \text{ Pa}$$

costante nelle maglie.

Le tensioni tangenziali estreme nelle ali valgono invece:

$$\tau_A^{(1)} = \frac{M_A^{(1)}}{I_A^{(1)}} = \theta' \cdot G \cdot \frac{a \cdot s^3}{3} \cdot \frac{3}{a \cdot s^2} = 0,028 \text{ Pa}$$

Lo stato tensionale globale è rappresentato in figura.

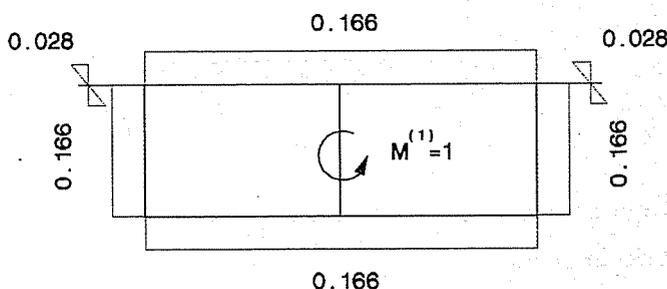


Fig. 5.11

I.g) - *Determinazione delle tensioni tangenziali secondarie.*

Atteso che per ragioni di simmetria la sezione si comporta come biconnessa, la si rende provvisoriamente monoconnessa introducendo le consuete sconessioni e, sempre con le medesime convenzioni positive, vengono determinati i due addendi di cui si compone il flusso tangenziale secondario, con riferimento alla funzione  $\lambda(c)$  già definita.

*Termine:*  $I_\lambda(c)$

Tale funzione risulta parabolica ovunque, per essere in tutti i tratti  $\lambda(c)$  lineare. Adottando, per comodità, riferimenti locali  $\xi$ , per ogni tratto, aventi origine nel primo nodo o gomito delle maglie che si incontra seguendo il verso di percorrenza levogiro, o nell'estremo libero degli sbalzi, e prendendo in esame, per la simmetria esistente, solo metà della sezione, risulta:

Nel tratto *OB*:

$$\lambda(\xi) = -\frac{1,29}{3} \cdot \xi = -0,43 \cdot \xi \quad I_\lambda(\xi) = -0,215 \cdot \xi \cdot s$$

Nel tratto *BA*:

$$\lambda(\xi) = -0,22 - 1,07 \cdot \xi \quad I_\lambda(\xi) = (-0,22 \cdot \xi - 0,53 \cdot \xi^2) \cdot s$$

Nel tratto  $BF$ :

$$\lambda(\xi) = -1,29 + 1,5 \cdot \xi \qquad I_\lambda(\xi) = (-2,69 - 1,29 \cdot \xi + 0,75 \cdot \xi^2) \cdot s$$

Nel tratto  $FH$ :

$$\lambda(\xi) = 1,71 - 0,57 \cdot \xi \qquad I_\lambda(\xi) = (-2,27 + 1,71 \cdot \xi - 2,85 \cdot \xi^2) \cdot s$$

Il diagramma di  $I_\lambda(c)$  ed i valori notevoli da esso assunti sono riportati in figura.

$$I_\lambda(O) = I_\lambda(A) = 0$$

$$I_\lambda(B \rightarrow O) = -1,935 \cdot s \text{ m}^4$$

$$I_\lambda(B \rightarrow A) = -0,755 \cdot s \text{ m}^4$$

$$I_\lambda(B \rightarrow F) = -2,690 \cdot s \text{ m}^4$$

$$I_\lambda(V) = -3,240 \cdot s \text{ m}^4$$

$$I_\lambda(F) = -2,270 \cdot s \text{ m}^4$$

$$I_\lambda(H) = +0,290 \cdot s \text{ m}^4$$

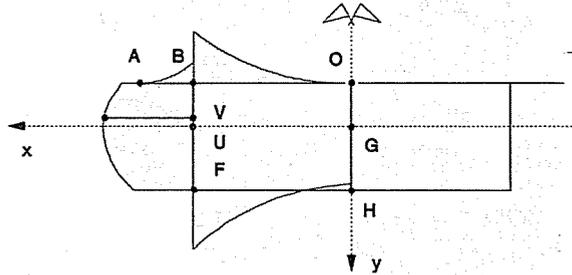


Fig. 5.12

$$\text{Termine: } \int_A \frac{h(c)}{H} \cdot dI_\lambda(c) = \frac{1}{H} \cdot \int_A h(c) \cdot \lambda(c) \cdot dA = \frac{s}{C} \cdot \int_C \lambda(c) \cdot c \cdot dc$$

Valutando per i singoli tratti la funzione  $\lambda(c)$  e l'integrale della funzione prodotto, si ha:

Nel tratto  $OB$ :

$$\lambda(c) = -\frac{1,29}{3} \cdot c \qquad \int_0^3 -0,43 \cdot c^2 \cdot dc = -3,87 \text{ m}^4$$

Nel tratto  $BF$ :

$$\lambda(c) = 1,5 \cdot c - 5,79 \qquad \int_3^5 (1,5 \cdot c^2 - 5,79 \cdot c) \cdot dc = 2,68 \text{ m}^4$$

Nel tratto  $FI$ :

$$\lambda(c) = -\frac{3,42}{6} \cdot c + 4,56 \qquad \int_5^{11} (-0,57 \cdot c^2 + 4,56 \cdot c) \cdot dc = -10,2 \text{ m}^4$$

Nel tratto  $ID$ :

$$\lambda(c) = 1,5 \cdot c - 18,21 \qquad \int_{11}^{13} (1,5 \cdot c^2 - 18,21 \cdot c) \cdot dc = -4,04 \text{ m}^4$$

Nel tratto  $DO$ :

$$\lambda(c) = -\frac{1,29}{3} \cdot c + 6,88 \quad \int_{13}^{16} (-0,43 \cdot c^2 + 6,88 \cdot c) \cdot dc = 27,09 \text{ m}^4$$

da cui:  $\int_A \frac{h}{H} \cdot dI_\lambda = \frac{s}{16} \cdot (-3,87 + 2,68 - 10,2 - 4,04 + 27,09) = 0,729 \cdot s \text{ m}^4$

La funzione  $\tau^{(2)}(c)$  presenta, in definitiva, l'espressione:

$$\tau^{(2)}(c) = \frac{E \cdot \theta'''}{s} \cdot \left( I_\lambda(c) + \int_A \frac{h}{H} \cdot dI_\lambda \right) = E \cdot \theta''' \cdot \frac{I^{(2)}(c)}{s} = E \cdot \theta''' \cdot \left( \frac{I_\lambda(c)}{s} + 0,729 \right)$$

In figura sono riportati la distribuzione ed i valori notevoli della funzione  $\tau^{(2)}(c)$  a meno del fattore  $E \cdot \theta'''$ , ovvero i valori di  $I^{(2)}(c)/s$ .

$$\begin{aligned} \tau^{(2)}(O) &= +0,729 \cdot E \cdot \theta''' \text{ Pa} \\ \tau^{(2)}(B \rightarrow O) &= -1,206 \cdot E \cdot \theta''' \text{ Pa} \\ \tau^{(2)}(B \rightarrow A) &= -0,755 \cdot E \cdot \theta''' \text{ Pa} \\ \tau^{(2)}(B \rightarrow F) &= -1,960 \cdot E \cdot \theta''' \text{ Pa} \\ \tau^{(2)}(V) &= -2,511 \cdot E \cdot \theta''' \text{ Pa} \\ \tau^{(2)}(F) &= -1,640 \cdot E \cdot \theta''' \text{ Pa} \\ \tau^{(2)}(H) &= +1,018 \cdot E \cdot \theta''' \text{ Pa} \end{aligned}$$

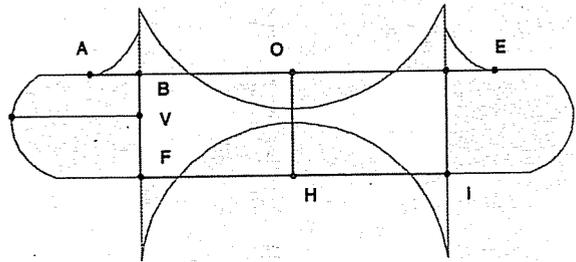


Fig. 5.13

## II) - Analisi della trave

II.a) - Condizione di carico unitario torcente  $m_z = 1 \text{ Nm/m}$ .

In generale occorre applicare ad entrambe le campate l'equazione fondamentale che si scrive:

$$k^{(2)} \cdot \theta'''(z) - k^{(1)} \cdot \theta''(z) = m_z = 1$$

ovvero:

$$\theta'''(z) - \alpha^2 \cdot \theta''(z) = \frac{I}{E \cdot I_{\lambda\lambda}} \quad \text{con} \quad \alpha^2 = \frac{k^{(1)}}{k^{(2)}}$$

il cui integrale generale ha la forma:

$$\theta(z) = A \cdot sh \alpha z + B \cdot ch \alpha z + C \cdot z + D + \bar{\theta}$$

ed il cui integrale particolare vale:

$$\bar{\theta}(z) = -\frac{m_z}{\alpha^2 \cdot k^{(2)}} \cdot \frac{z^2}{2} = -\frac{1}{k^{(1)}} \cdot \frac{z^2}{2}$$

Le otto condizioni ai limiti che determinano i valori delle costanti, in considerazione dei vincoli esistenti, si scrivono:

$$\begin{aligned} \theta(P) &= 0 & ; & \theta''(P) = 0 \\ \theta(Q)_s &= 0 & ; & \theta(Q)_d = 0 \\ \theta'(Q)_s &= \theta'(Q)_d & ; & \theta''(Q)_s = \theta''(Q)_d \\ \theta(R) &= 0 & ; & \theta''(R) = 0 \end{aligned}$$

Data la simmetria della struttura, dovendo essere nulli gli ingobbamenti nella sezione  $Q$ , lo studio si può ridurre a quello di una sola campata, ad esempio la  $PQ$ , vincolata con un appoggio torsionale nell'estremo  $P$  e con un incastro torsionale in  $Q$ .

Con tale semplificazione le condizioni ai limiti divengono:

$$\begin{aligned} \theta(P) &= \theta(0) = 0 \\ \theta''(P) &= \theta''(0) = 0 \\ \theta(Q) &= \theta(L) = 0 \\ \theta'(Q) &= \theta'(L) = 0 \end{aligned}$$

e consentono di determinare, con semplici passaggi che per brevità si omettono, i valori delle costanti di integrazione:

$$A = \frac{1}{k^{(1)} \cdot \alpha^2} \cdot \left( -th \frac{\alpha L}{2} + \frac{\frac{\alpha L}{2} - th \frac{\alpha L}{2}}{\frac{1}{th \alpha L} - \frac{1}{\alpha L}} \cdot \frac{1}{sh \alpha L} \right)$$

$$B = \frac{1}{k^{(1)} \cdot \alpha^2}$$

$$C = \frac{1}{k^{(1)} \cdot \alpha^2} \cdot \left( \frac{\alpha^2 L}{2} - \frac{1}{L} \cdot \frac{\frac{\alpha L}{2} - th \frac{\alpha L}{2}}{\frac{1}{th \alpha L} - \frac{1}{\alpha L}} \right)$$

$$D = -\frac{1}{k^{(1)} \cdot \alpha^2}$$

II.b) - *Determinazione delle rigidezze torsionali.**Momento d'inerzia secondario*

Adottando il sistema di riferimento locale di ascisse  $\xi$ , già utilizzato per la determinazione delle tensioni tangenziali secondarie, essendo:

$$I_{\lambda\lambda} = \int_A \lambda^2 \cdot dA = s \cdot \int_C \lambda^2(c) \cdot dc = s \cdot \sum_i \int_{C_i} \lambda^2(\xi) \cdot d\xi$$

risulta:

Tratto	$\lambda^2(\xi)$	$I_{\lambda\lambda}/s$
OB	$0,18 \xi^2$	1,664
BA	$(-1,07 \cdot \xi - 0,22)^2$	0,664
BF	$(1,5 \cdot \xi - 1,29)^2$	1,588
FH	$(-0,57 \cdot \xi + 1,71)^2$	2,944

da cui:

$$I_{\lambda\lambda} = 2 \cdot 0,25 \cdot (1,664 + 0,664 + 1,588 + 2,944) = 3,42 \text{ m}^6$$

*Rigidezza torsionale primaria:*

$$k^{(1)} = G \cdot I^* = G \cdot \left( 2 \cdot \frac{a \cdot s^2}{3} \cdot \beta + \frac{\Omega^2}{H} \right) = 1,4 \cdot 10^4 \cdot \left( 2 \cdot \frac{0,25^2}{3} \cdot 0,843 + 24^2 \cdot \frac{0,25}{16} \right) =$$

$$= 1,26 \cdot 10^5 \text{ MNm}^2$$

*Rigidezza torsionale secondaria:*

$$k^{(2)} = E \cdot I_{\lambda\lambda} = 3,1 \cdot 10^4 \cdot 3,42 = 1,06 \cdot 10^5 \text{ MNm}^4$$

*Lunghezza caratteristica inversa:*

$$\alpha = 1,09 \text{ m}^{-1}$$

*Lunghezza caratteristica inversa adimensionalizzata:*

$$\alpha L = 21,80$$

*Determinazione delle caratteristiche torcenti della sollecitazione interna.*

Noti i valori di  $\alpha$ ,  $\alpha L$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  è possibile ricavare l'espressione di  $\theta(z)$  e delle sue derivate e quindi le funzioni momento torcente primario, bimomento, momento torcente secondario.

I risultati, ricavati tramite elaboratore elettronico, vengono diagrammati e tabellati di seguito: i valori recano le inevitabili imprecisioni dovute alle approssimazioni di calcolo, ed esprimono le ascisse  $z$  in  $m$ , i momenti torcenti in  $Nm$  ed i bimomenti in  $Nm^2$ .

Si può osservare che, dato l'elevato valore di  $\alpha L$ , legato essenzialmente al fatto che la sezione è pluriconnessa, la torsione viene assorbita pressoché per l'intera lunghezza della trave come stato tensionale primario, mentre lo stato tensionale secondario si fa sentire, ed anche in maniera non trascurabile, in prossimità del vincolo che impedisce l'ingobbamento.

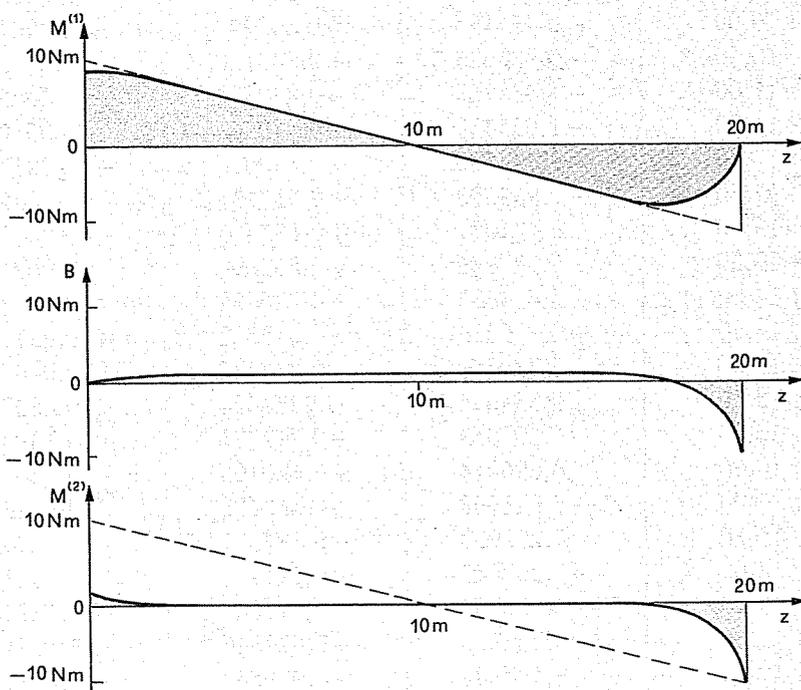


Fig. 5.14

$z$	$M^{(1)}(z)$	$B(z)$	$M^{(2)}(z)$
+ 0,00	+ 8,646883	+ 0,000000	+ 0,916758
+ 0,50	+ 8,532279	+ 0,353315	+ 0,531362
+ 1,00	+ 8,255659	+ 0,558100	+ 0,307983
+ 1,50	+ 7,885131	+ 0,676795	+ 0,178510
+ 2,00	+ 7,460175	+ 0,745592	+ 0,103466
+ 2,50	+ 7,003671	+ 0,785468	+ 0,059970
+ 3,00	+ 6,528882	+ 0,808580	+ 0,034759
+ 3,50	+ 6,043495	+ 0,821976	+ 0,020147
+ 4,00	+ 5,551964	+ 0,829740	+ 0,011677
+ 4,50	+ 5,056874	+ 0,834241	+ 0,006768
+ 5,00	+ 4,559719	+ 0,836849	+ 0,003922
+ 5,50	+ 4,061369	+ 0,838360	+ 0,002272
+ 6,00	+ 3,562326	+ 0,839235	+ 0,001315
+ 6,50	+ 3,062882	+ 0,839742	+ 0,000759
+ 7,00	+ 2,563206	+ 0,840033	+ 0,000435
+ 7,50	+ 2,063398	+ 0,840199	+ 0,000244
+ 8,00	+ 1,563515	+ 0,840289	+ 0,000126
+ 8,50	+ 1,063594	+ 0,840331	+ 0,000047
+ 9,00	+ 0,563659	+ 0,840338	- 0,000017
+ 9,50	+ 0,063728	+ 0,840313	- 0,000087
+ 10,00	- 0,436175	+ 0,840247	- 0,000183
+ 10,50	- 0,936023	+ 0,840120	- 0,000336
+ 11,00	- 1,435768	+ 0,839894	- 0,000590
+ 11,50	- 1,935333	+ 0,839500	- 0,001025
+ 12,00	- 2,434586	+ 0,838817	- 0,001773
+ 12,50	- 2,933298	+ 0,837638	- 0,003060
+ 13,00	- 3,431077	+ 0,835603	- 0,005281
+ 13,50	- 3,927246	+ 0,832091	- 0,009112
+ 14,00	- 4,420637	+ 0,826032	- 0,015722
+ 14,50	- 4,909233	+ 0,815578	- 0,027125
+ 15,00	- 5,289559	+ 0,797542	- 0,046799
+ 15,50	- 5,855616	+ 0,766424	- 0,080743
+ 16,00	- 6,297053	+ 0,712736	- 0,139306
+ 16,50	- 6,696014	+ 0,620108	- 0,240344
+ 17,00	- 7,021693	+ 0,460298	- 0,414666
+ 17,50	- 7,220937	+ 0,184577	- 0,715422
+ 18,00	- 7,202042	- 0,291124	- 1,234316
+ 18,50	- 6,806795	- 1,111849	- 2,129564
+ 19,00	- 5,762226	- 2,527846	- 3,674133
+ 19,50	- 3,597383	- 4,970863	- 6,338975
+ 20,00	+ 0,500265	- 9,185795	- 10,936624

III) - *Verifica della sezione P*

Le caratteristiche della sollecitazione assumono i valori:

$$M_y(0) = 0$$

$$T_y(0) = -7,50 \text{ N}$$

$$M^{(1)}(0) \approx 9 \text{ Nm}$$

$$B(0) = 0$$

$$M^{(2)}(0) \approx 1$$

La sezione risulta sollecitata da sole tensioni tangenziali che, in corrispondenza dell'asse neutro, attingono i valori estremi:

$$\tau_{min}^{(0)} = 0,699 \cdot T_y = -5,24 \text{ Pa}$$

$$\tau_{min}^{(1)} = 0,166 \cdot M^{(1)} \approx -1,49 \text{ Pa}$$

$$\tau_{min}^{(2)} = 0,734 \cdot M^{(2)} \approx -0,73 \text{ Pa}$$

da cui:

$$\tau_{min} \approx -7,46 \text{ Pa}$$

IV) - *Verifica della sezione Q*

Le caratteristiche della sollecitazione valgono:

$$M_y(L) = -50 \text{ Nm}$$

$$T_y(L) = 12,50 \text{ N}$$

$$M^{(1)}(L) \approx 0 \text{ Nm}$$

$$B(L) = -9,19 \text{ Nm}^2$$

$$M^{(2)}(L) \approx -10 \text{ Nm}$$

Le tensioni normali assumono, sui bordi della soletta e della controsoletta in corrispondenza delle nervature estreme, i valori estremi:

$$\sigma_{max}^{(1)} = + \frac{50}{3,97} \cdot 1,025 = + 12,91 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{max}^{(2)} = + \frac{9,19}{3,42} \cdot 1,29 = + 3,47 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{min}^{(1)} = - \frac{50}{3,97} \cdot 1,225 = - 15,43 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{min}^{(2)} = - \frac{9,19}{3,42} \cdot 1,71 = - 4,60 \text{ Pa}$$

da cui:

$$\sigma_{max} = +16,38 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{min} = -20,03 \text{ Pa}$$

Le tensioni tangenziali attingono, invece, i massimi valori sulle nervature di estremità, in prossimità dell'asse neutro, ove si può assumere:

$$\tau_{max}^{(0)} = 0,669 \cdot T_y = 0,669 \cdot 12,50 = 8,36 \text{ Pa}$$

$$\tau_{max}^{(2)} = \frac{M^{(2)} \cdot I^{(2)}}{I_{\lambda\lambda} \cdot s} = \frac{10}{3,42} \cdot 2,511 = 7,34 \text{ Pa}$$

da cui:

$$\tau_{max} = 15,70 \text{ Pa}$$

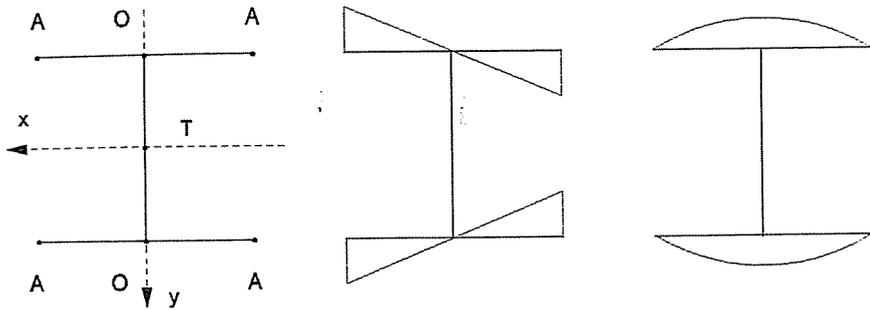
## Appendice

Ai fini tecnico-applicativi si riportano alcuni valori notevoli delle caratteristiche geometriche relative ai profilati a caldo di uso più frequente, particolarmente significative per il calcolo dello stato tensionale secondario, tratte da [31].

L'utilità pratica che se ne può ricavare è sinteticamente ricordata di seguito, con riferimento alle figure delle tabelle ed avendo ben presente che, trattandosi di sezioni monoconnesse, la distanza areale si riduce all'area settoriale.

	<i>Grandezza tabellata</i>	<i>Grandezza calcolabile</i>
$x_T$	ascissa del centro di taglio	
$\omega(A)$	area settoriale in $A$ (massimo)	$w(A), \epsilon^{(2)}(A), \sigma^{(2)}(A)$
$\omega(C)$	area settoriale in $C$	$w(C), \epsilon^{(2)}(C), \sigma^{(2)}(C)$
$I_\omega(O)$	momento statico settoriale in $O$ (massimo)	$\tau^{(2)}(O)$
$I_\omega(B)$	momento statico settoriale in $B$ (minimo)	$\tau^{(2)}(B)$
$I_\omega(C)$	momento statico settoriale in $C$	$\tau^{(2)}(C)$
$I_{\omega\omega}$	momento d'inerzia secondario	$k^{(2)}$
$I^*$	momento d'inerzia primario	$k^{(1)}$
$\alpha$	lunghezza caratteristica inversa	$\alpha L$

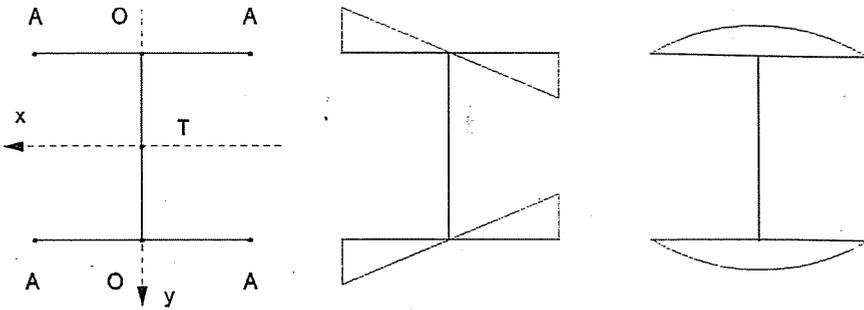
Tabella I - TRAVI IPE UNI 5398-64



Designaz. Profilo	$\omega(A)$ (cm <sup>2</sup> )	$I_{\omega}(O)$ (cm <sup>4</sup> )	$I_{\omega\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	$I^*$ (cm <sup>4</sup> )	$\alpha$ (cm <sup>-1</sup> )	$I_{\omega\omega}/\omega(A)$ (cm <sup>4</sup> )
IPE 80	8,602	5,143	118,754	0,601	0,0441	13,805
IPE 100	12,966	10,162	353,476	1,031	0,0335	27,261
IPE 120	18,192	18,337	895,242	1,512	0,0255	49,210
IPE 140	24,290	30,588	1988,57	2,153	0,0204	81,865
IPE 160	31,283	47,456	3976,21	3,156	0,0175	127,104
IPE 180	39,130	71,216	7469,96	4,228	0,0147	190,901
IPE 200	47,875	101,734	13018,6	6,130	0,0134	271,929
IPE 220	57,970	146,664	22773,7	7,979	0,0116	392,854
IPE 240	69,060	203,036	37624,3	11,225	0,0107	544,806
IPE 270	87,682	301,847	70870,8	14,045	0,0087	808,266
IPE 300	108,487	435,306	126378	17,880	0,0074	1164,91
IPE 330	127,400	586,040	199841	24,758	0,0069	1568,61
IPE 360	147,602	796,684	314509	33,101	0,0064	2130,79
IPE 400	173,925	1056,59	492214	44,922	0,0059	2830,04
IPE 450	206,815	1434,26	794311	59,170	0,0053	3840,69
IPE 500	242,000	1936,00	1254440	79,353	0,0049	5183,62
IPE 550	279,720	2525,85	1893450	108,881	0,0047	6769,09
IPE 600	319,550	3339,30	2858297	146,525	0,0044	8944,76

Tabella II - TRAVI HE ad ali larghe e parallele

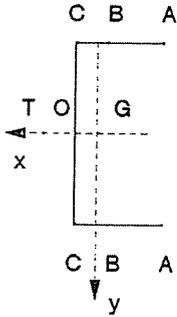
UNI 5397-64



Designaz. Profilo	$\omega$ (cm <sup>2</sup> )	$I_{\omega}(O)$ (cm <sup>4</sup> )	$I_{\omega\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	$I^*$ (cm <sup>4</sup> )	$\alpha$ (cm <sup>-1</sup> )	$I_{\omega\omega}/\omega(A)$ (cm <sup>4</sup> )
HE 100 A	22,000	44,000	2594,24	4,532	0,0259	117,920
B	22,500	56,250	3381,75	7,909	0,0300	150,300
M	26,500	140,450	9975,00	51,940	0,0447	376,415
HE 120 A	31,800	76,320	6488,79	5,290	0,0177	204,050
B	32,700	107,910	9445,39	12,005	0,0221	288,850
M	37,485	247,963	24887,9	72,102	0,0334	663,944
HE 140 A	43,575	129,635	15074,0	7,259	0,0136	345,932
B	44,800	188,160	22528,0	17,576	0,0173	502,857
M	50,370	404,471	54465,8	96,686	0,0261	1081,31
HE 160 A	57,200	205,920	31491,5	10,735	0,0114	550,550
B	58,800	305,760	48026,0	27,453	0,0148	816,768
M	65,155	621,904	108394,0	133,363	0,0217	1663,63
HE 180 A	72,675	310,685	60315,2	13,276	0,0092	829,93
B	74,700	470,610	93897,1	37,336	0,0124	1256,99
M	81,840	913,334	199795,0	169,192	0,0180	2441,29
HE 200 A	90,000	450,000	108216,0	18,538	0,0081	1202,40
B	92,500	693,750	171382,0	52,504	0,0108	1852,77
M	100,425	1292,971	347073,2	217,638	0,0155	3456,04
HE 220 A	109,450	662,172	193550	25,537	0,0071	1768,39
B	112,200	987,360	295786	68,192	0,0094	2336,23
M	120,910	1776,167	573824	266,946	0,0134	4745,88
HE 240 A	130,800	941,76	328985	37,066	0,0066	2515,17
B	133,800	1364,76	487717	91,431	0,0085	3645,12
M	147,560	2927,59	1154546	518,075	0,0131	7824,25

Designaz. Profilo	$\omega$ (cm <sup>2</sup> )	$I_{\omega}(O)$ (cm <sup>4</sup> )	$I_{\omega\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	$I^*$ (cm <sup>4</sup> )	$\alpha$ (cm <sup>-1</sup> )	$I_{\omega\omega}/\omega(A)$ (cm <sup>4</sup> )
HE 260 A	154,375	1254,30	517245	46,552	0,0059	3350,58
B	157,625	1792,98	754925	110,424	0,0075	4806,16
M	172,525	3756,73	1732085	598,516	0,0115	10039,62
HE 280 A	179,900	1637,09	786478	55,474	0,0052	4371,75
B	183,400	2310,84	1131768	128,846	0,0066	6171,03
M	199,440	4738,69	2524959	679,769	0,0102	12660,25
HE 300 A	207,000	2173,50	1201676	75,715	0,0049	5805,20
B	210,750	3003,19	1690357	165,689	0,0061	8020,68
M	233,275	7050,74	4394828	1160,967	0,0101	18839,69
HE 320 A	220,875	2567,67	1514527	97,010	0,0050	6856,94
B	224,625	3453,61	2071851	201,011	0,0061	9223,60
M	246,427	7614,61	5014019	1228,380	0,0097	20346,83
HE 340 A	235,125	2909,67	1827067	114,452	0,0049	7770,62
B	238,875	3851,86	2457438	229,056	0,0060	10287,5
M	260,332	8044,27	5596396	1233,937	0,0092	21497,1
HE 360 A	249,375	3273,05	2179893	133,919	0,0049	8741,42
B	253,125	4271,48	2887808	259,617	0,0059	11408,6
M	273,350	8419,18	6150650	1235,227	0,0088	22501,0
HE 400 A	278,250	3965,06	2946894	169,682	0,0047	10590,8
B	282,000	5076,00	3823867	314,359	0,0056	13559,8
M	330,860	9236,40	7427733	1242,382	0,0080	24688,3
HE 450 A	314,250	4949,44	4154212	218,074	0,0045	13219,4
B	318,000	6201,00	5267886	386,012	0,0053	16565,7
M	336,164	10320,26	9275178	1256,582	0,0072	27591,1
HE 500 A	350,250	6041,81	5652322	274,685	0,0043	16137,9
B	354,000	7434,00	7031063	467,221	0,0050	19862,0
M	370,259	11329,96	11217934	1266,516	0,0066	30297,4
HE 550 A	387,000	6966,00	7201559	311,191	0,0041	18608,7
B	390,750	8498,81	8874085	519,144	0,0047	22710,4
M	406,980	12453,59	13555434	1281,333	0,0060	33307,4
HE 600 A	423,750	7945,31	8994962	350,973	0,0039	21277,0
B	427,500	9618,75	10989742	575,000	0,0045	25707,0
M	442,250	13488,62	15957975	1291,884	0,0056	36083,6

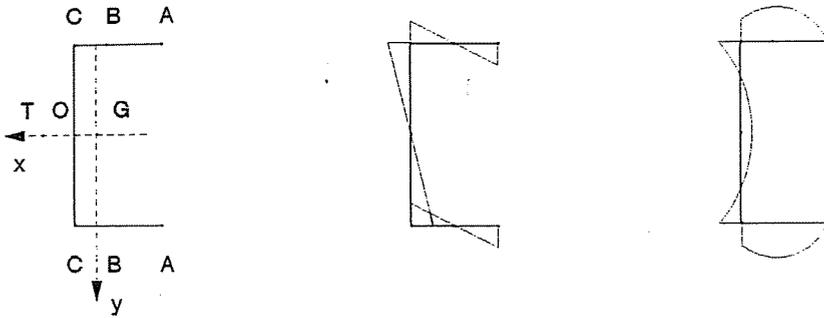
Tabella III - PROFILATI AD U Serie normale  
 UNI 5786-66 (< 80 mm)      UNI 5680-65 (≥ 80 mm)



Designaz. Profilo	$x_T$ (cm)	$\omega(A)$ (cm <sup>2</sup> )	$\omega(C)$ (cm <sup>2</sup> )	$I_{\omega}(A)$ (cm <sup>4</sup> )	$I_{\omega}(C)$ (cm <sup>4</sup> )	$I_{\omega}(O)$ (cm <sup>4</sup> )	$I_{\omega\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	$I^*$ (cm <sup>4</sup> )	$\alpha$ (cm <sup>-1</sup> )
30	1,309	1,808	1,600	1,096	0,308	- 0,154	5,921	0,855	0,2358
40	1,449	2,970	2,392	1,871	0,657	- 0,328	14,883	0,943	0,1561
50	1,551	4,298	3,334	3,007	1,196	- 0,596	33,763	1,111	0,1125
65	1,664	6,499	4,785	5,509	2,522	- 1,261	91,277	1,515	0,0799
80	1,729	8,894	6,225	8,789	4,482	- 2,241	196,538	2,082	0,0638
100	1,912	12,754	8,740	15,112	8,004	- 4,002	477,99	2,771	0,0467
120	2,012	17,412	11,170	24,582	14,465	- 7,232	1039,22	4,009	0,0385
140	2,227	22,248	14,470	38,070	21,955	- 10,977	2073,49	5,489	0,0319
160	2,372	28,040	17,737	55,250	33,147	- 16,573	3750,25	7,145	0,0271
180	2,518	34,489	21,280	77,420	47,951	- 23,975	6408,83	9,152	0,0234
200	2,003	41,579	25,102	105,475	67,033	- 33,516	10436,18	11,558	0,0206
220	2,838	48,870	29,452	143,925	91,670	- 45,835	16744,84	15,531	0,0189
240	2,984	57,211	33,872	187,449	121,742	- 60,871	25381,18	19,061	0,0170

Tabella IV - PROFILATI AD U Serie normale rinforzata

UNI 1086-1087



Designaz. Profilo	$x_T$ (cm)	$\omega(A)$ (cm <sup>2</sup> )	$\omega(C)$ (cm <sup>2</sup> )	$I_{\omega}(A)$ (cm <sup>4</sup> )	$I_{\omega}(C)$ (cm <sup>4</sup> )	$I_{\omega}(O)$ (cm <sup>4</sup> )	$I_{\omega\omega}$ (cm <sup>6</sup> )	$I^*$ (cm <sup>4</sup> )	$\alpha$ (cm <sup>-1</sup> )
140 × 8	2,185	22,844	14,205	40,144	24,022	-12,311	2215,77	6,414	0,0334
140 × 9	2,146	23,420	13,954	42,192	27,212	-13,606	2357,35	7,250	0,0350
160 × 8,5	2,327	28,761	17,396	58,099	36,844	-18,422	3990,84	8,323	0,0287
160 × 9,5	2,284	29,451	17,080	80,920	40,430	-20,215	4229,82	9,724	0,0297
180 × 9	2,469	35,327	20,865	81,231	52,893	-26,446	6793,64	10,625	0,0245
180 × 10	2,423	36,134	20,480	84,987	57,686	-28,843	7181,26	12,366	0,0257
200 × 9,5	2,811	42,541	24,611	110,410	73,455	-36,727	11036,9	13,368	0,0216
200 × 10,5	2,562	43,469	24,155	115,278	79,682	-39,841	11624,9	13,497	0,0226
220 × 10	2,785	49,469	28,903	150,282	99,956	-49,978	17650,5	17,777	0,0197
220 × 11	2,736	50,978	28,390	156,555	108,000	-54,000	18547,2	20,397	0,0206
240 × 10,5	2,929	58,406	33,244	195,360	132,065	-66,032	26679,2	21,747	0,0177
240 × 11,5	2,877	59,561	32,657	203,164	142,086	-71,043	27963,7	24,864	0,0185

## Bibliografia

- [1] S.P. Timoshenko, «On the stability in plane bending of a I beam», *Bull. Polyt. Inst. St. Petersburg*, 1905.
- [2] C. Weber, «Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppel-flanschigem Querschnitt», *Zeitschrift Angewandte Math. und Mech.*, vol. 6, 1926.
- [3] H. Wagner, «Verdrehung und Knickung von offenen Profilen», *Festschrift 25 Jahre T. Hochschule*, Danzig 1929.
- [4] F. & H. Bleich, «Biegung, Drillung und Knickung von Staben aus dünnen Wänden», *IABSE*, Berlin 1936.
- [5] V.Z. Vlassov, «Torsion et stabilité des tiges a parois mince et a profil ouvert», *Industrie de la Costruction*, 1937.
- [6] R. Kappus, «Drehknicken zentrisch gedruckter Stabe mit offenem Profil im elastischen Bereich» *Luftfahrtforschung*, vol. 14, 1937.
- [7] P. Cicala, «Sul calcolo dei solidi cilindrici in parete sottile», *L'Aero-tecnica* I, II, III, 1940.
- [8] Karman & Christensen, «Methods of analysis for torsion with variable twist», *Journal of the aeronautical sciences*, vol. 11, 1944.
- [9] S.P. Timoshenko, «Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open cross section», *Journal Franklin Institute*, vol. 239, 1945.
- [10] Karman & Wei Zang Chien, «Torsion with variable twist», *Journal of the aeronautical sciences*, vol. 13, 1946.
- [11] V.Z. Vlassov, *Thin-walled elastic beams* (English translation), National Science Foundation, Washington D.C. London, Oldbourne Press, 1961.
- [12] G. Krall, «Sulla stabilità dell'equilibrio di barre in profilato sottile», *Rend. Accademia Lincei*, vol. 32 e 33, 1962.
- [13] A. Raithel, «La sollecitazione di torsione semplice delle travi a parete sottile», *Giorn. Genio Civile* n. 10, 1963.
- [14] P. Matildi, «Sulla torsione non uniforme di travi a sezione aperta in parete sottile», *Costruzioni Metalliche* n. 5, 1963.
- [15] M. Capurso, «Sul calcolo delle travi di parete sottile in presenza di forze e distorsioni», *CNR, Ric. Sci.* 34 (II A), vol. 6 e 7, 1964.
- [16] M. Como, «Equilibri instabili nelle travi di sezione aperta sottile sog-

gette a distribuzioni di forze e distorsioni», *CNR, Ric. Sci.* 34 (II A), vol. 6 e 7, 1964.

[17] A. Sollazzo, «Sulla torsione non uniforme di travi a sezione aperta torsionalmente iperstatiche», *Atti Ist. Scienza Costr.*, Trieste 1964.

[18] Z. Bazant, «Non uniform torsion of thin-walled bars of variable section», *IABSE*, vol. 25, 1965.

[19] V. Franciosi, «Le travi a sezione sottile», *Rendic. Corso perfezionamento costruzioni in c.a.*, Tamburini, Milano 1965.

[20] A. Migliacci, «Sul problema della torsione di travi continue con sezione aperta di piccolo spessore», *Rivista di Ingegneria*, n. 10, 1965.

[21] Giangreco, Capurso, Como, «Static and stability of thin-walled elastic beams», *CNR & EOAR*, AF 61 (052) 813, 1966.

[22] V. Franciosi, *Scienza delle costruzioni*, vol. II, Liguori, Napoli 1967.

[23] F. Maceri, «On the torsion of thin-walled multicell sections», *Mecchanica* n. 4, vol. II, 1967.

[24] Zbirohowsk-Koscia, *Thin-walled beams*, Crosby Lockwood & S., London 1967.

[25] G. Del Piero, «Thin-walled beams with open, deformable cross section», *Atti Ist. Scienza Costr.*, Pisa 1968.

[26] Kollbrunner & Basler, *Torsion in structures*, Springer & Verlag, Berlin 1969.

[27] G. Del Piero, N. Gucci, «Indagine sperimentale sulla distribuzione delle tensioni normali in una trave a I soggetta a torsione non uniforme», *Atti Ist. Scienza Costr.*, Pisa 1969.

[28] J. Courbon, *Resistance des materiaux*, Dunod, Paris 1971.

[29] M. D'Apuzzo, «Estensione della teoria delle distanze areali alle sezioni sottili pluriconnesse», *Atti Ist. Costr. Ponti*, Napoli 1971.

[30] Timoshenko & Gere, *Mechanics of materials*, Van Nostrand, New York 1972.

[31] F.M. Mazzolani, *La torsione nei profilati e nelle travi metalliche*, Italsider, Genova 1972.

[32] P. Pozzati, *Teoria e tecnica delle strutture*, vol. II, UTET, Torino 1977.

[33] Rhordes & Walker, *Thin-walled structures*, Granada Publishing, London 1980.

[34] N.W. Murray, *Introduction to the theory of thin-walled structures*, Clarendon Press, Oxford 1986.

[35] H. Steup, *Stabilitätstheorie im Bauwesen*, Ernst & Sohn, Berlin 1990.