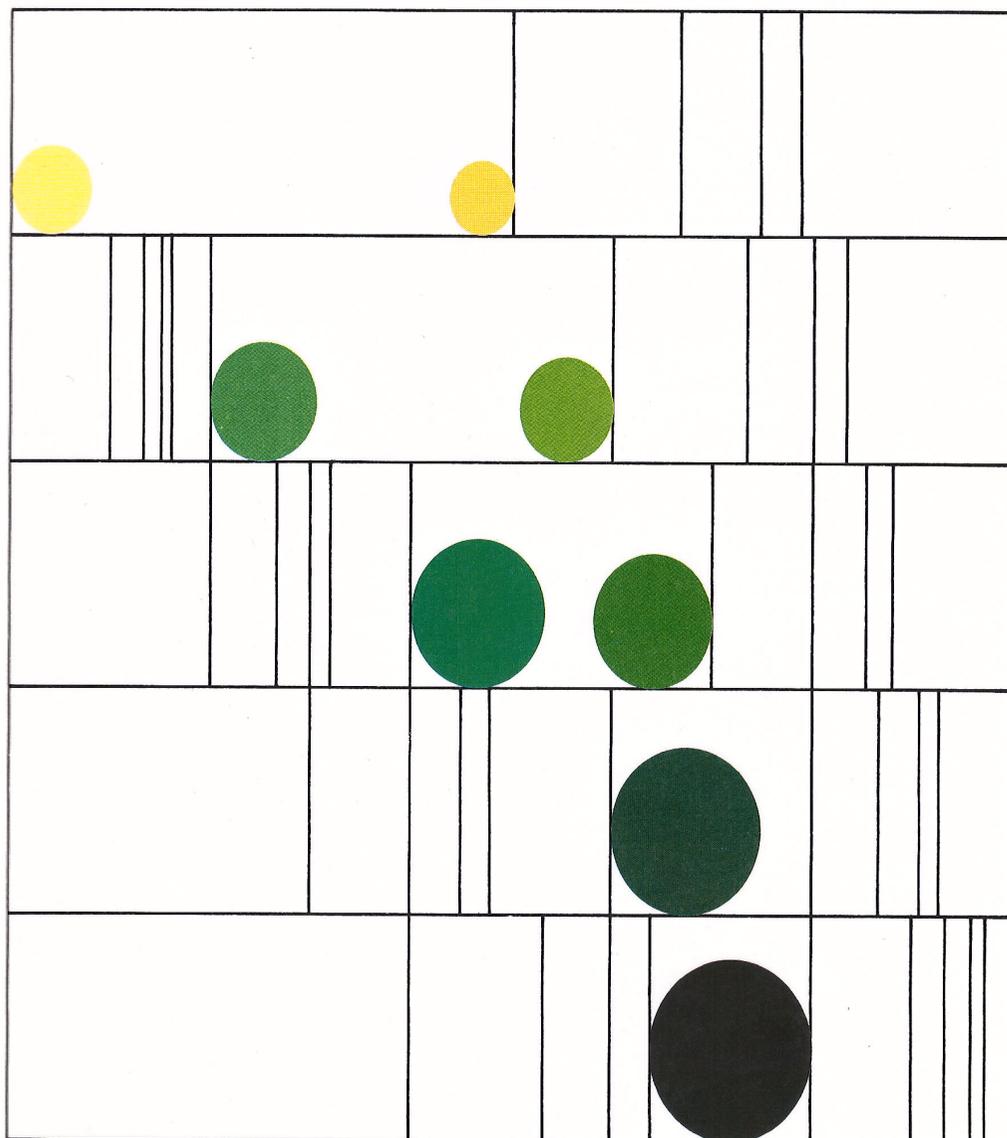


ALDO RAITHEL - NICOLA AUGENTI - GIULIO NICOLOSI

# Equilibrio e stabilità delle strutture elastiche



**E.S.A.C.**

Edizioni Scientifiche  
A. Cremonese - Roma

CAPITOLO 7

**L'ENERGIA POTENZIALE TOTALE**

(Aldo Raithel e Nicola Augenti)

### 7.1. Premessa

In coerenza col discorso preliminare svolto nelle considerazioni relative all'equilibrio dei sistemi, ed ai bilanci energetici richiesti per la identificazione delle configurazioni di equilibrio, si sono costruite e discusse, in quanto precede, le quote di energia che consentono tali bilanci.

Entrambe tali quote sono risultate essere dei veri e propri potenziali e ciò essendosi considerata:

- nella formulazione di  $W$  una ipotesi di perfetta elasticità,
  - nella espressione di  $U$  la esistenza di sole forze conservative,
- ed essendosi mostrato come, nel caso di forze posizionali, sia ancora possibile esprimere nei loro riguardi un potenziale "ad hoc" che si suppone compreso in  $W$ .

Ciò stante, l'energia potenziale totale, che diremo brevemente E.P.T., e che indicheremo come nella (1.11):

$$T = W + U = W - Ff \quad (7.1)$$

risulta anch'essa definita come un potenziale. In conformità dei discorsi svolti in merito a  $W$  ed  $U$  il suo valore nella configurazione iniziale  $C_0$ , identificata dalla nullità del vettore  $Q$ , è quindi dato a meno di una costante.

### 7.2. Formulazione della E.P.T.

Ponendosi in una teoria di ordine generico, la E.P.T. verrà scritta:

$$T = W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)} + \dots - F(f^{(1)} + f^{(2)} + \dots) \quad (7.2)$$

e si penserà costruita, termine per termine, con le modalità indicate nei capitoli che precedono, e quindi nell'ambito di una teoria di prefissata accuratezza. In tal senso si ricorda che gli apici esprimono il grado di dipendenza dei singoli termini dalle lagrangiane  $Q_i$ ; ciascuno di detti ter-

mini trova, ovviamente, piena e diretta rispondenza nei dati del problema e precisamente:

- nelle caratteristiche elasto-geometriche della struttura se contenuto nella energia elastica  $W$ ;
- nella geometria strutturale e nella descrizione del vettore di carico se contenuto in  $U$ ;

in merito è a notarsi che i coefficienti della forma quadratica  $W^{(2)}$  costituiscono la usuale matrice delle rigidità.

Molti Autori invece di esprimere la E.P.T. nella forma (7.2), che dà conto delle modalità con cui va determinata, la pongono nella forma polinomiale:

$$T = \frac{1}{1!} T_i Q_i + \frac{1}{2!} T_{ik} Q_i Q_k + \frac{1}{3!} T_{ikl} Q_i Q_k Q_l + \dots \quad (7.3)$$

ovvero come sviluppo in serie di Mac Laurin di una E.P.T. genericamente nota. I coefficienti  $T_i, T_{ik}, T_{ikl} \dots$  vanno allora interpretati come le derivate, nell'origine, di  $T$  ed indirettamente dedotti dai termini che risultano invece già esplicitati nella (7.2).

Nonostante la invitante eleganza e compattezza della (7.3) questa non verrà utilizzata nel prosieguo ed è stata qui ricordata soltanto perché fa ormai parte della storia dell'argomento (Koiter, Thompson, Britvec, Chilver, Supple e quasi tutti i più recenti studiosi di equilibrio e stabilità). Fra i motivi che ne sconsigliano l'adozione vanno rilevati:

- la non immediata rispondenza ad un ordine della teoria nella quale si pensa di operare;
- la sua estrema genericità cui consegue la eventualità di considerare astratte possibilità matematiche, del tutto estranee al mondo fisico delle strutture;
- il suo prestarsi ad accogliere, proprio per la genericità della sua forma, sia esemplificazioni significative che altre, poco significative se non erronee, che in essa ricercano la loro convalida.

Tornando a questo punto alla (7.2) diremo che nella sua utilizzazione può darsi luogo ad arbitrari troncamenti; si generano allora teorie, che in altre occasioni sono state definite teorie ibride, tra le quali rientra quella linearizzata cui si perviene assumendo:

$$T = W^{(2)} - F(f^{(1)} + f^{(2)}) \quad (7.4)$$

e che dà luogo a risultati usuali nell'approccio geometrico del problema.

Essa può fornire in molti casi, e valgano ad esempio gli studi di Timoshenko, Chwalla, Bleich e tanti altri sui sistemi monodimensionali piani, risultati estremamente utili e significativi quando i suoi limiti di applicabilità siano adeguatamente chiariti (vedi 8.2).

### 7.2.1. Esempio

Una trave inflessa è soggetta al carico trasversale  $q(z)$ : esprimere la E.P.T. nella teoria del 1° ordine.

Nel 1° ordine, detta  $v(z)$  la funzione spostamento (vettore di configurazione ad  $\infty$  componenti), è:

$$\chi^{(1)} = -v''$$

Per un organo elastico elementare, (tratto compreso tra due sezioni piane a distanza  $dz$ ) la deformazione consisterà nella rotazione relativa tra dette sezioni; risulta:

$$s = s^{(1)} = \chi^{(1)} dz = -v'' dz; \quad k = \frac{EI}{dz}; \quad dW = \frac{1}{2} k s^{(1)2} = \frac{1}{2} EI v''^2 dz$$

Per lo stesso tratto di trave di lunghezza  $dz$  è inoltre:

$$f = v(z); \quad dU = -qdz \cdot f = -qdz \cdot v$$

Per tutta la trave risulterà:

$$T = \int_l \left[ \frac{1}{2} EI v''^2 - qv \right] dz \quad (7.a)$$

### 7.2.2. Esempio

Idem c. s. nel 2° ordine.

Nel secondo ordine è, vedi (4.g),  $\chi^{(2)} = 0$ . D'altronde poiché è ovviamente  $v(z) = f = f^{(1)}$ , ( $f^{(2)} = f^{(3)} = \dots = 0$ ) non si hanno modifiche neanche in  $U$ .

L'espressione (7.a) vale anche in una teoria del 2° ordine.

### 7.2.3. Esempio

Idem c. s. in via più esatta.

Nella ipotesi di inestensibilità dell'asse geometrico l'espressione della curvatura è fornita, in via esatta, dalla (3.d). Sarà allora:

$$T = \int_l \left[ \frac{1}{2} EI v''^2 (1 - v'^2)^{-1} - qv \right] dz \quad (7.b)$$



Ciò premesso si parta da  $C_o$ , con parametro di carico  $F$  e, nel trasferirsi a  $C$ , si faccia tappa in  $C_r$ . La E.P.T. assumerà ivi il valore:

$$W_r - F f_r = W_r - (F_r + \Delta F) f_r = T_o(C_r) - \Delta F \cdot f_r = \text{cost} \quad (7.6)$$

dove si è indicato con  $f_r$  lo spostamento generalizzato in  $C_r$ ; in tale configurazione saranno inoltre presenti deformazioni,  $s_r$ , e sforzi,  $S_r$ , negli organi elastici.

Se si prosegue ora il trasferimento, e si va da  $C_r$  a  $C$ , all'energia già acquisita vanno aggiunti i contributi seguenti che si esprimono tramite le deformazioni degli organi elastici,  $\underline{s}$ , e lo spostamento generalizzato,  $\underline{f}$ , conseguenti al vettore  $q$ :

**INCREMENTO DI ENERGIA ELASTICA** costituito:

- dal lavoro degli sforzi preesistenti,  $S_r$ , per le deformazioni  $\underline{s}$ ; per esso si pone:

$$\Sigma S_r \underline{s} = L_{Sr} \quad (7.7)$$

- dal lavoro che gli sforzi generatisi per le deformazioni  $\underline{s}$ , e valgono  $k\underline{s}$ , compiono per tali deformazioni; questo lavoro rappresenta una vera e propria energia di deformazione che, per evitare ogni confusione con quella legata alle deformazioni  $s$ , si indicherà con:

$$\Sigma \frac{1}{2} k\underline{s}^2 = \Phi \quad (7.8)$$

**INCREMENTO DEL POTENZIALE DEI CARICHI** espresso da:

$$F \underline{f} = (F_r + \Delta F) \underline{f} = L_{Fr} + \Delta F \underline{f} \quad (7.9)$$

Sommando le quote da (7.6) a (7.9), cosa lecita per l'essere la E.P.T. un potenziale e quindi indipendente dal percorso seguito, si ha:

$$T_o(C) = T_o(C_r) - \Delta F f_r + L_{Sr} + \Phi - L_{Fr} - \Delta F \underline{f} \quad (7.10)$$

Data la inessenzialità dei termini costanti presenti (v. 7.6), può operarsi invece che sulla (7.10) sulla più semplice:

$$T_r(C) = L_{Sr} + \Phi - L_{Fr} - \Delta F \cdot \underline{f} \quad (7.11)$$

In tal caso si parlerà di energia potenziale "locale", E.P.L., riferimento  $C_r$ , in contrapposizione alla definizione completa ed usuale, (7.1), che continuerà a definirsi "totale", o "globale", E.P.T. In tale riferimento locale la geometria del sistema  $C$  è definita dalla (7.5).

Per semplicità di notazioni, e per essere d'altronde inessenziale, si

ometteranno nel seguito i pedici che indicano il riferimento a  $C_r$ , essendo tale riferimento implicito nella simbologia adottata che evita ogni confusione con la (7.1), ovvero con la energia globale.

Nel concludere si evidenzia, e ciò ai fini delle indagini sull'equilibrio e la stabilità di una configurazione (v. capitolo 1), che la  $T_r$ , e si riveda la (7.10), altro non è che la variazione  $\delta T$  dell'energia posseduta in  $C_r$ , ovvero della E.P.T. totale, che si indica, anche, con la lettera  $L$ .

#### 7.4. Precisazioni sull'energia locale

Nella generalità di discorso attualmente seguita nessuna considerazione, o limitazione, è stata effettuata nei riguardi della configurazione di riferimento che interviene nella espressione (7.11), energia locale, ovvero E.P.L. Ad essa è stato solo imposto di essere nota e ciò nel senso:

- che va attribuito un preciso valore, peraltro arbitrario, al parametro di carico;
- che debba essere definita la sua geometria, vettore  $Q_r$ , cui corrispondono deformazioni degli organi elastici, e quindi sforzi  $S$ , esattamente determinati.

Eventuali approssimazioni sulla  $C_r$ , cui si addiuvano in sede operativa, vanno attentamente ponderate stante che le conseguenti imprecisioni possono alterare uno o più termini della (7.11) rendendo insignificante ogni successiva deduzione.

Ciò premesso, si prosegue suddividendo i singoli contributi (e già si è detto che si ometterà senza pregiudizio di chiarezza il pedice  $r$ ) nelle loro quote infinitesime nelle componenti  $q_i$  del vettore  $q$ . Con tale suddivisione si esprime la E.P.L. come:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + \dots = \sum T^{(k)} \quad (7.12)$$

e sarà:

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= (L_S^{(1)} - L_F^{(1)}) - \Delta F \cdot \underline{f}^{(1)} \\ T^{(k)} &= (L_S^{(k)} - L_F^{(k)} + \Phi^{(k)}) - \Delta F \cdot \underline{f}^{(k)} \quad k > 1 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Tale suddivisione non corrisponde, peraltro, alla logica di una teoria di ordine prefissato (e stante la coincidenza formale di  $\Phi$  e  $W$ ) secondo la quale, ad esempio, nel secondo ordine dovrà, in realtà, porsi:

$$T = (L_S^{(1)} - L_F^{(1)}) + \quad (7.14a)$$

$$+ (L_S^{(2)} - L_F^{(2)} + \Phi^{(2)}) + \quad (7.14b)$$

$$+ \Phi^{(3)} + \Phi^{(4)} + \quad (7.14c)$$

$$- \Delta F (\underline{f}^{(1)} + \underline{f}^{(2)}) \quad (7.14d)$$

(7.14)

L'adozione di una scritturazione su righe diversi è dovuta al volersi evidenziare quanto segue:

- la nullità della (7.14a), eguaglianza di lavori esterno ed interno del primo ordine, si ha, per il principio dei lavori virtuali, quando la configurazione di riferimento è di equilibrio;
- nel caso predetto la (7.14b) costituisce la quota energetica che, in piena analogia con la (7.4), dà luogo ad una teoria linearizzata;
- i termini rappresentati in (7.14c) costituiscono il miglioramento che può apportarsi alla teoria di cui sopra costituendone la integrazione per pervenire ad una teoria completa del 2° ordine;
- il contributo (7.14d) non sarà a considerarsi quando le indagini vadano svolte su configurazioni soggette allo stesso vettore di carico assegnato in  $C_r$ .

Sotto l'aspetto storico ricorderemo che la (7.14b) è stata ampiamente utilizzata, seppure talvolta con qualche confusione con la (7.4), nella ricerca di carichi critici, problema nel quale costituisce lo strumento fondamentale.

Nel concludere l'argomento, osserveremo che la (7.14) non è assolutamente da interpretarsi come una espressione approssimata della E.P.T. ma che le approssimazioni sono invece insite nel modo in cui essa viene di solito utilizzata. Pur essendo infatti contenuto il "passato" della struttura, il *pre- $C_r$* , nei termini  $L_S$  ed  $L_F$  questi non ne esprimono che una parte. L'approssimazione usuale consiste, e riappare la metodologia alle variazioni Euleriane, nell'eseguire le determinazioni richieste come se il sistema avesse la geometria che gli competeva in  $C_0$ , non quella effettiva assunta in  $C_r$ ; in breve le componenti di  $Q_r$  vengono considerate piccole e cioè tali da non variare in modo apprezzabile la geometria iniziale. La liceità di ciò va ovviamente, di caso in caso, provata o assunta per indiscutibile esperienza. Altri motivi di approssimazione, certamente più evidenti, consistono infine nel trascurare totalmente, o nel valutare in modo impreciso, uno o più dei termini esistenti.

#### 7.4.1. Esempio

La trave di fig. 7.2 (trave di Eulero) si trova sotto la forza  $F_r$ , nella configurazione  $C_r$ , caratterizzata dagli spostamenti assiali noti, espressi dal canale di deformazione:

$$w(z) = \frac{F_r l}{EA} \frac{z}{l} \quad (7.c)$$

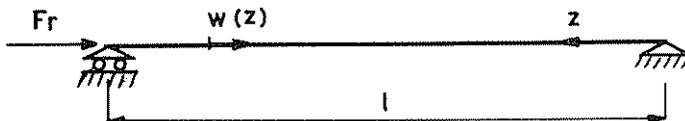


Fig. 7.2.

Questi spostamenti, e lo sforzo normale nella trave, definiscono in modo completo la configurazione di riferimento. Questa, proprio per il modo in cui sono espressi gli spostamenti (7.c), rappresentativi del vettore  $Q_r$ , è di equilibrio; ciò rende nulla la (7.14a).

Volendosi determinare gli altri termini della (7.14) per  $\Delta F = 0$ , e ciò ad esempio fino al 2° ordine, va considerata la deformazione, vettore  $q$ , che porta da  $C_r$  a  $C$ . Pensando questa dovuta ad una flessione inestensionale avverranno oltre gli spostamenti  $v(z)$  anche quelli assiali:

$$w(z) = -\frac{1}{2} \int_0^z v'^2 dz \quad (2.h)$$

del secondo ordine in  $v(z)$ . Se si pensano trascurabili gli spostamenti (7.c), e con ciò si confondono "geometricamente"  $C_r$  e  $C_0$ , le ascisse  $z$  che appaiono nella  $v(z)$  e nella (2.h) possono misurarsi sul sistema indeformato.

Così operando si determinano:

- il lavoro dello sforzo normale in  $C_r$ ,  $L_N^{(2)}$ , che risulta nullo per la supposta inestensionalità della deformazione considerata;
- l'energia elastica di deformazione  $\Phi^{(2)}$ , tutta flessionale, che nel 2° ordine vale:

$$\frac{EI}{2} \int_1^l v''^2 dz$$

- il lavoro della forza esterna,  $L_F^{(2)}$ , conseguente allo spostamento (2.h) per  $z = l$ .

La (7.14) porge:

$$T = \frac{1}{2} \int_1^l EI v''^2 dz - \frac{1}{2} F_r \int_1^l v'^2 dz$$

e costituisce espressione di base per lo studio della trave di Eulero.

### 7.5. Suddivisione delle lagrangiane

Le precedenti considerazioni sulla E.P.T. locale, e quindi sulle lagrangiane  $Q_i$  (componenti del vettore  $Q_r$ ) che reggevano il passato strutturale, e si è detto pre- $C_r$ , e su quelle attuali  $q_i$  (componenti di  $q$ ), trovano completa sistemazione in una ottica più precisa.

Si suppone di studiare inizialmente il sistema elastico in un sottospazio delle configurazioni definito da:

$$\begin{aligned} Q_k &\neq 0 & \forall & k \in [1, n'] \\ Q_l &= 0 & \forall & l \in [n' + 1, n] \end{aligned} \quad (7.15)$$

e si dicano  $C_r$  i punti di frontiera di tale sottospazio. In tale ambito le  $Q_k$ , le uniche significative, possono dirsi coordinate attive mentre le  $Q_l$  verranno indicate come coordinate libere (inutilizzate).

Se, esaurito lo studio nel sottospazio  $R^{n'}$  si vuole superare la frontiera, ovvero analizzare configurazioni al di là di quelle  $C_r$  ivi situate, dovranno considerarsi, oltre le  $Q_k$ , anche le  $Q_l$  prima nulle. Indicando con soprlinea i valori di frontiera delle  $Q_l$  nello spazio completo,  $R^n$ , sarà:

$$\begin{aligned} Q_k &= \bar{Q}_k + q_k \\ Q_l &= \bar{Q}_l + q_l = q_l \end{aligned} \quad (7.16)$$

e riappaiono le  $q_l$  prima considerate il cui insieme è costituito dall'unione di quelli delle  $q_k$  e delle  $q_l$ .

In definitiva le  $Q_k$  sono sempre attive, le  $Q_l \equiv q_l$  lo sono diventate. Se si trascurano le  $\bar{Q}_k$ , ed è l'ipotesi accennata nel paragrafo precedente, sono attive le coordinate locali  $q_l$ .

Se fra queste si considerano insignificanti le  $q_k$ , e si dà luogo a procedimenti approssimati da valutare attentamente, le sole coordinate attive restano le  $q_l$  e, con riferimento ad esse, è spesso possibile avere apprezzabili informazioni sul post- $C_r$  (valori di carichi critici).

In breve, sulla frontiera del sottospazio  $R^{n'}$  esistono, in una ottica di elasticità lineare indefinita, *PUNTI DI BIFORCAZIONE*.

Mentre tale argomento sarà ripreso in seguito, e costituisce uno dei punti basilari del comportamento strutturale, si vuole ancora notare quanto segue.

Può accadere, ed accade, che una suddivisione come la (7.15) non sia possibile. Che sia cioè  $n' = n$  e che lo studio della struttura non sia condizionale se non con riferimento a tutte le  $Q_l$ . Non esisteranno allora punti di biforcazione che richiedono la attivazione di coordinate libere. Il comportamento strutturale sarà, in genere, indefinito; in esso potranno verificarsi fasi "non statiche" aventi inizio in punti (configurazioni) particolari: *PUNTI LIMITE*.

CAPITOLO 8

**LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO: IL RAMO NATURALE**

(Aldo Raithel e Nicola Augenti)

### 8.1. Premessa

La conoscenza della forma che descrive la E.P.T., e sia la (7.2), consente immediata applicazione dei criteri generali, esposti nel primo capitolo, per la individuazione delle configurazioni di equilibrio. Consente altresì la definizione della "qualità" dell'equilibrio stesso: stabile, indifferente, instabile.

In quanto segue si parlerà essenzialmente di equilibrio e verrà mostrato che le sue aggettivazioni sono, nel più dei casi, implicitamente contenute nelle leggi carico-spostamento, leggi la cui individuazione costituisce il fine ultimo della ricerca strutturale.

### 8.2. Le equazioni di equilibrio

Dovendosi individuare le configurazioni di equilibrio sotto carichi assegnati come quelle in cui la E.P.T. ha un suo valore estremo, è a porsi:

$$\delta T = 0 \quad (8.1)$$

Tale annullamento della variazione di  $T$ ,  $\delta T$ , che nei sistemi olonomi è proprio un differenziale, richiede che sia:

$$d^{(1)} T = \sum_i \frac{\partial T}{\partial Q_i} d Q_i = \sum_i T_i d Q_i \quad (8.2)$$

Attesa la arbitrarietà che deve darsi alle  $d Q_i$  presenti nella (8.2), si perviene, infine, al sistema di equazioni\*:

$$\frac{\partial T}{\partial Q_i} = T_i = 0 \quad (8.3)$$

---

\* Per le derivazioni verrà utilizzato, in alternativa alla simbologia classica, quella del "pedice". Esso identifica la variabile rispetto alla quale la derivazione si intende eseguita.

Queste, in modo più esplicito, si scrivono partendo dalla E.P.T. data nella forma (7.2).

Risulta:

$$W_i^{(2)} + W_i^{(3)} + W_i^{(4)} + \dots - F(f_i^{(1)} + f_i^{(2)} + \dots) = 0 \quad (8.4)$$

e con ciò si possiede il sistema risolvibile da cui devono trarsi le  $Q_i$  come  $Q_i(F)$ .

Data la non linearità delle (8.4) potranno sussistere, per un dato valore di  $F$ , più soluzioni del problema, e ciò in pieno accordo col principio di Kirchoff che prevede unicità di soluzione solo in caso di linearità delle equazioni.

Se il problema strutturale viene affrontato nella teoria del 1° ordine le (8.4) si scrivono:

$$W_i^{(2)} - F f_i^{(1)} = 0 \quad (8.5)$$

dove il primo termine, stante la derivazione effettuata rispetto a  $Q_i$  è lineare nelle  $Q_i$  stesse; poiché il secondo termine è ricondotto, nel contempo, ad una costante, il sistema è lineare. Valgono il principio di Kirchoff e quello di sovrapposizione, restandosi nell'ambito classico della Scienza delle Costruzioni e della Teoria delle Strutture. Tale ambito è anche noto come quello dei piccoli spostamenti, da non confondersi con piccole deformazioni, e deve tale nome al fatto che, ove le (8.5) vengano scritte in modo diretto, gli equilibri che esse esprimono non tengono conto della mutata configurazione del sistema dovuta agli spostamenti. In breve, le caratteristiche esterne della sollecitazione vengono calcolate sul sistema indeformato (configurazione  $C_0$ ). Lo stadio successivo, miglioramento dei risultati, è quello di usare una teoria ibrida e, nella specie, quella cosiddetta linearizzata (vedi 7.2). Le equazioni di equilibrio diventano:

$$W_i^{(2)} - F(f_i^{(1)} + f_i^{(2)}) = 0 \quad (8.6)$$

In essa vale ancora il principio di Kirchoff ma si perde, salvo attente particolarizzazioni, la validità del principio di sovrapposizione. L'ambito operativo è quello in cui, in via geometrica, le caratteristiche della sollecitazione esterna vanno espresse tenendo conto della posizione assunta dai punti del sistema a seguito degli spostamenti (configurazione  $C \neq C_0$ ). In tal senso questa teoria può chiamarsi, a confronto di quella lineare, teoria dei grandi spostamenti. Anche qui va osservato che le dizioni spostamenti e deformazioni non vanno assolutamente confuse.

In entrambe le precedenti teorie, infatti, si tien conto solo di  $W^{(2)}$  e, quindi, solo di deformazioni del primo ordine (vedi 4.2); implicitamente, in entrambe, le deformazioni si sono pensate piccole ( $s^{(2)} + \dots$  trascurabile a fronte di  $s^{(1)}$ ).

- Una definizione completa richiede, dunque, le seguenti qualificazioni:
- teoria lineare = teoria dei piccoli spostamenti e delle piccole deformazioni;
  - teoria linearizzata = teoria dei grandi spostamenti e delle piccole deformazioni.

Quando si richiede una risposta che prescindia da ogni limitazione, e su questa via spinge la tecnica col miglioramento dei materiali e la conseguente sempre maggiore esilità strutturale, non può che farsi ricorso alle equazioni complete (8.4). Esse coprono, con la voluta accuratezza, il campo dei grandi spostamenti e delle grandi deformazioni<sup>(1)</sup>.

In via applicativa può affermarsi che una teoria completa del 2° ordine, corrispondente ai termini esplicitati nelle (8.4), è in generale adeguata a coprire le esigenze delle determinazioni necessarie sia sotto l'aspetto quantitativo che qualitativo.

Con ciò non si esclude, e verrà anzi più volte considerata, la opportunità di una accuratezza ancora maggiore.

### 8.3. I rami di equilibrio naturali

Quando si opera nell'ambito della teoria lineare la soluzione trovata è del tipo:

$$Q_i = Q_i(F) = h_i F \quad (8.7)$$

Essa fornisce soluzione non per un dato valore di  $F$ , bensì per:

$$-\infty < F < +\infty$$

stabilendo il più intuitivo e conosciuto legame carichi-spostamenti o "legge di carico".

Per carico, ovvero  $F$ , crescente a partire da zero<sup>(2)</sup> la struttura percorre, senza discontinuità, una successione di configurazioni e, nello spazio che le definisce, il punto rappresentativo  $C$  descrive una retta: canale di deformazione (vedi 2.3).

<sup>(1)</sup> Piccoli spostamenti e grandi deformazioni costituiscono anch'essi una possibilità reale. Dato che sarebbe comunque richiesta accuratezza nella parte più complessa delle determinazioni, interessanti  $W$ , non si comprende perché dovrebbe rinziarsi a tale accuratezza nei termini più semplici, ossia in  $U$ . Il caso non sarà considerato.

<sup>(2)</sup> Qui, ed in seguito, si considera esplicitamente  $0 \leq F < \infty$ . Quanto detto vale ovviamente anche per una variabilità negativa di  $F$ .

Se dallo spazio delle configurazioni  $R^n$ , puramente geometrico, si passa allo spazio  $R^{n+1}$ , configurazioni-forza, viene parimenti descritto un canale che visualizza la legge di carico.

Pur nella ovvietà del caso considerato, si osserva che la conoscenza di tale legge, esemplificata in fig. 8.1 nel caso  $n=2$ , risponde oltre alla domanda:

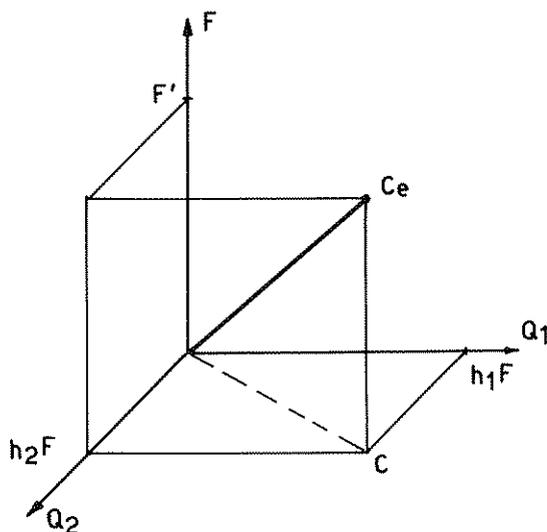


Fig. 8.1.

- quale configurazione di equilibrio  $C_e$  assume la struttura sotto il carico  $F$ ? anche alla seguente:
- cosa accade se il carico  $F$ , per un qualche motivo, assume un valore diverso dal previsto?

La seconda domanda implica, in effetti, un discorso sulla stabilità che trova implicita risposta proprio nella legge di carico.

Nel caso lineare esemplificato la visione è estremamente ottimistica, potrebbe ben dirsi che equilibrio e stabilità vanno .... appaiati, indefinitamente.

Cosa accade in una più accurata rappresentazione della realtà strutturale?

In primo luogo, al di fuori della linearità, e quindi dell'algebra lineare, insorgono notevoli difficoltà analitiche. La soluzione delle (8.4) va condotta punto per punto perché, salvo le esemplificazioni d'uso ed i casi particolari (molto particolari), la esplicitazione dei legami:

$$Q_i = Q_i(F) \quad (8.8)$$

è utopia. Si entra allora nel campo del calcolo numerico e, fortunatamente, gli sviluppi tecnici dei sistemi di elaborazione, e la loro disponibilità ormai diffusa, consentono di conseguire i risultati voluti.

Tornando ai legami  $Q_i = Q_i(F)$  può senz'altro affermarsi che nello spazio  $R^{n+1}$ ,  $F - Q_i$ , ed al crescere di  $F$  partendo da zero, il punto  $C_e$ , rappresentativo delle successive configurazioni di equilibrio occupate dal sistema, descriverà una curva come in fig. 8.2.

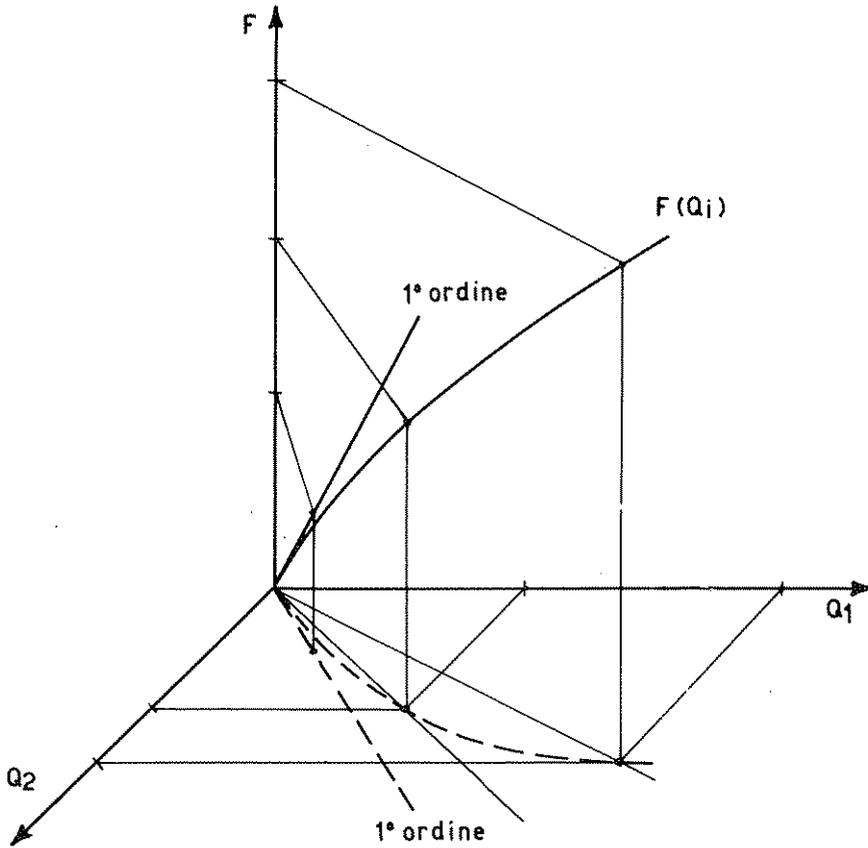


Fig. 8.2.

A tale curva si darà il nome di *RAMO NATURALE (o principale) DI EQUILIBRIO*.

Nella teoria del 1° ordine il ramo naturale coincide con un canale, ovvero è una retta, tale retta è la tangente nell'origine al vero ramo di equilibrio.

Ciò è facilmente dimostrato considerando le (8.4) e facendo tendere a

zero le  $Q_i$ ; ogni termine è trascurabile rispetto al precedente omologo e trascurando, trascurando .... ci si trova con le (8.5), teoria del 1° ordine.

Cosa altro può dirsi sulle vere leggi di carico, ovvero sull'andamento dei rami di equilibrio? Supposte note le  $Q_i$  potremo dedurre dalla generica delle (8.4), e dovranno tutte dare lo stesso risultato, la forza  $F$ :

$$F = \frac{W_i^{(2)} + W_i^{(3)} + W_i^{(4)} + \dots}{f_i^{(1)} + f_i^{(2)} + \dots} = F(Q_i) \quad (8.9)$$

e porre successivamente questa nella forma:

$$F = \frac{W_i^{(2)}}{f_i^{(1)}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{W_i^{(3)}}{W_i^{(2)}} + \frac{W_i^{(4)}}{W_i^{(2)}} + \dots\right)}{\left(1 + \frac{f_i^{(2)}}{f_i^{(1)}} + \dots\right)} = F(Q_i) \quad (8.10)$$

Il primo rapporto è la soluzione del 1° ordine, i contenuti delle parentesi danno i coefficienti correttivi nel passaggio a teorie più esatte: consideriamo quella del 2° ordine.

I termini predominanti nella "correzione" sono quelli contenuti  $W^{(3)}$  ed  $f^{(2)}$  (e se fossero entrambi nulli dovrebbe passarsi alla teoria successiva, 3° ordine, data la scarsa significatività di  $W^{(4)}$  dovuta alla sua incompletezza, vedi 4.5) da pensarsi valutati per gli stessi valori delle  $Q_i$  contenuti in  $W^{(2)}$  ed  $f^{(1)}$ . Ricordate anche le premonizioni energetiche dei paragrafi 4.4 e 5.4 può senz'altro affermarsi che:

affinché il ramo di equilibrio naturale sia indefinitamente crescente è necessario e sufficiente che  $W_i^{(3)}$  e  $W_i^{(2)}$  siano concordi e che  $f_i^{(2)}$  ed  $f_i^{(1)}$  siano discordi;

nel caso opposto, cioè ove sia  $W_i^{(3)}$  discorde a  $W_i^{(2)}$  ed  $f_i^{(2)}$  concorde ad  $f_i^{(1)}$ , il ramo naturale di equilibrio non potrà crescere indefinitamente e si svilupperà al di sotto di un piano definito da  $F = cost$ .

Nel primo caso la soluzione del 1° ordine viene "esaltata", nel secondo viene "erosa". I due casi sono stati definiti altrove<sup>(1)</sup> rispettivamente come di:

- *stabilità crescente;*
- *stabilità decrescente;*

<sup>(1)</sup> Vedi Raithe A.: «L'equilibrio elastico». Liguori, Napoli, 1969.

e, nel secondo, è implicita la definizione del carico limite formando il valore  $F_{lim}$  l'equazione del piano al di sotto del quale si sviluppa il ramo di equilibrio naturale.

Le precedenti considerazioni, ed in specie la seconda, hanno ovviamente valore in un campo di spostamenti in cui la teoria adottata non perda validità a causa dei termini successivi trascurati nelle equazioni di equilibrio; questi, ma si è ormai quasi sempre in un campo inaccettabile per le vistose variazioni geometriche intervenute, possono capovolgere la situazione dando luogo, ad esempio, a nuove forme di equilibrio stabile (rami a stabilità crescente dopo uno *SNAP-TROUGH*).

A conclusione del presente paragrafo si osserva che se i contenuti di entrambe le parentesi della (8.10) coincidessero con l'unità, e fosse cioè "vera" la soluzione del 1° ordine, il ramo di equilibrio sarebbe sempre indefinitamente crescente (coincidendo con un canale) ed il caso dovrebbe definirsi di stabilità costante.

### 8.3.1. Esempio: le travi inflesse

Si è visto che l'energia elastica di deformazione si scrive in generale:

$$W = \frac{1}{2} \int EI \chi^2 dz$$

e che  $\chi^2$  presenta, nel suo sviluppo (4.e), termini tutti positivi. È quindi:

$$W^{(3)} + \dots > 0$$

Si è visto anche, 7.2.2, che non esistono termini come  $f^{(2)}$  essendo  $v(z) \equiv f^{(1)}$ .

Si conclude che il ramo naturale di equilibrio è indefinitamente crescente (stabilità crescente).

### 8.3.2. Esempio

Si riconsidera la struttura dell'esempio 4.2.1 in presenza di una forza verticale in  $P$  diretta verso il basso.

La quota energetica  $W^{(3)}$  è definita negativa. Risulta inoltre:

$$f \equiv f^{(1)} = Q_1 \quad f^{(2)} = 0$$

Si è in un caso di stabilità decrescente. Esiste un carico limite.

### 8.3.3. Esempio: lo sforzo normale (sollecitazione semplice)

La teoria del 1° ordine dà soluzione esatta (non esistono  $W^{(3)} + \dots$  ed  $f^{(2)} + \dots$ ). Risulta definito il ramo di equilibrio coincidente con il canale di deformazione:

$$\Delta l = \frac{NI}{EA}$$

Lungo esso la stabilità è costante.

### 8.4. La curva caratteristica di Zanaboni

In alcune note dell'inizio degli anni sessanta Zanaboni inquadrò, con estrema chiarezza, i presupposti per una rigorosa e severa analisi delle leggi dell'equilibrio e delle sue aggettivazioni. In uno di tali studi, molto cari agli Autori, introdusse la "curva caratteristica" di una struttura come elemento caratterizzante il suo comportamento.

In tale curva si riguarda l'intero sistema elastico come un unico organo deformabile ideale, sottoposto alla forza  $F$  ed esibente lo spostamento  $f$ . A Lui piacque considerare la curva  $F$ - $f$  come il diagramma registrabile con una attrezzatura di carico alla quale la anzidetta idealizzazione della struttura fosse stata sottoposta.

Questa visione, fortemente suggestiva, verrà qui conservata per dare un tocco di fantasia a rigorose deduzioni.

Verità storica vuole si dica che tale "curva caratteristica" non è stata del tutto dimenticata<sup>(1)</sup> e che, seppure in modo limitato e non sempre corretto, è stata anche parzialmente riscoperta da più recenti Autori stranieri.

Nella presente opera viene ritenuta fondamentale.

Per quanto attiene la "attrezzatura di prova" va precisato che essa deve essere alquanto sofisticata; per intendersi, se "provassimo" un cubetto di calcestruzzo essa dovrebbe essere in grado di fornirci il diagramma  $\sigma$ - $\epsilon$  non solo fino alla rottura, culmine, ma seguire anche il tratto discendente successivo, mentre è in atto la disgregazione del provino.

Si supponga che una prima prova sia stata nel frattempo eseguita: il diagramma ottenuto è indefinito. Detto diagramma è consegnato nella fig. 8.3, ove può pensarsi interrotto in corrispondenza della portata massima dell'attrezzatura.

<sup>(1)</sup> Vedi Franciosi V.: «Scienza delle costruzioni». Vol. V. Liguori, Napoli.

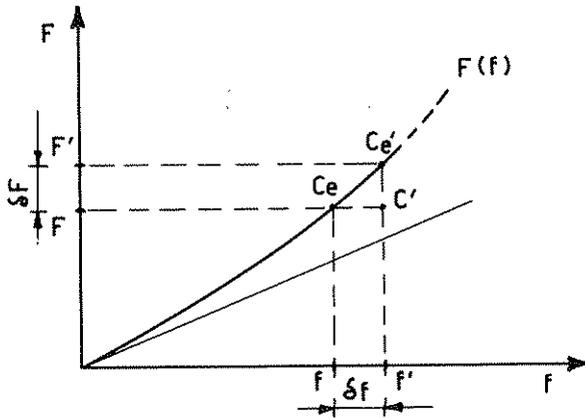


Fig. 8.3.

#### 8.4.1. Osservazioni

Il diagramma 8.3 è un diagramma reale, fisico, non soffre di approssimazioni di teorie. Le situazioni di equilibrio che descrive, punti  $C_e (F, f)$ , ovvero le configurazioni di equilibrio successivamente occupate, sono deducibili dalle (8.4) solo se in esse sono considerati tutti i termini e nessun limite viene posto alla "forma" delle leggi elastiche (elasticità perfetta indefinita come in 3.3 e 4.6). Esse possono scriversi:

$$T_i = W_i - F f_i = 0 \quad (8.11)$$

Va osservato che il diagramma pur fornendoci, data  $F$ , il valore di  $f$ , nulla ci dice sulla configurazione  $C_e$  per la quale tale  $f$  si verifica. Ne esistono in generale infinite, e siano  $C$ : tra queste solo quella definita dalla (8.11) sarà equilibrata, ovvero  $C_e$ .

È noto che l'area compresa tra il diagramma, l'asse delle ascisse e l'ordinata corrente rappresenta l'energia elastica di deformazione:

$$W = \int F df \quad (8.12)$$

Se si pensa di trasferire il sistema, senza variare  $F$ , da  $C_e$  a  $C'_e$  occorre che  $W$  abbia la variazione<sup>(1)</sup>:

$$\begin{aligned} \delta W &= \text{Area} (f C_e C'_e f') = \text{Area} (F C_e C'_e f') + \text{Area} (C_e C'_e C') = \\ &= \delta f \cdot F + \frac{1}{2} \delta f \cdot \delta F = \delta^{(1)} W + \delta^{(2)} W \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Facendosi riferimento ad espressioni "esatte" (tratte da un diagramma reale fisico) si preferisce usare i simboli variazionali per non ingenerare confusione con quelli adottati negli sviluppi analitici.

Nel contempo l'energia potenziale  $U$  è mutata di:

$$\delta U = \delta^{(1)}U = -F \cdot \delta f$$

e quindi le variazioni della E.P.T. risultano:

$$\delta^{(1)}T = \delta^{(1)}W + \delta^{(1)}U = 0 \quad ; \quad \delta^{(2)}T = \delta^{(2)}W = \frac{1}{2} \delta f \cdot \delta F \quad (8.13)$$

Si trae che in  $C_e$  c'è equilibrio, e si sapeva, per avere ivi  $T$  un estremo (variazione prima nulla); che tale equilibrio è stabile per essere tale estremo un minimo (variazione seconda positiva).

Noteremo infine che l'area  $\delta f \cdot \delta F/2$  cresce al crescere di  $F$ : stabilità crescente.

Supponiamo ancora che mentre discutevamo sul diagramma di fig. 8.3 il nostro operatore abbia sottoposto a prova un modello diverso. Questa volta l'interruzione della prova è stata determinata dall'impossibilità di applicare forze negative. Il diagramma ottenuto fino a tale stadio è il seguente:

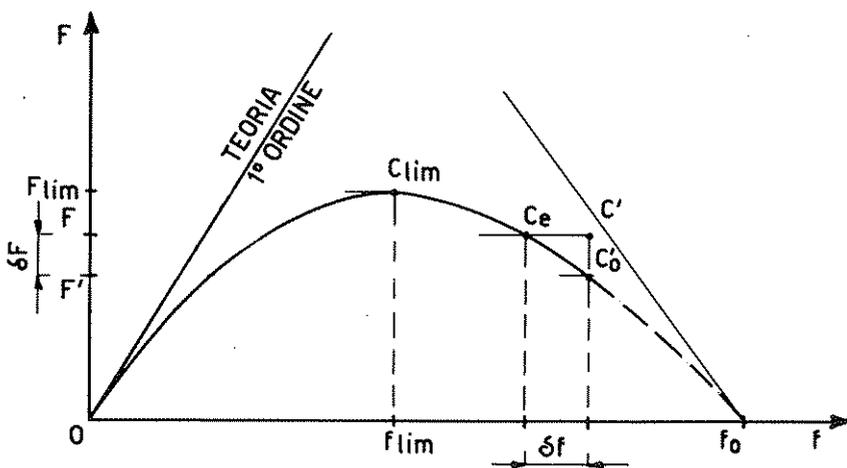


Fig. 8.4.

Nel tratto  $O-C_{lim}$  vale identicamente il discorso precedente: equilibrio stabile. Se si esamina meglio l'area  $\delta f \cdot \delta F/2$  si nota che essa decresce con  $F$ : stabilità decrescente.

Nel tratto dopo  $C_{lim}$  ancora tutto identico, solo  $\delta F$  è negativo.  $T$  assume un massimo: instabilità; peggio,  $\delta F$  cresce con  $f$ : instabilità crescente.

Tornando a questo punto ad una maggiore severità di discorso si stabilisce il *TEOREMA DELL'ELASTICITÀ PERFETTA*:

Le configurazioni definite da punti siti su rami ascendenti della curva caratteristica sono stabili. Quelle definite da punti siti su rami discendenti sono instabili.

#### 8.4.2. Osservazioni

Nel caso di elasticità lineare e teoria del 1° ordine la curva caratteristica si presenterà sempre come una retta uscente dall'origine (ad esempio la tangente iniziale di fig. 8.3).

In tale ambito sembra che tutte le strutture abbiano configurazioni di equilibrio stabile a stabilità costante.

#### 8.4.3. Osservazioni

La precedente curva caratteristica  $F-f$  può essere sostituita da una curva  $F-Q_i$  che ne conservi le proprietà; occorrerà beninteso che si faccia riferimento ad una  $Q_i$  opportuna. La scelta non è in effetti molto restrittiva dato che sarà sufficiente sia:

$$\frac{\partial f}{\partial Q_i} > 0 \quad (8.14)$$

nel tratto in cui si vogliono utilizzare i precedenti risultati. La condizione (8.14) assicura che tratti ascendenti siano sostituiti da tratti ascendenti e tratti discendenti da tratti discendenti. Ove la  $f$  consista in quote di ordine diverso, il rispetto della (8.14) dovrà essere ovviamente assicurato per quella prevalente e ciò per non dar luogo a rappresentazioni troppo "distorte".

#### 8.4.4. Esempio

La precedente teoria viene applicata all'esempio in figura per il quale si considerano solo le configurazioni simmetriche. L'unica lagrangiana è lo spostamento verticale del nodo centrale.

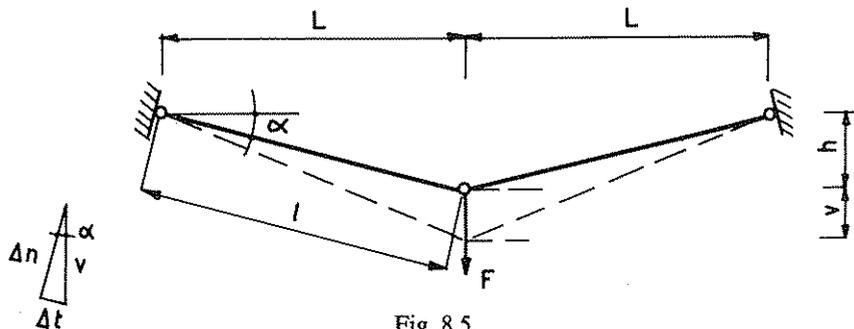


Fig. 8.5.

Si considera il caso in cui sia  $h/L \ll 1$  con le implicazioni:

$$l \approx L \quad ; \quad \text{sen} \alpha \approx \text{tg} \alpha \approx h/l \quad ; \quad \text{cos} \alpha \approx 1$$

Lo spostamento  $v$  dà luogo, in ciascuna asta, ai seguenti spostamenti relativi tra gli estremi (assiale e normale):

$$\Delta t = v \text{ sen } \alpha \approx v \frac{h}{l} \quad ; \quad \Delta n = v \text{ cos } \alpha \approx v$$

L'energia elastica si esprime come nell'esempio 4.5.1, formule (4.i), mentre il potenziale  $U$  è dato dal prodotto  $Fv$ . La E.P.T. nel 2° ordine si scrive:

$$T = \frac{EA h^2}{l^3} v^2 + \frac{EA h}{l^3} v^3 + \frac{EA}{4l^3} v^4 - Fv \quad (W^{(3)} > 0, f^{(2)} = 0) \quad (8.a)$$

Introdotta la adimensionalizzazione:

$$\bar{v} = \frac{v}{h} \quad (8.b)$$

l'equazione di equilibrio dà luogo, dopo aver diviso per  $h$ , a:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\bar{v}} &= \frac{EA h^3}{l^3} (2\bar{v} + 3\bar{v}^2 + \bar{v}^3) - F = 0 \\ F &= \frac{EA h^3}{l^3} (2\bar{v} + 3\bar{v}^2 + \bar{v}^3) \end{aligned} \quad (8.c)$$

La soluzione è ovviamente conforme alle considerazioni svolte nel paragrafo 8.3; data la coincidenza di  $f$  con  $v$ , la curva caratteristica coincide col diagramma  $F-v$  ed ha l'andamento di figura 8.3: equilibrio a stabilità crescente.

#### 8.4.5. Esempio

Idem c. s. per il caso di fig. 8.6 che differisce dal precedente solo per il verso di  $h$  (qui si schematizza l'arco ribassato, prima la fune).

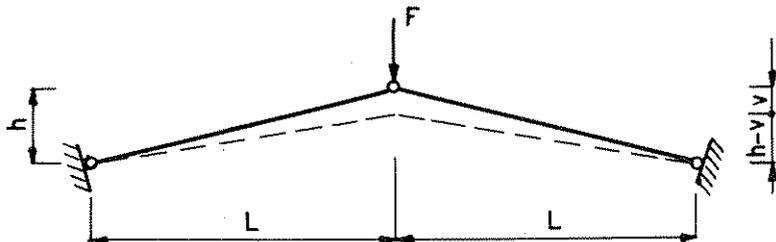


Fig. 8.6.

Il caso, già considerato nel libro ricordato in nota al paragrafo 8.3, comporta solo cambiamento di segno del termine  $W^{(3)}$  rispetto a quanto espresso in (8.a). È quindi:

$$W^{(3)} < 0, \quad f^{(2)} = 0$$

ed il destino strutturale è segnato. La (8.c) diventa:

$$F = \frac{EAh^3}{l^3} (2\bar{v} - 3\bar{v}^2 + \bar{v}^3) \quad (8.d)$$

ed  $F$  non può superare il valore per cui:

$$\frac{dF}{d\bar{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - 6\bar{v} + 3\bar{v}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v} = \begin{cases} 0,426 \\ 1,574 \end{cases}$$

Il primo valore di  $\bar{v}$  ( $\bar{v}_{lim} \equiv f_{lim}$ ) corrisponde alla situazione,  $C_{lim}$ , preconizzata in figura 8.4 con:

$$F_{lim} = 0,385 \frac{EAh^3}{l^3} \quad (8.e)$$

Il secondo è ... in zona tratteggiata negativa (una semplice curiosità); se si va oltre  $\bar{v} = 2$  ... ricompare l'esempio precedente. Tra  $\bar{v} = 0,426$  e  $\bar{v} = 2,00$  non c'è statica, ma il cosiddetto SNAP, ed un bel po' di energia cinetica da dissipare quando si ricade nell'esempio precedente.

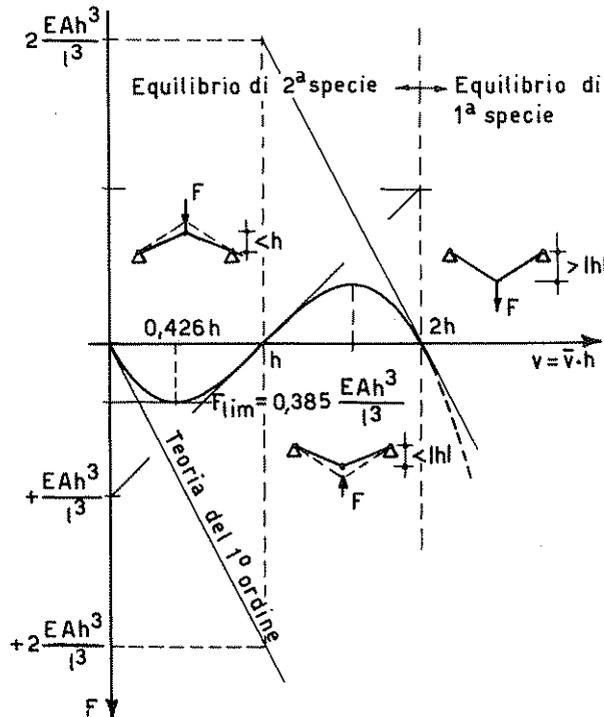


Fig. 8.7.

Il tutto è chiaramente illustrato nella fig. 8.7 dove è riportato il diagramma  $F-v$  che, essendo il sistema ad un solo grado di libertà, ne rappresenta proprio la curva caratteristica.

#### 8.4.6. *Esercizio proposto*

Con riferimento alla struttura considerata nella figura 8.6 si aggiunga, nel nodo centrale, un organo elastico che contrasti la rotazione relativa tra le due parti.

In tale organo sarà  $s^{(1)} = \Delta\varphi^{(1)} = 2v/l$ ,  $s^{(2)} = \Delta\varphi^{(2)} = 0$ ; si esaminino, al variare della sua rigidezza  $k$ , le varie possibilità.

### 8.5. Riepilogo e precisazioni

Nel presente capitolo si sono discussi i legami carico-spostamento in un sistema elastico a partire dal valore nullo della sollecitazione esterna ( $F=0$ ,  $Q_i=0$ ).

Utilizzando le equazioni di equilibrio (8.4), e percorrendo il ramo di equilibrio naturale, si è considerato il caso in cui tutte le lagrangiane considerate siano attive lungo tale ramo e che, pertanto, non riesca la suddivisione prospettata in 7.6 ( $n' \equiv n$ ); in alternativa, se tale suddivisione fosse risultata possibile, si sarebbe operato con solo riferimento alle coordinate attive.

Sotto l'aspetto di accuratezza delle determinazioni si è fatto esplicito riferimento alla teoria del 2° ordine ricordando come, nella sua utilizzazione, il termine di grado più elevato nelle  $Q_i$ , avente carattere di piena affidabilità, sia  $W^{(3)}$ ; per una precisione ancora maggiore occorrerà spingersi in una teoria del 3° ordine in cui  $W^{(4)}$  assumerà piena validità, in uno con  $W^{(5)}$  ed  $f^{(3)}$ , mentre il termine poco affidabile diventa  $W^{(6)}$ .

Per quanto attiene la opportunità di avvalersi di una teoria più o meno raffinata si sono tratti gli elementi necessari a tale indicazione. Si è visto che è fondamentale una indagine su  $W^{(3)}$  ed  $f^{(2)}$  e quindi, comunque, una esplorazione preventiva nel 2° ordine.

Solo se è assicurato che sia  $W_i^{(3)} \geq 0$  ed  $f_i^{(2)} < 0$ , o  $W_i^{(3)} > 0$  ed  $f_i^{(2)} \leq 0$ , si sarà certi che la teoria del 1° ordine è cautelativa o, al limite ( $W^{(3)} + \dots = f^{(2)} + \dots = 0$ ), foriera di risultati esatti.

Nel prosieguo tale eventualità sarà segnalata come *EQUILIBRIO DI 1<sup>a</sup> SPECIE* ed assicura, nell'evolversi della deformazione, una stabilità mai decrescente.

Quando una delle precedenti condizioni non risulti soddisfatta, una indagine più accurata è d'obbligo e nulla può prevedersi in generale per quanto riguarda la qualità della stabilità; solo l'esame della curva caratteristica, o di una da essa derivata (eventualmente per tratti) darà, a posteriori, informazioni in merito.

Da ultimo se è contemporaneamente  $W_i^{(3)} \leq 0$  ed  $f_i^{(2)} > 0$ , o  $W_i^{(3)} < 0$  ed  $f_i^{(2)} \geq 0$ , la teoria del 1° ordine è del tutto insignificante (salvo in una stretta prossimità dell'origine).

L'eventualità verrà definita come di *EQUILIBRIO DI 2ª SPECIE*; la stabilità decresce allontanandosi dall'origine: esiste uno *STATO LIMITE*.

In base alla precedente classificazione risulta che:

- l'equilibrio di 1ª specie è illustrato nell'esempio 8.4.4;
  - l'equilibrio di 2ª specie, può ritrovarsi nell'esempio 8.4.5;
- mentre nell'esercizio 8.4.6 può darsi luogo a situazioni intermedie.

Nel concludere anticiperemo che tali ultimi casi, ed ancor più quelli di 2ª specie se non affrontati con la dovuta precisione, possono dare luogo, ed è accaduto, a soluzioni equivoche e fuorvianti.

### 8.6. Osservazioni sulla curva caratteristica

Riesaminando la curva caratteristica di fig. 8.4, che nell'esempio 8.4.5 coincide con la curva  $F-v$  di fig. 8.7, va notato, e può sembrare ovvio, che essa, nel tratto in esame, si sviluppa tra:

- l'asse delle ascisse, asse  $f$ ;
- la tangente nell'origine, rappresentativa della teoria del 1° ordine;
- una retta passante per un punto d'ascissa  $f_0$  (sistema deformato sotto carico nullo) che approssima il ramo discendente della curva.

Al variare del sistema in esame, ed anche dell'accuratezza delle determinazioni, la curva caratteristica potrà risultare più o meno prossima alle rette considerate, e l'ascissa  $f_{lim}$  più o meno discosta dall'origine e da  $f_0$ .

Ciò significa che per strutture esibenti una grande rigidezza, e quindi piccoli spostamenti nella teoria del 1° ordine, la curva di equilibrio possa evolversi come schematizzato in fig. 8.8.a; in tal caso il valore  $F_{lim}$  può approssimarsi a quello  $F_a$  che si legge all'incrocio delle due precitate rette.

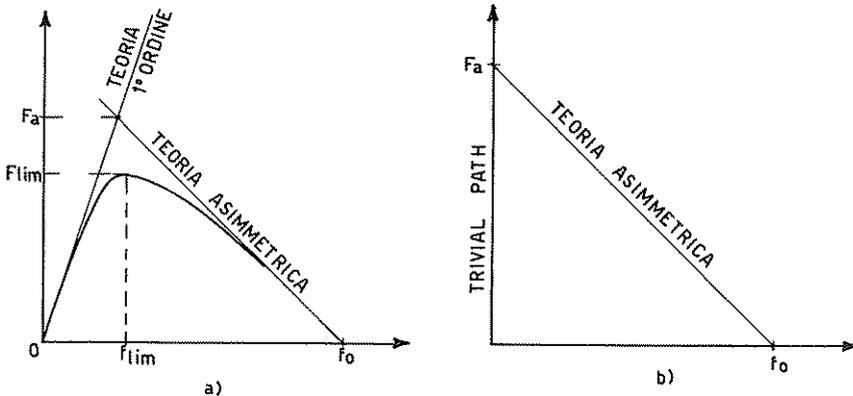


Fig. 8.8.

Se al limite si considera (e solo nel 1° ordine) rigidità infinita, la tangente nell'origine diventa verticale e finisce col rappresentare il tratto ascendente della curva caratteristica che viene detto *TRIVIAL PATH*.

Tutto appare come in fig. 8.8.b: resta solo la retta rappresentativa del ramo discendente della curva caratteristica. A tale retta è legato il valore di  $F_a$  indicato nella stessa figura 8.8.b che viene confuso con un carico critico e soprannominato *ASYMMETRIC STABLE UNSTABLE*.

La predetta teoria (*asimmetrica?*) è evidentemente una rappresentazione molto schematizzata della realtà; ad essa si perviene in base ad imprecisioni la cui influenza, quantitativamente imprevedibile, non è certo "cautelativa" atteso che sarà sempre:

$$F_{lim} < F_a \quad (8.15)$$

Ciò non toglie che esistano molti casi in cui, per le notevoli difficoltà che si incontrano nel determinare  $F_{lim}$ , ci si limiti al calcolo di  $F_a$  legato a difficoltà analitiche di molto inferiori; la disequaglianza (8.15) e la incertezza sul divario quantitativo tra i due valori inducono, allora, alla massima prudenza.

### 8.7. Valutazioni energetiche

Nel paragrafo 8.4 si è introdotta la curva caratteristica di una struttura mostrando come essa sia specchio fedele del suo comportamento. Tale stretta rispondenza è stata dedotta con bilanci energetici, visualizzati sulla curva stessa, che, fondamentalmente corretti, soffrono della lieve imprecisione (che svanisce con  $\delta f \rightarrow 0$ ) di avere considerate triangolari le aree  $C_e$ ,  $C_s$ ,  $C'$  delle figg. 8.3 ed 8.4. Con ciò si sono trascurati i termini energetici di ordine più elevato del secondo, peraltro ininfluenti sul segno dell'area considerata, segno da cui dipende il verdetto di stabilità o instabilità che costituisce il fine delle valutazioni ivi svolte.

Volendo riconsiderare la indagine effettuata in tale sede con più stretto riferimento alle espressioni della E.P.T., approntate proprio a tali fini, basterà osservare:

- che le indagini effettuate sono di tipo locale, ovvero nell'interno di una configurazione di equilibrio,  $C_e$ , presa quale base o riferimento delle stesse;
- che una espressione della E.P.T. locale, ovvero valida a partire da una configurazione di riferimento, è stata costruita nel paragrafo 7.4 ed espressa mediante la (7.14).

Stante l'equilibrio della configurazione  $C_e \equiv C_r$  mancheranno nella (7.14) i termini (7.14.a) ed essa si scrive:

$$T = (L_s^{(2)} - L_F^{(2)} + \Phi^{(2)}) + \Phi^{(3)} + \Phi^{(4)} - \Delta F(\underline{f}^{(1)} + \underline{f}^{(2)}) \quad (8.16)$$

Se si trascurano i termini di ordine più elevato, e si tiene fisso il valore della forza presente in  $C_e \equiv C_r$ ,  $\Delta F = 0$ , si resta con:

$$T^{(2)} = L_S^{(2)} - L_F^{(2)} + \Phi^{(2)} \quad (8.17)$$

Ricordato che nelle espressioni (8.16) ed (8.17), in quanto locali, è omessa una inessenziale costante, rappresentativa proprio dell'energia posseduta in  $C_e \equiv C_r$ , si riconosce che  $T^{(2)}$  rappresenta proprio la variazione seconda (e la prima è nulla per l'esistente equilibrio) dell'energia posseduta in tale configurazione. Essa è cioè proprio la  $\delta^{(2)}T$  del paragrafo 1.4, e risulta proporzionale all'area del ricordato triangolo  $C_e C_e' C'$ , dal cui segno dipende il giudizio:

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}T \equiv T^{(2)} > 0 & : \text{STABILITÀ} \\ \delta^{(2)}T \equiv T^{(2)} = 0 & : \text{INDIFFERENZA} \\ \delta^{(2)}T \equiv T^{(2)} < 0 & : \text{INSTABILITÀ} \end{aligned}$$

Lo stato limite, identificato sulla curva caratteristica da:

$$\frac{dF}{df} = 0 \quad (8.18)$$

corrisponde pertanto, in termini energetici, al raggiungimento di una configurazione,  $C_{lim}$ , in cui è:

$$T^{(2)} = L_S^{(2)} - L_F^{(2)} + \Phi^{(2)} = 0 \quad (8.19)$$

ed a cui compete il parametro di carico,  $F_{lim}$ , che, contenuto in  $L_S^{(2)}$  ed  $L_F^{(2)}$ , porta a tale annullamento.

La speranza di dedurre in tale via il valore  $F_{lim}$  viene immediatamente vanificata quando si osservi che è di fatto sconosciuta proprio la  $C_{lim}$ , sia come geometria che come regime di sforzi, a partire dalla quale il calcolo dei termini contenuti nella (8.19) va eseguito.

Un procedimento iterativo (ipotizzando una  $C_{lim}$ , deducendo  $F_{lim}$ , trovando una nuova  $C$  di partenza, e così proseguendo) è in generale ipotizzabile ma le problematiche ad esso connesse fanno preferire la costruzione per punti delle leggi elastiche così come sarà indicato nel paragrafo 15.8.

### 8.8. Carico limite e carico asimmetrico

A partire dalla tardiva conoscenza dei lavori di KOITER, e tramite successive teorizzazioni come ad esempio quella di THOMPSON (1973), si è universalmente consolidata la confusione tra carico limite e carico critico che si era inizialmente tentata di districare, pur unificando entrambi i fenomeni sotto l'appellativo critico, da parte di studiosi (e siamo tra il 1930 ed il 1950) come BELLUZZI, KRALL ed altri.

Si parlava allora di instabilità di tipo euleriano, o di 1<sup>a</sup> specie (i veri carichi critici), e di instabilità di 2<sup>a</sup> specie, o di forma (i carichi limite).

Attualmente, pur facendo tutti gli Autori chiara distinzione tra le due fenomenologie, si è tornati ad una situazione ancor più grave di quella iniziale in quanto si è dato l'appellativo di *Carico critico asimmetrico stabile-instabile* a quello che altro non è se non un carico limite determinato su un sistema elastico reso elasto-rigido e quindi non reale.

Di esso si è già fatto cenno in 8.6, indicandolo come carico asimmetrico  $F_a$ , e dando una prima sommaria indicazione di come esso potesse essere generato.

Il discorso può essere ora ripreso con ben maggior precisione riferendosi alla (8.19) e commettendo l'errore di eseguire le determinazioni che essa richiederebbe, e che dovrebbero riguardare pertanto  $C_{lim}$ , sul sistema indeformato  $C_0$ .

Gli sforzi  $S$  sono allora immediatamente esprimibili tramite il parametro  $F$  in una teoria del 1° ordine o, ancora peggio, in una teoria del 1° ordine "semplificata" in cui si trascurano alcuni aspetti deformativi ritenuti secondari.

Può trarsi allora in evidenza  $F$  dai primi due termini delle (18.19) che, contrassegnando con  $\sim$  i valori da essi assunti per  $F = 1$ , si scrive:

$$T^{(2)} = (\tilde{L}_S^{(2)} - \tilde{L}_F^{(2)}) F - \Phi^{(2)} = 0 \quad (8.20)$$

e risulta, con una ovvia posizione:

$$F = F_a = \frac{\Phi^{(2)}}{\tilde{L}_S^{(2)} - \tilde{L}_F^{(2)}} = \frac{\Phi^{(2)}}{\tilde{L}^{(2)}} \quad (8.21)$$

Restando ancora aperta la necessità di attribuire un valore alle lagrangiane  $q_i$ , che appaiono in  $\Phi^{(2)}$  ed  $\tilde{L}^{(2)}$ , il problema può essere risolto minimizzando, rispetto ad esse,  $F_a$ .

Purtroppo tali condizioni sono identiche a quelle che possono scriversi annullando le derivate di  $T^{(2)}$  (ciò per la quadraticità di tale forma omogenea) e comportano pertanto che debba essere soddisfatto il sistema

$$\begin{aligned} \frac{dT^{(2)}}{dq_i} &= T_i^{(2)} = (L_S^{(2)} - L_F^{(2)} - \Phi^{(2)})_i = \\ &= F \cdot \tilde{L}_i^{(2)} - \Phi_i^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (8.22)$$

La formale coincidenza di queste con le equazioni allo *stato critico*, che vengono trattate nel capitolo seguente, ha fatto sì che la degenerazione di un carico limite,  $F_a$ , sia stata definita *carico critico*; le relative aggettivazioni che lo accompagnano, asimmetrico, stabile-instabile, sono dovute ad proseguire sulla china intrapresa e vengono di seguito riferite.

Prima di fare ciò noteremo ancora che anche l'espressione (8.21) data per  $F_a$  è portatrice della stessa equivoca confusione. Essa infatti, formalmente, coincide con la formulazione di BRYAN e TIMOSHENKO relativa ai carichi critici e che, specie il secondo Autore, ha brillantemente utilizzato in una molteplicità di casi che fanno parte ben consolidata della storia dei problemi di carico critico.

Riprendendo a questo punto il discorso si considera annullato  $T^{(2)}$  (e non è vero perché si è annullata la  $T^{(2)}$  che si sarebbe avuta se il sistema non si fosse deformato) e si riconsidera la espressione (8.16) della E.P.L. che in tale situazione si scrive:

$$T = \Phi^{(3)} + \Phi^{(4)} - \Delta F (f^{(1)} + f^{(2)})$$

Poiché, per l'ipottizzato ritrovarsi in uno stato critico, "deve" annullarsi  $f^{(1)}$  si resta in realtà con:

$$T = \Phi^{(3)} + \Phi^{(4)} - \Delta F \cdot f^{(2)} \quad (8.23)$$

La minimizzazione di questa ultima, che dovrebbe individuare il ramo secondario (?), porge:

$$\Delta F = \frac{\Phi_i^{(3)} + \Phi_i^{(4)}}{f_i^{(2)}} \simeq \frac{\Phi_i^{(3)}}{f_i^{(2)}} \quad (8.24)$$

La disparità di  $\Phi^{(3)}$ , e la parità di  $f^{(2)}$ , fanno riconoscere l'esistenza di  $\Delta F$  positivi o negativi a seconda del segno attribuito alle  $q_i$ : il carico critico  $F_a$  è asimmetrico, ovvero stabile-instabile. La sua rappresentazione grafica è quella anticipata nel paragrafo 8.6 e nella relativa figura 8.8.b: una retta passante per  $F_a$ , se si considera solo  $\Phi^{(3)}$ , una curva, avente sempre tale retta come tangente in  $F_a$ , se si considerano anche i termini successivi:  $\Phi^{(4)}$ ....

A questo punto il discorso sul come sia "nato" il carico  $F_a$  può ritenersi concluso sotto l'aspetto concettuale: una confusione tra due configurazioni,  $C_o$  e  $C_{lim}$ , sulla cui effettiva "distanza" nulla può dirsi se non dopo aver determinato  $C_{lim}$  e quindi  $F_{lim}$ .

Ciononostante esso merita ancora alcune puntualizzazioni che si danno di seguito presupponendo, come d'altronde è già stato fatto, una qualche conoscenza dei problemi di carico critico (v. successivi capitoli 9 e 10).

### 8.8.1. Considerazione prima

Quanto osservato sull'andamento della  $\Delta F$  fornito dalla (8.24) può dar luogo ad una qualche perplessità per quanto riguarda la possibilità di ottenere, seppure in una determinazione basata su presupposti non corretti, valori di  $\Delta F > 0$  per uno dei due segni attribuibili alle  $q_i$ .

Ciò è ad ascriversi alla esistenza di un ramo di equilibrio, distinto da quello naturale, ed irraggiungibile con una crescita del parametro di carico  $F$  a partire da zero. Di esso non si è mai detto in precedenza, e tantomeno se ne parlerà in futuro, stante la completa inutilità dell'argomento. Al momento preciseremo solo che esso, spesso definito come ramo "complementare", è caratterizzato dallo svilupparsi tutto al di sopra di un valore di  $F$  che diremo  $F_{LIM}$ .

Orbene l'andamento (8.24) "approssima" da un lato il tratto decrescente del ramo naturale ( $\Delta F < 0$ ), dall'altro quello crescente del ramo complementare.

Tale situazione è ben comprensibile dall'esame della successiva figura 8.9 dove sono riportati, nel caso dell'esempio cui si riferisce, sia il ramo principale che quello complementare.

### 8.8.2. Considerazione seconda

Da un punto di vista strettamente ingegneristico la valutazione di un  $F_a$ , a fronte delle difficoltà insite in quella di un  $F_{lim}$ , può anche apparire seducente, e tale sarebbe invero, se il divario fra i due valori fosse, in qualche modo, quantizzabile o, cosa coincidente, fosse individuabile anche un valore in difetto, e sia  $F_b$ , così da avere la disuguaglianza:

$$F_b < F_{lim} < F_a \quad (8.25)$$

In mancanza di ciò la determinazione di  $F_a$  è insignificante e nulla toglie a tale affermazione la constatazione che gli usuali esempi, cui si farà più volte riferimento nel seguito, possano, in taluni casi, dare valori di  $F_a$  dello stesso ordine di grandezza di  $F_{lim}$ ; ne esistono infatti altri, ed anche facilmente individuabili, in cui ciò certamente non accade.

Sull'argomento si tornerà, comunque, ancora più volte indicando modalità operative più corrette e come, per specifiche tipologie strutturali, sia possibile rendersi conto di parametri che influiscono sull'entità del divario tra  $F_{lim}$  ed  $F_a$  e del suo ordine di grandezza.

### 8.8.3. Esempio

Lo schema considerato è descritto nella successiva figura 8.9 e costituisce, nei testi più noti e diffusi, l'esempio fondamentale per introdurre e mostrare l'esistenza del carico "critico" asimmetrico di cui in precedenza si è ampiamente discusso. La "attendibilità" dei risultati mostrati dagli Autori che ad esso si riferiscono è dovuta al conferire all'asta verticale una rigidità infinita a seguito della quale viene apparentemente superato l'errore di confondere  $C_{lim}$  con  $C_0$  dando luogo agli sviluppi che si sono chiaramente indicati nel presente paragrafo 8.8. Non ci si è resi evidentemente conto che porre a priori  $EA_2 = \infty$  altro non comporta che calcolare il limite cui tende, al crescere di  $EA_2$  rispetto ad  $EA_1$ , il carico limite,  $F_{lim}$ , della struttura reale. Posto pertanto:

$$EA_2 = \rho \cdot EA_1 \quad (8.f)$$

quello che è stato valutato altro non è che:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (F_{lim}) = F_a$$

ed il valore del carico limite, che interesserà conoscere per un assegnato rapporto delle rigidezze definito dalla (8.f), resta incognito.

Ad ulteriore chiarimento di quanto innanzi precisato si riporta la seguente soluzione approssimata del problema in cui si assumono come lagrangiane  $Q$ :

$$v = \text{spostamento verticale del nodo } B; \quad \bar{v} = v/l$$

$$w = \text{spostamento orizzontale del nodo } B; \quad \bar{w} = w/l$$

e si adimensionalizza anche il carico ponendo:

$$\bar{F} = \frac{F}{EA} \quad (8.g)$$

L'unica parte dello studio di un certo impegno è quella relativa alla determinazione della energia elastica  $W$  che si sviluppa fino al terzo ordine. La successione delle operazioni è la seguente:

- si esprimono in funzione di  $v$  e  $w$  gli spostamenti assiali e trasversali delle singole aste così da utilizzare i risultati dell'esempio 4.5.1:

$$\begin{aligned} \text{asta AB:} \quad \Delta l &= -v \cos 45^\circ + w \sin 45^\circ \\ \Delta n &= +v \sin 45^\circ + w \cos 45^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{asta BC:} \quad \Delta l &= -v \\ \Delta n &= +w \end{aligned}$$

- si pongono tali valutazioni nelle prime due delle (4.i).

L'energia potenziale totale assume allora la forma:

$$\begin{aligned} T = EA_1 l \left[ \frac{1}{4\sqrt{2}} \left( \bar{w}^2 + \bar{v}^2 - 2\bar{v}\bar{w} + \frac{1}{2}\bar{w}^3 - \frac{1}{2}\bar{v}^3 - \frac{1}{2}\bar{w}\bar{v}^2 - \frac{1}{2}\bar{w}^3\bar{v} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\rho \left( \bar{v}^2 - \bar{w}^2\bar{v} \right) \right] - Fl\bar{v} \quad (8.h) \end{aligned}$$

Da essa si traggono le due equazioni di equilibrio:

$$T_w = 0 \quad , \quad T_v = 0 \quad (8.i)$$

Trascurando i termini di secondo grado, ovvero sviluppando  $T$  nella teoria del primo ordine, si trova:

$$\bar{v} = \frac{\bar{F}}{\rho} \quad , \quad \bar{v} = \bar{w} \quad (8.l)$$

È evidente come, già all'avvio del ramo naturale, si abbia inclinazione dell'asta verticale ( $w \neq 0$ ), e su ciò si tornerà in 9.5.4.

Proseguendo nell'indagine, e stante che vuole operarsi per  $\rho \rightarrow \infty$ , nelle (8.i) si trascurano tutti i termini di secondo grado non contenenti  $\rho$ ; con ciò esse si semplificano in:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{4} \bar{w} - \frac{\sqrt{2}}{4} \bar{v} - \rho \bar{w} \bar{v} &= 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \bar{w} + \rho \bar{v} - \frac{1}{2} \rho \bar{w}^2 &= \bar{F} \end{aligned} \quad (8.m)$$

Dalla prima si deduce:

$$\bar{v} = \bar{v}(\bar{w}) = \frac{\bar{w}}{1 + \frac{4}{\sqrt{2}} \rho \bar{w}} \quad (8.n)$$

Questa valutazione posta nella seconda delle (8.m) dà  $\bar{F}$ :

$$\bar{F} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \bar{w} + \rho \frac{\bar{w}}{1 + \frac{4}{\sqrt{2}} \rho \bar{w}} - \frac{1}{2} \rho \bar{w}^2 \quad (8.o)$$

ed il ramo naturale è definito. Cerchiamone il valore limite determinando quello di  $\bar{w}$  che estremizza la (8.o):

$$\frac{d\bar{F}}{d\bar{w}} = 0 \Rightarrow \bar{w}^3 + \frac{3\sqrt{2}}{4\rho} \bar{w}^2 + \frac{3}{8\rho^2} \bar{w} - \frac{1}{8\rho^2} = 0 \quad (8.p)$$

Qualche valore numerico;  $\bar{w}$  dalla (8.p), la si pone nella (8.o):

$$\begin{aligned} \rho = 10^3 &\Rightarrow \bar{F}_{lim} = 0,3139 \\ \rho = 10^4 &\Rightarrow \bar{F}_{lim} = 0,3351 \\ \rho = 10^{20} &\Rightarrow \bar{F}_{lim} = 0,3535 \quad (\equiv \bar{F}_a) \end{aligned}$$

Ad integrazione della precedente soluzione analitica approssimata ( $T$  fino al terzo ordine) si espongono in fig. 8.9 alcuni risultati di una indagine numerica esatta<sup>(1)</sup>. Essi sono pienamente concordanti con quanto qui esposto; per  $\rho = 10$ , ed è un rapporto di rigidezza tecnicamente significativo, risulta:  $F_{lim} = 0,2528$

contro il valore  $\bar{F}_a = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,3535$ , con uno scarto per nulla trascurabile.

<sup>(1)</sup> D'Apuzzo M. e Augenti N.: «L'instabilità dei sistemi asimmetrici deformabili». Atti Accademia Pontaniana, Napoli 1977.



CAPITOLO 9

**LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO: LO STATO CRITICO**

(Aldo Raithel e Nicola Augenti)

### 9.1. Premessa

Il ramo naturale di equilibrio di una struttura è un pò come la linea della vita sulla mano dell'uomo. Ha un'origine, la configurazione  $C_0$ , ed un avvio certi.

In  $C_0$  c'è stabilità, e durante l'avvio anche (teoria del 1° ordine): poi può svilupparsi in più modi. Tranquilla e sicura:  $W^{(3)}$  ed  $f^{(2)}$  sono favorevoli; con un destino ultimo segnato:  $W^{(3)}$  ed  $f^{(2)}$  ne sono triste profezia; incerta:  $W^{(3)}$  ed  $f^{(2)}$  danno premonizioni discordi.

Poi c'è l'imprevisto, è sempre in agguato, in ogni caso. Linee trasversali più o meno marcate, in taluni casi invisibili, inesistenti, in altri nette ed inequivocabili. Queste ultime, a volte, indicano un trauma profondo, ma c'è sopravvivenza, talaltra la fine, improvvisa. Così per l'uomo, così per la struttura.

Nel campo strutturale il ramo naturale di equilibrio può:

- a) non intersecare alcun altro ramo di equilibrio: inesistenza di carichi critici;
- b) intersecare un ramo di equilibrio secondario ove esso è stabile: il carico critico esiste ma il comportamento post-critico è anch'esso stabile;
- c) intersecare un ramo di equilibrio secondario ove esso è instabile: c'è carico critico ed il comportamento successivo è instabile.

I casi a) e c) danno soluzioni definitive: sopravvivenza piena o tracollo strutturale.

Il caso b) è il più pietoso: c'è il pericolo di incontrare un secondo ramo secondario che si diparte dal primo e, se c'è salvezza, ancora di nuovo; una malattia dopo l'altra.

Nel caso b) c'è di peggio: si possono intersecare contemporaneamente più rami secondari, e sono i carichi critici coincidenti (o composti). Una specie di polmonite doppia, per l'uomo: difficilmente ci si salva. Alcuni Autori, pardon dottori, dicono addirittura che la morte sia certa, fortunatamente è stato dimostrato che non è sempre vero.

Nel caso b) è stato prospettato un altro pericolo: intersezione con un ramo secondario in pendenza; qualcosa come: .... uno scivolone.

Quanti imprevisi nella vita di una struttura! Passiamo ad analizzarli.

## 9.2. Punti di biforcazione e carichi critici

Le maggiori difficoltà per la individuazione di un ramo secondario consistono nel fatto che, a differenza di quanto avviene per il ramo naturale, non se ne conosce *a priori* neanche un punto rappresentativo nello spazio  $R^{n+1}$ , configurazioni-forza ( $Q_i - F$ ).

Occorre allora percorrere punto per punto il ramo naturale, indagando sulle singole configurazioni  $C_o$ , e ciò al fine di individuare quali di queste risultino, eventualmente, del pari equilibrate su un ramo secondario.

In tale indagine si racchiude il problema della ricerca dei punti di biforcazione e dei carichi critici; ad esso segue quello del tracciamento del ramo secondario la cui esistenza è stata individuata. Tale seconda indagine è ben nota sotto la dizione: comportamento post-critico.

In un discorso puramente teorico, e valgono i consueti esempi di casi particolari, l'intero comportamento strutturale può dedursi dalle equazioni di equilibrio (8.4). Escluso, infatti, il caso in cui le coordinate siano tutte attive a partire da  $C_o$ , ed esisterebbe il solo ramo naturale (nessun pericolo di biforcazione), gli eventi procedono come prospettato in 7.5.

Per  $F$  crescente da zero la soluzione, e quindi il ramo di equilibrio, si sviluppa in un sottospazio  $R^{n'+1}$  che interessa solo  $n'$  lagrangiane, e siano le  $Q_k$ , mentre le restanti  $N = n - n'$ , e siano le  $Q_l$ , si conservano identicamente nulle (coordinate libere).

In via analitica ciò comporta che le  $n$  equazioni si spezzino in due gruppi. Le prime  $n'$ , poste eguali a zero le  $Q_l$ , danno le  $Q_k$ ; le restanti  $n - n'$  sono omogenee nelle  $Q_l$  (ma contengono termini di tipo  $Q_k Q_l$ ) e confermano la possibilità che siano nulle le  $Q_l$ . Se si tenta la soluzione del sistema completo (sia  $Q_k$  che  $Q_l$  diverse da zero) questa risulta immaginaria.

Tutto ciò fino ad un valore di  $F$ , e siamo alla biforcazione; la soluzione precedente ( $Q_k \neq 0$ ,  $Q_l = 0$ ) esiste sempre: è il ramo naturale che prosegue, ma perdendo la sua stabilità. Anche il sistema completo ammette ora soluzioni: queste, al variare di  $F$ , descrivono il ramo secondario.

Si può proseguire lungo il ramo principale, aiutandolo a mantenere il suo equilibrio, ma altre biforcazioni possono essere incontrate.

Si può proseguire lungo il ramo secondario, aiutandolo a mantenere il suo equilibrio se necessario (ovvero se il comportamento post-critico è instabile), ed anche qui nuove biforcazioni possono essere incontrate.

### 9.2.1. Esempio

L'asta di fig. 9.1 è assialmente deformabile. L'organo elastico in  $B$  si oppone alla rotazione con rigidità  $k$ .

Si richiede lo studio completo del sistema assumendo come lagrangiane lo spostamento orizzontale  $w$  e la rotazione  $\varphi$  dell'asta come in fig. 9.1.

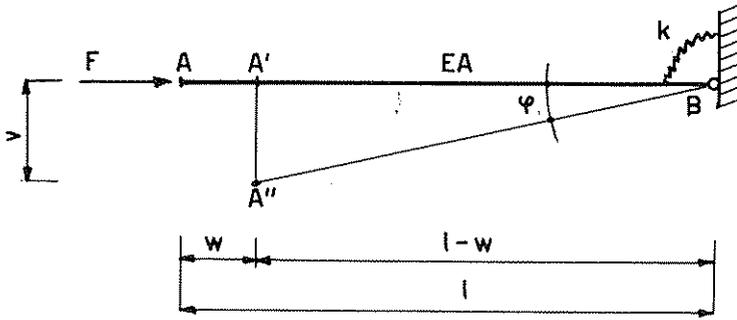


Fig. 9.1.

Mentre la lagrangiana  $\varphi$  descrive in modo compiuto la deformazione dell'organo elastico in  $B$  ( $s \equiv \varphi$ ) ciò non accade per la lagrangiana  $w$ ; essa descrive infatti l'accorciamento dell'asta solo nel pre-critico.

Detta  $l'$  la lunghezza  $A''B$  a deformazione avvenuta tale accorciamento dovrà allora valutarsi in via generale come:

$$\Delta l = l' - l \quad \text{con} \quad l' = \sqrt{A'A''^2 + A'B^2} = (l-w) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad (9.a)$$

Volendosi operare con notevole accuratezza, E.P.T. espressa fino ai termini del 4° ordine, occorre valutare con tale precisione la energia elastica  $W$  e, come noto, è richiesto allora lo studio delle deformazioni fino al 3° ordine. Operando in tal senso risulta:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} &= 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^4 \varphi + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left( \varphi + \frac{1}{3} \varphi^3 + \dots \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \varphi + \frac{1}{3} \varphi^3 + \dots \right)^4 + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{5}{24} \varphi^4 + \dots \\ \Delta l &= (l-w) \left( 1 + \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{5}{24} \varphi^4 + \dots \right) - l = -w + \frac{1}{2} l \varphi^2 - \frac{1}{2} w \varphi^2 \dots \end{aligned} \quad (9.b)$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} k \varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{EA}{l} \Delta l^2 - Fw = \\ &= \frac{1}{2} k \varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{EA}{l} \left( w^2 - l w \varphi^2 + \frac{1}{4} l^2 \varphi^4 + w^2 \varphi^2 \right) - Fw \end{aligned} \quad (9.c)$$

Nell'utilizzare la (9.c) procederemo con diversi gradi di approssimazione per mostrare come la qualità della soluzione sia legata all'ordine dei termini considerati:

### 1. TEORIA LINEARE

Dovendosi esprimere la deformazione fino al 1° ordine, scompaiono nella (9.b) i termini quadratici e nella (9.c) i termini di ordine superiore al secondo. Le equazioni di equilibrio porgono:

$$\begin{aligned} T_w &= \frac{EA}{l} w - F = 0 \\ T_\varphi &= k\varphi = 0 \end{aligned} \quad (9.d)$$

La prima fornisce il ramo naturale:

$$w = \frac{Fl}{EA} \quad (9.e)$$

la seconda,  $\varphi = 0$ , dichiara l'inesistenza di un ramo secondario.

### 2. TEORIA DEL 2° ORDINE

L'espressione di  $\Delta l$ , (9.b), va considerata fino al termine di secondo grado; quella della E.P.T. è applicabile fino al terzo. Le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$\begin{aligned} T_w &= \frac{EA}{l} w - \frac{1}{2} EA \varphi^2 - F = 0 \\ T_\varphi &= k \varphi - EA w \varphi = 0 \end{aligned} \quad (9.f)$$

Il ramo principale (9.e) viene confermato. Oltre la soluzione  $\varphi = 0$  appare la soluzione  $\varphi \neq 0$  resa possibile se:

$$w = w_{crit} = \frac{k}{EA}$$

Tale valore posto nella (9.e) dà il valore critico

$$F = \frac{k}{l} = F_{crit} \quad (9.g)$$

in condizioni di indifferenza ( $\varphi$  qualunque).

### 3. TEORIA DEL 3° ORDINE

Vale questa volta la (9.c) in cui si è considerata la  $\Delta l$  espressa fino al 3° ordine<sup>(1)</sup>.

Le equazioni di equilibrio questa volta sono:

$$T_w = \frac{EA}{l} w - \frac{1}{2} EA \varphi^2 + \frac{EA}{l} w \varphi^2 - F = 0$$

$$T_\varphi = k \varphi + \frac{1}{2} EA l \varphi^3 - EA \varphi w + \frac{EA}{l} w^2 \varphi = 0 \quad (9.h)$$

Introdotte le adimensionalizzazioni:

$$\bar{w} = \frac{w}{l}, \quad \bar{F} = \frac{F}{EA}, \quad \bar{k} = \frac{k}{EA l} \quad (9.k)$$

esse si riscrivono:

$$\bar{w} - \frac{1}{2} \varphi^2 + \bar{w} \varphi^2 = \bar{F} \quad (9.i)$$

$$\varphi \left( \bar{k} + \frac{1}{2} \varphi^2 - \bar{w} + \bar{w}^2 \right) = 0$$

Per  $\varphi = 0$  si ritrova il ramo naturale (9.e) che questa volta si esprime sinteticamente:

$$\bar{w} = \bar{F} \quad (9.l)$$

Volendosi ora individuare il ramo secondario,  $\varphi \neq 0$ , si ricava dalla seconda (9.i):

$$\frac{1}{2} \varphi^2 = \bar{w} - \bar{w}^2 - \bar{k} \quad (9.m)$$

che posto nella prima (9.i) fornisce l'equazione:

$$-2 \bar{w}^3 + 3 \bar{w}^2 - 2 \bar{k} \bar{w} + \bar{k} = \bar{F} \quad (9.n)$$

Tale ramo prende vita per  $\varphi = 0$  e quindi per il valore di  $w$  che annulla la (9.m). Si trova facilmente:

$$\bar{w} = \bar{w}_{\text{crit}} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4 \bar{k}}) \quad (9.o)$$

in cui si è scartata la radice priva di significato fisico ( $\bar{w} > 1$ ).

Posta la (9.o) nella (9.l) si ha il valore critico:

$$\bar{F}_{\text{crit}} \equiv \bar{w} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4 \bar{k}}) \quad (9.p)$$

<sup>(1)</sup> Nella (9.c) si sarebbero potuti inserire anche i termini del quinto ordine.

Ovviamente le (9.p) assumono senso solo se:

$$\bar{k} < \frac{1}{4} \quad (9.q)$$

Il significato di tale limitazione è a ricercarsi nel fatto che una asta molto comprimibile, e si ricordi la definizione (9.k) di  $\bar{k}$ , non potrà mai instabilizzarsi. Al diminuire, infatti, della sua lunghezza decresce il denominatore della (9.g) ed  $F_{crit}$  aumenta; può dirsi in breve che  $F$ , da cui dipende la effettiva lunghezza, insegue  $F_{crit}$  e tale inseguimento non dà risultato se la (9.q) non è soddisfatta<sup>(1)</sup>.

Volendo infine porre la seconda delle (9.p) in modo confrontabile con la (9.g) si rinuncia alla adimensionalizzazione e risulta:

$$F_{crit} = EA \bar{F}_{crit} = \frac{k}{l} \frac{1}{2\bar{k}} (1 - \sqrt{1 - 4\bar{k}}) = \frac{k}{l} g(\bar{k}) \quad (9.r)$$

Nella seguente tabella sono consegnati alcuni valori della "funzione correttiva"  $g(\bar{k})$  al tendere verso la rigidità assiale ( $EA \rightarrow \infty$ ;  $\bar{k} \rightarrow 0$ ):

$\bar{k} =$	0,1000	0,0500	0,0100	0,0050	0,0010
$g =$	1,1270	1,0557	1,0102	1,0051	1,0010

Per  $\bar{k} \rightarrow 0$  la funzione correttiva assume il valore uno e la (9.g) viene ritrovata.

### 9.3. Analisi locale

La precedente metodologia è estremamente pretenziosa e, conseguentemente, complicata. Seguendo essa si vuole studiare, tutto insieme, il problema dell'equilibrio elastico di una struttura: ramo naturale e rami secondari. Come più volte accennato conviene spezzare l'intero problema in più fasi:

- determinazione del ramo naturale, ed è già stato fatto al capitolo 8. I risultati dello studio si danno per noti;
- individuazione dei punti di biforcazione e dei relativi valori dei carichi critici. Si dà qui per certa la loro esistenza;
- indagine sul comportamento post-critico, tesa principalmente alla individuazione della qualità dell'equilibrio sul ramo secondario.

L'intera ricerca, così frazionata, assume caratteri di maggiore fattibilità ed i risultati diventano perseguibili. Essa è localizzata nell'intorno dei punti di biforcazione, che si trovano sul ramo naturale (oltre che beninteso

<sup>(1)</sup> Nel problema reale della trave il gioco delle rigidità assiale e flessionale è sempre tale che il carico critico vero è prossimo a quello ottenuto per  $EA = \infty$  e dunque l'attuale problema non sussiste.

sul corrispondente ramo secondario) e può utilizzarsi la E.P.T. nella forma "locale" discussa nel capitolo 7.

Questa, poiché si parte da una configurazione di equilibrio e si annulla la (7.14.a), si scrive:

$$T = L_S^{(2)} - L_F^{(2)} + \Phi^{(2)} + \Phi^{(3)} + \Phi^{(4)} - \Delta F (\underline{f}^{(1)} + \underline{f}^{(2)}) \quad (9.1)$$

Ricorderemo che in essa il passato della struttura, ovvero l'influenza di quanto si è verificato fino alla situazione che si considera (configurazione di riferimento  $C_r$  coincidente con la configurazione di biforcazione  $C_b$ ), è contenuto:

- nel lavoro  $L_S^{(2)}$  che gli sforzi preesistenti  $S_r$  compiono per la deformazione conseguente alle  $q_i$  che si assumono nulle in  $C_r \equiv C_b$ ;
- nella geometria assunta dal sistema in  $C_r \equiv C_b$  che può, eventualmente, confondersi con quella iniziale in  $C_o$  (variazioni Euleriane);
- nel lavoro  $L_F^{(2)}$  che le forze preesistenti  $F_r$  compiono per gli spostamenti conseguenti alle  $q_i$ .

Gli altri termini, tutti dipendenti dalle sole  $q_i$ , esprimono ovviamente il futuro, ovvero quello che può accadere oltre la biforcazione.

Prima di proseguire nell'indagine osserveremo che alla configurazione a partire dalla quale risulta espressa la (9.1) sono state già date due attribuzioni definitorie:

- configurazione di riferimento:  $C_r$ ,
- configurazione di biforcazione:  $C_b$ ,

che identificano una particolare configurazione di equilibrio,  $C_o$ , del ramo naturale. Riallacciandosi a questo punto al discorso svolto nel paragrafo 7.5, suddivisione delle lagrangiane, può darsi alla configurazione esaminata anche la definizione utilizzata in tale sede:

- configurazione di frontiera:  $\overline{C}$ .

Nel prosieguo si indicherà pertanto la configurazione esaminata indifferentemente con  $C_r$ ,  $C_b$  o  $\overline{C}$  preferendosi la ultima notazione, soprilinea, in quanto essa consente, senza complicazioni di pedici, di contrassegnare in modo identico forze,  $\overline{F}$ , sforzi,  $\overline{S}$  o qualunque altro ente che si intenda valutato in corrispondenza di essa.

#### 9.4. I punti di biforcazione

Se si suppone di porsi in un punto di biforcazione,  $C_r \equiv C_b \equiv \overline{C}$ , che è in realtà incognito sia come configurazione geometrica che come vettore di carico  $\overline{F}$ , vanno poste, per la sua identificazione, le condizioni che esso sia parimenti equilibrato:

- nel sottospazio definito dalle lagrangiane  $q_k$  che identificano il prosieguo del ramo naturale (e questo è descritto tra  $C_o$  e  $\overline{C}$  dalle coordinate attive  $Q_k$  di cui le  $q_k$  sono gli incrementi a partire da  $\overline{C}$ );
- nel sottospazio definito dalle lagrangiane  $q_l$ , ove è sito l'avvio del ramo

secondario che interseca in  $\bar{C}$  quello principale (lungo il quale erano nulle le  $Q_i$  e lo sono del pari i loro incrementi  $q_i$ ).

Poiché il primo equilibrio è soddisfatto per ipotesi, occorrerà, per soddisfare il secondo, estremizzare la (9.1), per  $\Delta F = 0$ , solo rispetto alle  $q_i$ . Poiché si opera in un intorno limitato di  $\bar{C}$ , ricercandosi solo il punto di avvio del ramo secondario, possono trascurarsi le quote infinitesime di ordine più elevato assumendo:

$$T \approx T^{(2)} = L_S^{(2)} - L_F^{(2)} + \Phi^{(2)} \quad (9.2)$$

e scrivendo quindi le equazioni, EQUAZIONI DELLO STATO CRITICO:

$$\frac{dT^{(2)}}{dq_i} = T_i^{(2)} = (L_S^{(2)} - L_F^{(2)} + \Phi^{(2)})_i \quad (9.3)$$

In merito a queste va osservato, in primo luogo, che esse contengono l'incognito valore di  $\bar{F}$  (il carico critico) in  $L^{(2)}$  ed  $L_F^{(2)}$  cosicché, per le  $q_i$  considerate (ovvero per il modo deformativo che esse descrivono), basterà che sia non nullo uno solo di essi (e riesce di solito non nullo  $L_F^{(2)}$ ).

Va in secondo luogo considerato che la valutazione dei singoli termini della E.P.L. (9.2) è pensata eseguita a partire da  $\bar{C}$ . Per essere questa a priori incognita, e per determinarla occorrerebbe conoscere  $\bar{F}$ , si ricorre all'ipotesi di considerare geometricamente quasi coincidenti  $\bar{C}$  e  $C_0$ . Ciò conferisce il carattere di "approssimato" alle determinazioni ed un qualche accertamento sull'errore introdotto andrebbe eseguito; dal confronto con i risultati "corretti" sembra comunque che, nei casi reali, esso sia trascurabile ed a vantaggio di sicurezza (carico critico "vero" maggiore di quello determinato nell'ipotesi adottata). Non è escluso, comunque, che possa procedersi in via iterativa utilizzando il valore  $\bar{F}$  dedotto partendo dalla coincidenza di  $C_0$  per valutare  $\bar{C}$  e, da questa, una nuova  $\bar{F}$  fino alla quasi coincidenza di due valori successivi.

Tutto ciò premesso, si procede ora nell'esame delle equazioni dedotte e dei risultati che da esse possono trarsi.

### 9.5. Le equazioni dello stato critico

Il precedente sistema di equazioni è lineare omogeneo nelle  $q_i$  e contiene il valore di  $\bar{F}$ , per cui si ha biforcazione, nei termini:

$L_S^{(2)}$  dato che gli sforzi  $\bar{S}$  devono pensarsi funzioni note di  $\bar{F}$ ;

$L_F^{(2)}$  in modo esplicito;

e di tali termini, affinché biforcazione esista ( $q_i \neq 0$ ), dovrà esserne perlomeno uno diverso da zero.

Per chiarezza di discorso porremo nel prosieguo:

$$n' - n = N \quad \text{ed} \quad l \in [1, N] \quad (9.4)$$

e scriveremo la generica equazione (9.3) nella forma esplicita:

$$(a_{r1} - b_{r1} \bar{F}) q_1 + \dots (a_{rs} - b_{rs} \bar{F}) q_r + \dots (a_{rN} - b_{rN} \bar{F}) q_N = 0 \quad (9.5)$$

in cui ovviamente i coefficienti  $a_{rs}$  (costituenti la matrice delle rigidzze) trovano la loro origine in  $\Phi^{(2)}$  e quelli  $b_{rs}$  (costituenti la matrice instabilizzante) nei termini ove appare  $\bar{F}^{(*)}$ .

La richiesta di una soluzione non nulla (o diversa da quella banale  $q_l = 0$ ) impone che si ponga:

$$\Delta | a_{rs} - b_{rs} \bar{F} | = 0 \quad (9.6)$$

Tale equazione (equazione secolare) fornisce i valori critici dei carichi (o autovalori) e quindi i punti di biforcazione. Tali  $N = n - n'$  valori si diranno:

$$\bar{F}_1 \dots \bar{F}_r \dots \bar{F}_N \quad (9.7)$$

e, tra essi, ci soffermeremo usualmente solo su quello più piccolo cui riserveremo l'appellativo di critico. Se nella (9.7) si è proceduto ad un ordinamento per valori crescenti sarà:

$$F_{crit} = \bar{F}_1 \quad (9.8)$$

Notoriamente il soddisfacimento della (9.6) comporta che se una delle sue radici (autovalore) viene posta nel sistema (9.5) una delle equazioni perde la sua indipendenza; dalle restanti possono trarsi infinite soluzioni proporzionali tra loro (autosoluzioni o autovettori). In altri termini, assunta come pilota una generica  $q_1$ , tutte le altre potranno porsi come  $q_s = \gamma_s q_1$ .

Con dizione geometrica, vedi 2.3, diremo che ad ogni autovalore  $\bar{F}_r$  corrisponde, nell'intorno del punto di biforcazione che esso individua, un canale di deformazione (canale  $r$ -mo).

Lungo tale canale può svilupparsi per  $F = \bar{F}_r$  la deformazione del sistema o meglio, trattandosi di un intorno infinitesimo, la tendenza della deformazione nel punto. Il punto rappresentativo  $C$  si allontana da  $\bar{C}$ , spostandosi "inizialmente" nel piano  $F = \bar{F}_r = \text{cost}$ , seguendo un canale di deformazione così come mostrato indicativamente in figura 9.2: in essa la rappresentazione riguarda necessariamente il caso di due sole  $q_l$ .

Tale situazione è nota come di *INDIFFERENZA DELL'EQUILIBRIO* allo stato critico.

(\*) Avendo confuso geometricamente  $C_o$  e  $\bar{C}$  la matrice delle rigidzze ( $|a_{rs}|$ ), legata a  $\Phi^{(2)}$ , coincide con quella corrispondente a  $W^{(2)}$ ; mancato aggiornamento della matrice.

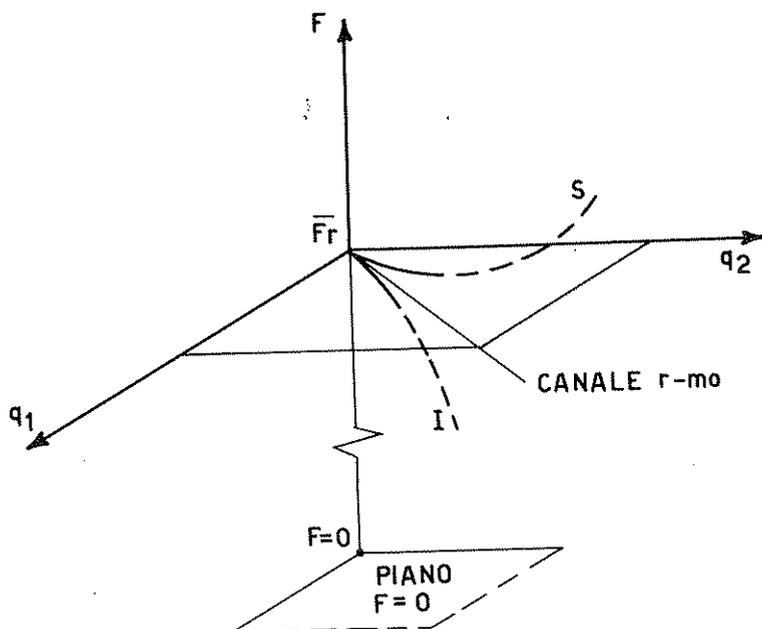


Fig. 9.2.

Ovviamente in figura tutto quello che riguarda il pre-critico (ramo naturale di equilibrio) non è rappresentato sviluppandosi nel sottospazio  $R^{n+1}, F=Q_k$ ; in termini di  $F$  tale sottospazio è compreso nell'intervallo:

$$F \in [0, \bar{F}_r]$$

e ivi può essere immaginato.

Nel concludere si dirà che nella precedente descrizione si sono anche accennati gli sviluppi possibili dei rami secondari anticipando le due evenienze di ramo secondario stabile  $S$ , o instabile  $I$ .

#### 9.5.1. Esempio

Si considera quale primo esempio il semplice sistema di fig. 9.3 già compiutamente esaminato nel precedente esempio 9.2.1.

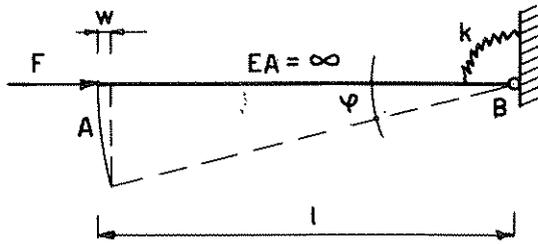


Fig. 9.3.

Per esso si assume  $q \equiv \varphi \Rightarrow \underline{f} \equiv w = l(1 - \cos\varphi)$

Operandosi nel 2° ordine sarà:  $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \Rightarrow w^{(2)} = l \frac{\varphi^2}{2}$

Va osservato che l'ipotesi di inestensibilità porta a trascurare lo spostamento pre-critico del punto A:

$$Q = w = \frac{Fl}{EA}$$

la cui esistenza non pregiudica l'equilibrio, pur confondendosi  $\bar{C}$  con  $C_0$  e dando quindi luogo a imprecisioni, poiché comunque  $F$  passa per il punto B.

Detta ipotesi di inestensibilità comporta anche che nella deformazione post-critica non vi sia alcuna variazione di lunghezza dell'asta cosicché è nullo  $s^{(2)}$  e con esso il lavoro che lo sforzo normale  $\bar{S} = N \equiv \bar{F}$  compirebbe per esso:

$$L_s^{(2)} = \bar{S} \underline{s}^{(2)} = 0.$$

La (9.1) si scrive:

$$\begin{aligned} T^{(2)} &= -L_F^{(2)} + \Phi^{(2)} = -F w^{(2)} + \Phi^{(2)} = \\ &= -\frac{1}{2} l F \varphi^2 + \frac{1}{2} k \varphi^2 \end{aligned}$$

Derivando ed eguagliando a zero si ottiene:

$$-lF\varphi + k\varphi = (k - lF)\varphi = 0$$

La soluzione banale è esclusa per:

$$k - lF = 0 \Rightarrow F = F_{crit} = \frac{k}{l} \quad (9.s)$$

La metodologia operativa adottata, in cui si è trascurata la deformazione pre-critica, è quella nota sotto il nome di variazioni euleriane. Essa comporta una valutazione approssimata di  $F_{crit}$  come risulta dal confronto col valore (9.r) dedotto nell'esempio 9.2.1.

Tale metodologia è comunque accettabile, e nei casi reali è di fatto impossibile far di meglio, solo se l'equilibrio pre-critico sussiste anche quando la struttura si pensi deformata.

Quando ciò non sia, e la situazione di partenza assunta è in realtà squilibrata, i risultati ottenibili sono erronei. Tale errore è non solo quantitativo ma, purtroppo, qualitativo e porta a confondere un problema di carico limite con uno di "carico critico asimmetrico" (vedi 8.6, 8.8 ed esempio 9.5.5).

### 9.5.2. Esempio

Si fa riferimento allo schema di figura 9.4 per il quale valgono integralmente le valutazioni e le considerazioni svolte nell'esempio precedente.

Si costruisce immediatamente la forma:

$$T^{(2)} = -\frac{1}{4} l F (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{2} k \varphi_1^2 + \frac{1}{2} k (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \quad (9.t)$$

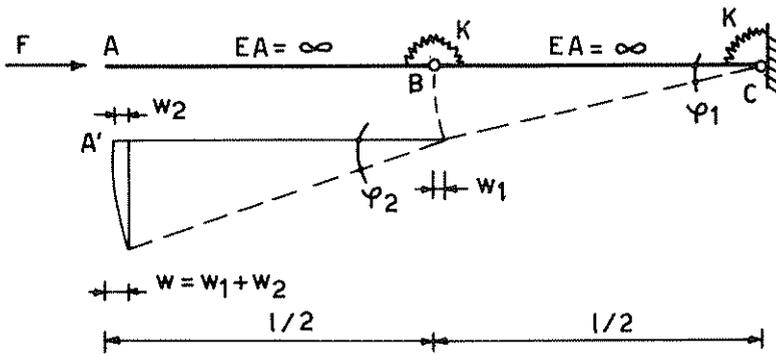


Fig. 9.4.

da cui si traggono le equazioni dello stato critico:

$$\begin{aligned} T_1^{(2)} &= (2k - \frac{1}{2}Fl) \varphi_1 - k\varphi_2 = 0 \\ T_2^{(2)} &= -k\varphi_1 + (k - \frac{1}{2}Fl) \varphi_2 = 0 \end{aligned}$$

L'equazione secolare si scrive:

$$(Fl)^2 - 6k(Fl) + 4k^2 = 0$$

ed i carichi critici (due gradi di libertà, due carichi critici) valgono:

$$\bar{F}_1 = 0,7639 \frac{k}{l} \quad ; \quad \bar{F}_2 = 5,2362 \frac{k}{l}$$

Il primo valore posto in una delle due equazioni di equilibrio individua il canale di avvio post-critico:

$$\varphi_{1,2} = 1,6180 \varphi_{1,1}$$

dove il primo pedice individua  $\bar{F}_1$ , il secondo le lagrangiane.

Al secondo valore,  $\bar{F}_2$ , corrisponde il canale:

$$\varphi_{2,1} = -0,6180 \varphi_{2,2}$$

Si considererà esplicitamente solo il più basso valore di  $F$  ed il canale corrispondente ponendo:

$$F_{crit} = 0,7639 \frac{k}{l} \quad \varphi_2 = 1,6180 \varphi_1$$

### 9.5.3. Esempio: la trave di Eulero

Con riferimento alla consueta rappresentazione di figura 9.5. si ipotizza una deformazione inestensionale in cui le  $q_i$  (vettore ad infinite componenti  $v(z)$ ) siano rappresentate dal canale considerato nell'esempio 2.4.2:

$$v(z) = v_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l} \quad (2.q)$$

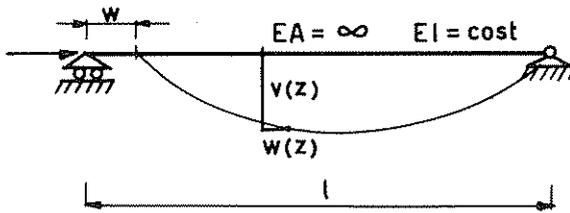


Fig. 9.5.

per il quale è stato già calcolato lo spostamento (vedi ivi):

$$w = w^{(2)} = \frac{\pi^2}{4l} v_1^2 \quad (2.r)$$

Calcolando  $\Phi^{(2)}$  si ottiene:

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)} &= \frac{EI}{2} \int_0^l v''^2 dz = \frac{EI}{2} v_1^2 \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \text{sen}^2 \frac{\pi z}{l} dz = \\ &= \frac{\pi^4 EI}{2 l^4} v_1^2 \frac{l}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}^2 \frac{\pi z}{l} d\left(\frac{\pi z}{l}\right) = \frac{\pi^4 EI}{2 l^3} v_1^2 \frac{1}{2} = \frac{\pi^4 EI}{4 l^3} v_1^2\end{aligned}$$

e può scriversi allora la E.P.T.:

$$T^{(2)} = -\bar{F} w^{(2)} + \Phi^{(2)} = -\bar{F} \frac{\pi^2}{4 l} v_1^2 + \frac{\pi^4 EI}{4 l^3} v_1^2$$

ed è individuato facilmente:

$$F_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

in conformità del valore noto.

#### 9.5.4. Esempio ..... erroneo

Alcuni Autori hanno ritenuto che la struttura di fig. 9.6 potesse essere studiata direttamente allo stato critico, come nei casi precedenti, trascurando la deformazione già avvenuta, il che equivale a porre  $EA_2 = \infty$  cui corrispondono gli sforzi  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = F$ .

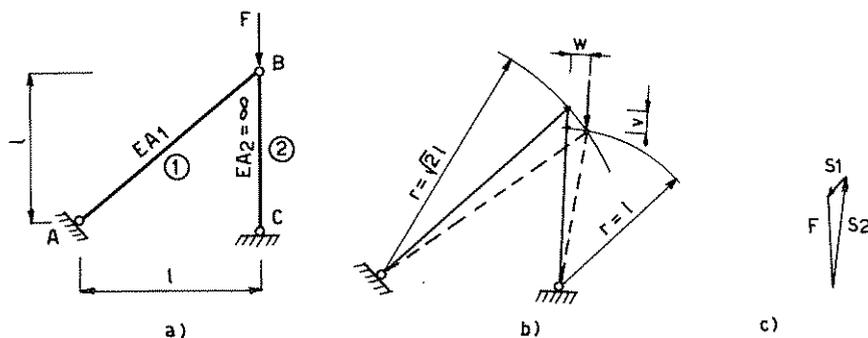


Fig. 9.6.

Ciò è del tutto erroneo perché un accorciamento dell'asta 2, e sia  $v$ , comporterebbe il cinematismo di fig. 9.6.b e l'equilibrio non può ivi sussistere con:

$$S_1 = 0, \quad S_2 = F$$

Deve necessariamente essere (fig. 9.6.c):

$$S_1 \neq 0, \quad S_2 \neq F$$

il che esige deformazioni elastiche già in atto in tutta la struttura.

Il caso rientra in quelli definiti di *equilibrio di 2ª specie* (vedi 8.5) ed esibisce un carico limite sul ramo naturale di equilibrio.

Il caso in esempio è quello "classico" che ha creato l'equivoca nascita dell'inesistente carico critico asimmetrico  $F_a$  (stabile - instabile), sostitutivo dell'effettivo  $F_{lim}$ , di cui detto in 8.6.

Se, nonostante i precedenti avvertimenti, si svolgesse l'esempio nella ipotesi  $EA_2 = \infty$ , e lo si propone come esercizio, si troverebbe:

$$F_a = \frac{EA_1}{2\sqrt{2}}$$

Il vero carico limite verrà determinato nel successivo esempio 10.6.1 ove si leggerà, per  $EA_2/EA_1 \rightarrow \infty$ :

$$F_{lim} \rightarrow 0,35 EA_1$$

#### 9.5.5. Esempio ..... erroneo e svolto

Si riconsidera l'arco ribassato dell'esempio 8.4.5, figura 9.7, per cui si ipotizza, nel 1° ordine, una rigidezza infinita delle aste ( $EA = \infty$ ).

Gli sforzi che nascono nelle aste stesse valgono, fig. 9.7,:

$$S = \frac{F}{2} \frac{1}{\sin \alpha} \approx \frac{Fl}{2h}$$

e ciò per il presupposto forte ribassamento della struttura.

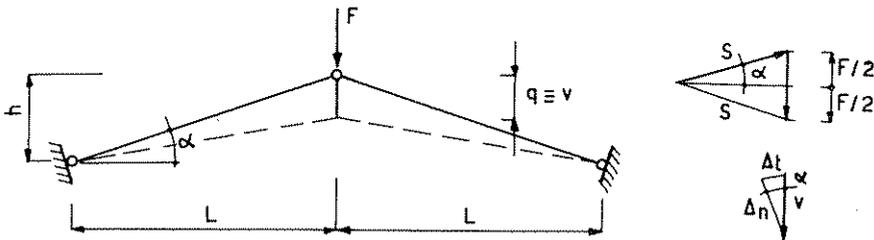


Fig. 9.7.

Le equazioni dello stato critico (9.3) si riducono ad una (le lagrangiane  $q_i$  sono rappresentate da  $v$ ):

$$\frac{dT^{(2)}}{dv} = (L_S^{(2)} - L_F^{(2)})_v + \Phi_v^{(2)} = 0$$

e devono esplicitarsi i vari termini in essa contenuti:

$L_S^{(2)}$  - Gli sforzi  $\bar{S}$  sono noti; la corrispondente deformazione  $\underline{s}^{(2)}$  del 2° ordine altro non è che la variazione di lunghezza  $\Delta l^{(2)}$  delle aste espressa nell'esempio 4.5.1.:

$$\Delta l^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\Delta n^2}{l}$$

Essendo lo spostamento  $\Delta n$  normale all'asta espresso proprio da  $v$ , e tenuto conto che gli sforzi  $S$  sono negativi (compressione), mentre  $\Delta l^{(2)}$  è definito positivo, risulta:

$$L_S^{(2)} = -2 S \Delta l^{(2)} = -\frac{F}{2h} v^2$$

$L_F^{(2)}$  - Non esiste una quota del secondo ordine di  $\underline{f} \equiv v$  ( $\underline{f}^{(1)} = v$ ,  $\underline{f}^{(2)} = 0$ ).

$$L_F^{(2)} = 0$$

$\Phi^{(2)}$  - Lo spostamento nella direzione delle aste è:

$$\Delta t = \Delta l^{(1)} = v \operatorname{tg} \alpha = \frac{vh}{l}$$

e pertanto:

$$\Phi^{(2)} = 2 \frac{EA \Delta l^{(1)2}}{2l} = \frac{EA h^2}{l^3} v^2$$

A sostituzioni effettuate l'equazione critica porge:

$$-\frac{F}{h} v + \frac{2 EA h^2}{l^3} v = 0$$

ed, esclusa la soluzione  $v = 0$  risulta:

$$F = \frac{2 EA h^3}{l^3} \quad (9.u)$$

Il valore trovato è ovviamente privo di ogni significato "critico" data la non liceità di trascurare la deformazione pre-critica come risulta chiaramente dal fatto che gli sforzi  $S$  non sono in equilibrio, in tale fase pre-critica, sul sistema deformato. Ciò accadeva invece negli esempi 9.5.1, 9.5.2 e 9.5.3 che sono, per tale motivo, validi.

La (9.u) dà in realtà quello che si è indicato in 8.6 come carico  $F_a$ , ovvero una limitazione superiore del carico limite studiato in 8.4.5 Nel caso considerato è:

$$F_{lim} = 0,385 \frac{EA h^3}{l^3} \ll F_a = 2 \frac{EA h^3}{l^3}$$

e la limitazione trovata è priva di ogni significato pratico.

### 9.6. Normalizzazione, diagonalizzazione e coefficienti di stabilità

Quanto segue è, al momento, di rilevanza nulla sotto l'aspetto applicativo e viene qui trattato per fornire ad un tempo:

- una pausa di riflessione;
- una suggestiva visione d'insieme;
- un quadro storico più completo;
- uno strumento per futuri sviluppi.

Così come con riferimento alle  $Q_i$  si sono definiti in 2.3 la norma e l'orientamento del vettore di configurazione, avente origine in  $C_0$ , analoghe valutazioni sono possibili per il vettore locale di configurazione  $q$  di componenti  $q_i$ .

Avendo al momento, stato critico, considerato diverse da zero, tra le  $q_i$ , solo le  $q_l$  sarà:

$$\| q \| = \eta = (\sum q_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\gamma_l = \frac{q_l}{\eta} \quad (9.9)$$

e le (9.9) esprimono, come già detto, l'avvio post-critico per  $F = F_{crit}$ .

Se in particolare si assume  $\eta = 1$ , e sarà  $\gamma_l \equiv q_l$ , si dirà che il "modo deformativo" connesso ad  $F_{crit}$  è stato normalizzato; ciò equivale a dire che l'esame nell'intorno di  $\bar{C} \equiv C_b$  può pensarsi sia stato condotto sulla superficie di una sfera unitaria di centro  $\bar{C} \equiv C_b$  (e di raggio unitario sì, ma piccolissimo; intorno del punto).

Di maggiore rilievo, i coefficienti di stabilità.

L'equazione secolare sia stata risolta: per ogni autovalore  $\bar{F}_r$  sia noto l'autovettore corrispondente  $q_r$  (o, con maggior significato fisico il "modo" deformativo corrispondente):

$$\bar{F}_r ; q_r [q_{r,1}, q_{r,2} \dots q_{r,r} \dots q_{r,n}] \quad r \in [1, N] \quad (9.10)$$

Essendo note le  $\bar{F}_r$  sarà sempre possibile sostituire al set di coordinate lagrangiane considerate,  $q_i$ , un altro set di variabili indipendenti, e siano  $u_r$  tale che il sistema di equazioni lineare completo (9.5) si spezzi in  $N$  equazioni disaccoppiate e siano:

$$(c_{rr} - d_{rr} \bar{F}_r) u_r = 0 \quad r \in [1, N] \quad (9.11)$$

Le radici della (9.11) sono ovviamente:

$$\bar{F}_r = \frac{c_{rr}}{d_{rr}} \quad \text{con} \quad r \in [1, N] \quad (9.12)$$

e cioè la successione di carichi critici già noti.

L'operazione che ha tramutato le (9.5) nelle (9.11) è una trasformazione

ne lineare e ciascuna delle nuove variabili,  $u_r$ , sostituisce, o meglio, esprime un intero "modo" deformativo, quello corrispondente ad  $\bar{F}_r$ .

Quando uno dei contenuti delle parentesi (9.11) si annulla, ed è  $F = \bar{F}_r$ , la corrispondente  $u_r$  si attiva; i coefficienti:

$$h_r = (c_{rr} - d_{rr} \bar{F}) \quad (9.13)$$

sono i *COEFFICIENTI DI STABILITÀ*.

Riepilogando:

se esistono  $N$  gradi di libertà, la struttura ha  $N$  modi deformativi (canali) privilegiati; questi sono descritti da  $N$  coordinate  $u_r$  (coordinate principali). Ciascuno di detti modi si attiva, e ciò vale sempre solo in un intorno infinitesimo di  $\bar{C} \equiv C_b$ , quando, percorrendo il ramo naturale, si attinge il valore  $\bar{F}_r$  del carico.

L'utilità di quanto precede, fatto salvo l'aspetto concettuale che è notevolissimo, è, come detto inizialmente, del tutto inesistente.

Modi privilegiati (o principali) e corrispondenti variabili principali, nonché coefficienti di stabilità, sono costruibili solo *a posteriori* ovvero a problema già risolto (si farà riferimento alle coordinate principali nello studio del post-critico; capitolo 10).

#### 9.6.1. Esempio

Nel caso già svolto in 9.5.2 si operi con l'ottica del presente paragrafo.

Nello studio precedente sono stati individuati i carichi critici del sistema ed i corrispondenti canali critici.

Effettuata per entrambi la normalizzazione (eliminazione della indeterminazione imponendo:  $\sum \varphi_{r,i}^2 = 1$ ), risulta:

$$\text{MODO 1} \quad \bar{F}_1 = 0,7639 \text{ k/l} \quad \varphi_{1,1} = 0,5257 \quad \varphi_{1,2} = 0,8506$$

$$\text{MODO 2} \quad \bar{F}_2 = 5,2362 \text{ k/l} \quad \varphi_{2,1} = 0,8506 \quad \varphi_{2,2} = -0,5257$$

Le coordinate "principali" vengono costruite ponendole nella forma generale (appaiono le  $q$  invece delle attuli  $\varphi$ ):

$$u_r = \sum q_{r,i} q_i \quad (9.14)$$

ovvero operando una trasformazione lineare retta dallo Jacobiano  $|q_{r,i}|$ .

Ciò nel caso in esame dà luogo al sistema:

$$u_1 = 0,5257 \varphi_1 + 0,8506 \varphi_2 \quad (9.v)$$

$$u_2 = 0,8506 \varphi_1 - 0,5257 \varphi_2$$

e si vede come ciascuna coordinata principale  $u$  contenga un intero "modo" deformativo.

Operando la trasformazione inversa, ovvero risolvendo le (9.v) rispetto alle  $\varphi$ , si trova:

$$\varphi_1 = 0,5257 u_1 + 0,8506 u_2$$

$$\varphi_2 = 0,8506 u_1 - 0,5257 u_2$$

Ponendo queste nella espressione (9.t) della E.P.L. tale forma quadratica risulta "diagonalizzata", perdendo perciò i termini misti (prodotto  $\varphi_1 \varphi_2$ ), e diventa <sup>(1)</sup>:

$$T^{(2)} = -\frac{1}{4} l F (u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2} k (0,3819 u_1^2 + 2,6176 u_2^2) \quad (9.z)$$

e le equazioni di equilibrio, ormai disaccoppiate, sono:

$$T_1^{(2)} = (-0,5000l F + 0,3819k) u_1 = 0$$

$$T_2^{(2)} = (-0,5000l F + 2,6176k) u_2 = 0$$

I contenuti delle parentesi sono i *COEFFICIENTI DI STABILITÀ* e, dal loro annullamento, si ritrovano i carichi critici di partenza:

$$\bar{F}_1 = 0,7639 k/l \quad \bar{F}_2 = 5,2362 k/l$$

col che si chiude una tautologia.

Nel concludere ripeteremo ancora una volta che lo studio dello stato critico non trae alcun vantaggio da operazioni come:

- normalizzazione;
  - diagonalizzazione;
  - costruzione dei coefficienti di stabilità;
- ma che di contro:
- la ricostruzione *a posteriori* è estremamente chiarificatrice;
  - la introduzione dei "modi deformativi" consente, come in dinamica, la facile costruzione di una qualsiasi possibile configurazione;
  - la identificazione dei modi con canali di deformazione privilegiati è molto significativa.

---

<sup>(1)</sup> Il peccato è che questa operazione non può farsi *a priori* ma quando si è già risolto il problema.

### 9.7. I sistemi ad un grado di libertà: osservazioni

Pur nella inesistenza in ambito strutturale di sistemi così caratterizzati, la loro importanza nei problemi di stabilità dell'equilibrio è stata ed è sempre molto elevata.

Sotto l'aspetto didattico ed esplicativo essi introducono il problema in molti testi; sotto l'aspetto applicativo ad essi molto spesso ci si riconduce, e basterà citare TIMOSHENKO per ricordare quanti utili risultati possono ottenersi con tale modalità operativa.

Il grado di libertà di cui si parla è naturalmente rappresentativo di quanto può accadere a partire dal punto di biforcazione, e qui si parlerà del solo valore del carico critico, cosicché il pre-critico (ramo naturale) è del tutto ignorato e sostituito da una ipotesi di rigidità (o indeformabilità) che lo fa coincidere con l'asse delle  $F$ . In altri termini viene supposto che all'atto della biforcazione la configurazione di equilibrio,  $\bar{C}$ , occupata dal sistema sia ancora geometricamente coincidente con  $C_0$  (variazioni Euleriali).

La lagrangiana che si attiva in tali condizioni si dirà, in conformità con la simbologia attuale,  $q$ , e la energia potenziale che compete a configurazioni site nell'intorno di quella di biforcazione è, concettualmente, quella locale:

$$T = L_S + \Phi - L_F \quad (9.15)$$

dove  $F$  è il valore del parametro di carico in  $\bar{C}$ .

Nella discussione che si conduce sulla quota di ordine più basso di  $T$ , la  $T^{(2)}$  già considerata nella (9.2), potrà trarsi in evidenza  $F$  sia da  $L_S^{(2)}$  che da  $L_F^{(2)}$  e, detti  $\tilde{L}_S^{(2)}$  ed  $\tilde{L}_F^{(2)} \equiv \underline{f}^{(2)}$  i valori assunti da tali quote energetiche per  $F = 1$ , scrivere:

$$T^{(2)} = F \left( \tilde{L}_S^{(2)} - \tilde{L}_F^{(2)} \right) + \Phi^{(2)} \quad (9.16)$$

Essendo la (9.16) quadratica in  $q$  essa assume la forma esplicita:

$$T^{(2)} = (a - b F) q^2 \quad (9.17)$$

dove si sono indicati rispettivamente con  $a$  e  $b$  i valori assunti da  $\Phi^{(2)}$  e dal coefficiente di  $F$ , intrinsecamente negativo, per  $q = 1$ .

Si ha allora che annullare la derivata di  $T^{(2)}$ , (rendere estrema la funzione), equivale ad annullare la stessa  $T^{(2)}$  cosicché l'equazione critica viene spesso posta come:

$$T^{(2)} = 0 \quad \text{invece di} \quad T_q^{(2)} = 0 \quad (9.18)$$

avendosi comunque:

$$F_{crit} = \frac{a}{b} \doteq \frac{\Phi^{(2)}}{\tilde{L}_F^{(2)} - \tilde{L}_S^{(2)}} \quad (9.19)$$

La (9.19) è la formulazione di TIMOSHENKO più volte ricordata che si utilizza riconducendo un sistema con più gradi di libertà ad uno solo, prefissando un plausibile canale di deformazione, ovvero i mutui rapporti tra le lagrangiane (v. esempio 9.5.3 con  $q \equiv v_1$ ).

In merito alla prima delle (9.18) va osservato che essa ha dato luogo a più di un equivoco perché la sua validità, piena ed assoluta nel caso di un grado di libertà dove la unica  $q$  rappresenta proprio il canale critico, è stata spesso indebitamente estesa al caso generale affermando che nell'intorno di  $\bar{C}$  è nulla la  $T^{(2)}$ . Ciò non è assolutamente vero dato che a tale nullità si perviene solo lungo il canale critico; per qualsiasi altra variazione di configurazione, secondo direzioni diverse, sarà invece  $T^{(2)} \neq 0$ .

CAPITOLO 10

**LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO: I RAMI SECONDARI**

(Aldo Raithel e Nicola Augenti)

### 10.1. Premessa

Il presente capitolo è il naturale sviluppo del precedente; supposti noti punti di biforcazione e carichi critici, si ricercano i rami di equilibrio passanti per tali punti.

Nell'ottica in cui l'intero problema dell'equilibrio elastico si è spezzato in tre parti:

- ramo principale,
- stato critico,
- ramo secondario,

si è all'ultima fase. Questa è senza dubbio la più delicata ed è stata indagata, sistematicamente, solo negli ultimi decenni.

Per un lungo periodo, infatti, e si è comunque in epoca recente, lo *STATO CRITICO* ha costituito, nell'ambito strutturale, l'analogo delle Colonne d'Ercole nei problemi di navigazione del mondo antico: un limite dal quale era opportuno tenersi molto discosti. Salvo che per i più iniziati, vigeva il *MITO DELL'INDIFFERENZA* consistente, in effetti, nel timore di avvicinarsi ad una configurazione del sistema a partire dalla quale potessero instaurarsi spostamenti arbitrariamente grandi (indifferenza = non ritorno).

Tale timore, sotto l'aspetto operativo, si traduceva nell'adozione di un elevato grado di sicurezza.

Nella continua esigenza del leggero e dell'esile, e la tecnologia costantemente favorisce ed impone tale tendenza, una migliore conoscenza del pericolo reale si è resa sempre più necessaria e ciò al fine di quantificare in modo più ragionato proprio il grado di sicurezza.

Fermo restando che è praticamente da escludere l'ipotesi di una struttura progettata in modo da "lavorare" nel post-critico (ovvero che percorra un ramo secondario), e ciò perché anche ove teoricamente possibile, si verificherebbero spostamenti di certo inaccettabili, informazioni sul "cosa avverrebbe se ...." sono peraltro fondamentali.

Tali informazioni possono dedursi, ovviamente, proprio dal tracciamento dei rami secondari, ma le complessità di calcolo, al di là di facili esemplificazioni, vedi 9.2.1, sono di fatto insormontabili.

In via più limitata, di tali rami secondari può prendersi in esame solo

un piccolo tratto, quello nell'intorno del punto di biforcazione, o stato critico, e ricercare ivi le sue proprietà o, meglio, la caratterizzazione dell'equilibrio, stabile o instabile, che lungo esso si instaura.

Nel primo caso, stabilità, è assicurato che dopo  $F_{crit}$  possa ancora avervi una  $\Delta F > 0$  e ciò è tranquillizzante: si può erodere il "grado di sicurezza" ed avvicinarsi maggiormente ad  $F_{crit}$ .

Nel secondo caso, instabilità, è certo che si evolverà una deformazione per cui debba essere  $\Delta F < 0$  per conservare l'equilibrio; ciò è inaccettabile ed occorre premunirsi dal pericolo con un maggiore allontanamento da  $F_{crit}$ : il generico "grado di sicurezza" deve essere più elevato.

## 10.2. Il ramo secondario

Nel prosieguo, fermo restando la generalità della discussione, faremo esplicito riferimento al primo punto di biforcazione,  $\bar{F}_1 = F_{crit}$ , e pertanto alla configurazione  $\bar{C}$  dove il ramo naturale interseca il primo ramo secondario.

In tale ottica riguardiamo il problema dell'equilibrio elastico nella sua completezza, ovvero come è stato posto in (9.2), e scriviamo le equazioni di equilibrio (8.4) nell'ipotesi di avere adottato una teoria di ordine tale da conferire piena significatività ai singoli termini. In via esplicita anticiperemo che occorrerà giungere almeno fino al quarto grado nelle lagrangiane:

$$W_i^{(2)} + W_i^{(3)} + \dots - F(f_i^{(1)} + f_i^{(2)} + f_i^{(3)} + \dots) = 0 \quad \forall i \in [1, n] \quad (10.1)$$

Affinché esista biforcazione non tutte le  $Q_i$  saranno attive dall'inizio,  $F = 0$ , ma procedendo con continuità, ovvero per  $F$  crescente a partire da tale valore, se ne attiverà solo una parte e sia  $n'$  il loro numero; tali lagrangiane verranno indicate con  $Q_k$  ove  $k = 1 \dots n'$ .

Pervenuti ad  $\bar{F}_1$  si attiveranno anche le restanti  $N = n - n'$  lagrangiane, ovvero le coordinate libere in precedenza nulle; esse siano le  $Q_l$  ove  $l = 1 \dots N$ .

Le  $n$  equazioni (10.1) si potranno separare nei due gruppi:

$$W_k^{(2)} + W_k^{(3)} + \dots - F(f_k^{(1)} + f_k^{(2)} + f_k^{(3)} + \dots) = 0 \quad \forall k \in [1, n] \quad (10.2)$$

$$W_l^{(2)} + W_l^{(3)} + \dots - F(f_l^{(2)} + f_l^{(3)} + \dots) = 0 \quad \forall l \in [1, N] \quad (10.3)$$

Nelle (10.3) saranno ovviamente nulli i termini costanti  $f_l^{(1)}$ , altrimenti si presenterebbero come le (10.2), e si tornerebbe ad un problema unitario per mancanza di coordinate libere.

Risultando per tale motivo le (10.3) omogenee nelle  $Q_l$  (e cioè costituite solo da termini contenenti potenze delle  $Q_l$  e prodotti, di vario grado, del tipo  $Q_l Q_r$ ) esse consentono, per  $F$  qualunque, la soluzione  $Q_l = 0$ .

Posta questa nelle (10.2) si ha un sistema nelle sole  $Q_k$ , la cui soluzione:

$$Q_k(F) \neq 0 \quad Q_i = 0 \quad \text{per } F \geq 0 \quad (10.4)$$

dà luogo al ramo naturale (o principale) di equilibrio. Se si tenta, per  $F \neq \bar{F}_1$  una soluzione del sistema completo, (10.2) + (10.3) = (10.1), che si diparta dal ramo (10.4), essa risulta impossibile. Solo quando si sia raggiunta la configurazione  $\bar{C}$ , ed  $F$  ivi attinge il valore  $\bar{F}_1$ , la caratteristica di immaginarietà della soluzione completa viene perduta.

Si attivano le coordinate  $Q_i$  e si rende possibile, oltre la (10.4), la soluzione:

$$Q_k(F) \neq 0 \quad Q_i(F) \neq 0 \quad \text{per } F \neq \bar{F}_1 \quad (10.5)$$

costituente il ramo secondario che va percorso facendo variare con continuità  $F$  a partire dalla "origine"  $F = \bar{F}_1$ , (il ramo naturale si evolveva dalla "origine"  $F = 0$ ).

Se tale ramo, nello spazio  $R^{n+1}$  configurazione-carico, si sviluppa al di sopra del piano  $F = \bar{F}_1$  esso sarà stabile risultando ascendente la sua curva caratteristica: si dirà che l'equilibrio allo *STATO CRITICO* è *STABILE*.

L'evolversi del ramo secondario al di sotto di  $F = \bar{F}_1$  comporta, ovviamente, la situazione contraria: equilibrio allo *STATO CRITICO INSTABILE*. In tal caso  $\bar{F}_1$  si configura come un vero e proprio carico limite sul ramo secondario.

La precedente analisi ha l'indubbio merito di inquadrare concettualmente il problema nei suoi termini reali, ed il precedente esempio 9.2.1 rispecchia fedelmente il comportamento qui descritto, ma conduce purtroppo, in sede applicativa, ad ostacoli insormontabili per poco che il caso a studiarsi sia più complesso di quello ricordato. Si è quindi costretti, come detto in premessa, ad indagini molto più limitate che valgano almeno a chiarire quale sia la tendenza iniziale della struttura quando, raggiunto  $F_{crit}$  e postisi quindi sul ramo secondario, si inizi a percorrerlo. La prima analisi, condotta proprio per la individuazione di  $F_{crit}$ , e quindi sulla quota  $T^{(2)}$  della intera  $T$ , fa definire, e siamo nel passato della ricerca sull'argomento, lo stato critico indifferente. A tale dizione non negheremo neanche oggi ogni significato; potrà attribuirsi, infatti, ad essa almeno quello che il ramo secondario può essere imboccato in un verso arbitrario, e ciò stante la sua simmetria rispetto alle lagrangiane  $Q_i \equiv q_i$  che si attivano su esso.

Ciò premesso, ogni ulteriore informazione potrà dedursi unicamente da una espressione più completa della E.P.T. e contenente quindi altri termini oltre quello,  $T^{(2)}$ , da cui si sono dedotte le equazioni dello stato critico che hanno consentito di individuare, oltre gli autovalori (carichi critici) anche gli autovettori (canali critici corrispondenti).

Ad una tale espressione dell'energia, valutata nell'intorno del punto di biforcazione che è ormai noto, e quindi locale, daremo il nome di secondaria in quanto dovrà contenere sostanzialmente solo termini atti ad indagare tale ramo di equilibrio.

Supposta nota la forma che la descrive, essa può essere utilizzata in due modi diversi.

Nel primo, posto  $F = F_{crit} + \Delta F$ , si procede come d'uso ricercando, tramite le equazioni  $T_i = 0$ , il legame tra  $\Delta F$  e le  $q_i$ .

Nel secondo, tenuto presente che l'energia locale è la variazione di quella globale, a partire dalla configurazione di riferimento (in questo caso quella critica), si indaga sul segno della sua quota di ordine più basso non nulla.

### 10.3. L'energia secondaria

Rifacendosi ad una espressione della E.P.L. ( $\equiv \delta T_{tot}$ ) non legata all'ordine di una teoria, utilizzeremo la (7.12) e la (7.13) che, per la nullità di  $T^{(1)}$  dovuta all'equilibrio esistente in  $\bar{C}$ , porgono:

$$T = \sum T^{(k)} = \sum \left[ (L_S^{(k)} - L_F^{(k)} + \Phi^{(k)}) - \Delta F \cdot \underline{f}^{(k)} \right] \quad (10.6)$$

in cui, per la simmetria del problema, saranno presenti solo i termini pari<sup>(1)</sup>.

Su questa può osservarsi, e si è già così operato in 8.8 e 9.7, che essendo nota  $\bar{C}$  sono noti gli sforzi  $\bar{S}$  ivi presenti dati in funzione di  $F_{crit}$  e che quindi tale valore può trarsi in evidenza da  $L_S^{(k)}$  ed  $L_F^{(k)}$ ; contrassegnate con  $\sim$  le loro espressioni per  $F = 1$ , si può allora scrivere:

$$L_S^{(k)} - L_F^{(k)} = F_{crit} \left( \tilde{L}_S^{(k)} - \tilde{L}_F^{(k)} \right) = -F_{crit} \tilde{L}^{(k)} \quad (10.7)$$

avendo indicato con  $\tilde{L}^{(k)}$  la somma algebrica delle due forme, di ordine  $k$  nelle lagrangiane, contenute in parentesi; naturalmente, affinché la biforcazione sussista, almeno una di quelle di ordine due deve risultare non nulla e, di solito, riesce tale  $\tilde{L}_F^{(2)}$ .

Operata la sostituzione (10.7) nella (10.6) questa, arrestandosi a  $k = 4$ , diviene:

$$T = \left( \Phi^{(2)} - F_{crit} \tilde{L}^{(2)} \right) + \left( \Phi^{(4)} - F_{crit} \tilde{L}^{(4)} \right) - \Delta F \left( \underline{f}^{(2)} + \underline{f}^{(4)} \right) \quad (10.8)$$

Prima di passare alla utilizzazione di quest'ultima osserveremo che finora nessuna ipotesi semplificativa è stata introdotta e che nei singoli termini devono pensarsi contenute tutte le lagrangiane  $q_i$  e, pertanto, sia quelle rappresentative di incrementi delle  $Q_i$ , già attive sul ramo naturale (la generica di tale insieme si è indicata con  $q_*$ ), che quelle che si sono attivate

<sup>(1)</sup> Tra questi, oltre ovviamente a quello corrispondente a  $k = 2$ , sarà di solito sufficiente considerare solo il successivo,  $k = 4$ .

sul ramo secondario (dette  $q_l$ ). Nello studio del post-critico, che è quello che qui si intende eseguire, tutti gli Autori, implicitamente, ritengono la E.P.L. dipendente solo dalle ultime, le  $q_l$ , e le  $q_k$  non vengono considerate. Ciò è in effetti ad ascriversi: o al considerare sistemi elasto-rigidi in cui il ramo naturale è inesistente (e con esso le  $Q_k$ ), o, nel caso di sistemi elastici, a ritenere trascurabile il tipo di deformazione che ha caratterizzato il ramo naturale. In entrambi i casi scompaiono le  $q_k$  ed energia potenziale totale, E.P.T., e locale, E.P.L. si identificano.

A causa di quanto osservato diremo che:

- nel caso di sistemi ideali privi di un vero e proprio ramo naturale, ovvero senza tracce del passato, i successivi sviluppi sono concettualmente rigorosi e la validità numerica dei risultati è legata solo al numero di termini della (10.6) posti in conto;
- nel caso di sistemi reali, l'indagine è significativa, invece, solo in un ambito di prossimità a  $\bar{C}$  in cui le deformazioni degli organi elastici, intervenuti nella evoluzione del ramo naturale, possano ritenersi invariate (stazionarietà delle  $Q_k \Rightarrow$  nullità delle  $q_k$ ).

Non sussistendo dubbi che nello studio dell'equilibrio delle strutture si ricada nel secondo caso, sorprende come molti Autori pretendano descrivere, con le sole  $q_l$ , ampi tratti dei rami secondari. Sorprende ancora di più come altri Autori, quasi riguardando alcune deformazioni elastiche come fastidiose "imperfezioni", si situino spesso, e non solo in questo problema, nella irrealtà del primo caso.

Chiarito l'ambito di significatività dei risultati ottenibili si passa ora alla utilizzazione della (10.8).

Alcuni Autori pongono eguale a zero il contenuto della prima parentesi sostenendo che, per  $\Delta F = 0$ , è:

$$T^{(2)} = \Phi^{(2)} - F_{crit} \cdot \tilde{L}^{(2)} \quad (10.9)$$

e che le equazioni dello stato critico, dedotte annullando proprio le derivate di tale forma quadratica, implicano, per note proprietà, la nullità della forma stessa.

Con ciò, e trascurato  $f^{(4)}$  rispetto ad  $f^{(2)}$ , la E.P.L. si riduce a:

$$T = \left( \Phi^{(4)} - F_{crit} \tilde{L}^{(4)} \right) - \Delta F f^{(2)} \quad (10.10)$$

La generica equazione di equilibrio, e si deriva rispetto a  $q_l$ , può scriversi:

$$\Delta F = \frac{\left( \Phi^{(4)} - F_{crit} \tilde{L}^{(4)} \right)_l}{f_l^{(2)}} \quad (10.11)$$

e risulta così descritto il ramo secondario.

Se l'indagine si limita alla qualità dell'equilibrio basterà porre, nella (10.10),  $\Delta F = 0$  ed esaminare il segno assunto dalla  $T^{(4)}$ , locale, coincidente col  $\delta^{(4)}T$  della E.P.T.:

$$T^{(4)} = \Phi^{(4)} - F_{crit} \cdot \tilde{L}^{(4)} \quad (10.12)$$

In merito alle precedenti deduzioni, che si fanno risalire fino a KOITER, è stato obiettato che la (10.9) si annulla solo lungo la direzione critica ovvero se si pongono, in  $\Phi^{(2)}$  ed  $L^{(2)}$ , le componenti dell'autovettore corrispondente ad  $F_{crit} = \bar{F}_1 : q_1$ .

A seguito di ciò il ramo secondario espresso dalle (10.11) è in realtà a deformazione guidata; un eventuale giudizio di stabilità espresso dalla (10.12) è significativo solo lungo il canale critico e quindi non sufficiente.<sup>(1)</sup>

Raccogliendo tali osservazioni indicheremo nel seguito col pedice  $c$  (critico) le determinazioni eseguite dando alle lagrangiane i valori che loro competono quali componenti del primo autovettore,  $q_1 \equiv q_c$ , che supporremo normalizzato.

La  $T^{(2)}$  espressa dalla (10.9), sarà quindi considerata non nulla mentre nulla risulterà la  $T_c^{(4)}$  valutata lungo il canale critico; lungo tale canale la  $T^{(4)}$ , fornita dalla (10.12), assumerà anch'essa un valore numerico preciso,  $T_c^{(4)}$ , che è peraltro quello già considerato nella modalità operativa prima esposta.

Non resta a questo punto che precisare, nello spazio delle configurazioni  $C(q)$ , l'ambito in cui si intende operare. Già si è detto che questo non può essere che un intorno limitato di  $\bar{C}$ , e ciò parlando di una "prossimità" a tale configurazione di biforcazione. In effetti la considerazione che per  $q \rightarrow O$  il ramo secondario tende al canale critico,  $q \rightarrow q_c \rightarrow O$ , consente di limitare tale intorno ad un cono avente come asse proprio il canale critico. Nell'interno di tale cono il più generico vettore spostamento  $q$  potrà costruirsi componendo i modi deformativi espressi dagli autovettori normalizzati e scrivendo:

$$q = \alpha \left( q_1 + \sum_2^N \beta_r q_r \right) \quad (10.13)$$

In questa, la evoluzione della deformazione, a partire da  $\bar{C}$ , è affidata al parametro  $\alpha$  (assumendosi  $\alpha = O$  in  $\bar{C}$ ); le  $\beta_r$  esprimono invece lo "scostamento" del ramo di equilibrio dal canale critico, e vanno intese piccole come  $\alpha$  (dello stesso ordine) volendo mantenersi nella prossimità di tale canale.

A chiarimento dell'ottica attuale ripeteremo che l'indagine si svolge con esclusivo riferimento alle lagrangiane  $q_l$  e che la generica di esse, come componente del vettore  $q$  che chiameremo  $q_s$ , si esprime:

$$q_s = \alpha \left( q_{1s} + \sum_2^N \beta_r q_{rs} \right) \quad (10.14)$$

in piena aderenza alla (10.13).

<sup>(1)</sup> Un giudizio di instabilità,  $T^{(4)} < O$ , sarebbe invece definitivo bastando che tale condizione si verifici anche per una sola  $\delta C$  nell'intorno di  $\bar{C}$ .

Riscritta sinteticamente la (10.8), utilizzando le eguaglianze (10.9) e (10.12), e trascurando in essa  $\underline{f}^{(4)}$  rispetto ad  $\underline{f}^{(2)}$ , risulta:

$$T = T^{(2)} + T^{(4)} - \Delta F \cdot \underline{f}^{(2)} \quad (10.15)$$

ed in questa vanno date alle lagrangiane le espressioni (10.14) che loro competono nell'ambito in cui si opera l'indagine.

Operando sui termini quadratici, ed essendo a somma nulla per l'ortogonalità degli autovettori i doppi prodotti, essi assumono le espressioni:

$$T^{(2)} = \alpha^2 T_c^{(2)} + \alpha^2 \sum_{r=2}^N \beta_r^2 T_r^{(2)} = \alpha^2 \sum_{r=2}^N \beta_r^2 T_r^{(2)} \quad (10.16)$$

$$\underline{f}^{(2)} = \alpha^2 \underline{f}_c^{(2)} + \alpha^2 \sum_{r=2}^N \beta_r^2 \underline{f}_r^{(2)} \approx \alpha^2 \underline{f}_c^{(2)} \quad (10.17)$$

Nella prima, stante la nullità di  $T^{(2)}$  lungo il canale critico ( $T_c^{(2)} = 0$ ) appaiono i valori,  $T_r^{(2)}$ , assunti dalla (10.9) quando le valutazioni numeriche vanno eseguite introducendo gli autovettori normalizzati di indice  $r \neq 1$ . Essendo  $T^{(2)}$  minima, e nulla, lungo il canale critico risulterà:

$$T_r^{(2)} > 0 \quad \forall r \in [2, N] \quad (10.18)$$

e la positività di  $T^{(2)}$  è assicurata lungo tutte le direzioni, distinte da quella critica, uscenti da  $\bar{C}$ .

Passando ad operare su  $T^{(4)}$ , e trascurando i termini di ordine più elevato del quarto in  $\alpha$  e nelle  $\beta_r$  che definiscono l'ampiezza della deformazione, si ha semplicemente:

$$T^{(4)} = \alpha^4 T_c^{(4)} \quad (10.19)$$

essendo  $T_c^{(4)}$  la già considerata determinazione numerica di  $T^{(4)}$  cui si perviene ponendo nella sua espressione il primo autovettore normalizzato ( $c \equiv 1$ ).

Introdotte nella (10.15) le (10.16), (10.17) e (10.19) si ha:

$$T = \alpha^2 \left[ \sum_{r=2}^N \beta_r^2 T_r^{(2)} + \alpha^2 T_c^{(4)} - \Delta F \cdot \underline{f}_c^{(2)} \right] \quad (10.20)$$

e su questa va svolta ogni ulteriore considerazione tenendo presente che i parametri che identificano la configurazione generica sono rappresentati da  $\alpha$  e dalle  $\beta_r$ .

Nel prosieguo considereremo  $\Delta F = 0$  e, ritrovandoci quindi in  $\bar{C}$  con  $F = F_{crit}$ , esamineremo il segno di  $T$  quando ci si allontana da tale configurazione. Attesa la inessenzialità di  $\alpha^2$  in una tale ricerca, e posto:

$$\bar{\beta}_r = \frac{\beta_r}{\alpha} \quad (10.21)$$

l'attenzione va rivolta in definitiva su:

$$\frac{T}{\alpha^2} = \sum_r^N \bar{\beta}_r^2 T_r^{(2)} + T_c^{(4)} \quad (10.22)$$

che costituisce l'oggetto di ogni ulteriore indagine.

#### 10.4. Qualità dell'equilibrio allo stato critico

Nel modo ristretto in cui il problema viene affrontato, qualità dell'equilibrio nella configurazione  $\bar{C}$  posta sul ramo secondario ( $\bar{C}$  = punto di biforcazione), ci si è ricondotti alla impostazione del capitolo 1.

La qualità dell'equilibrio viene definita dal segno del lavoro che si compie nell'allontanamento da  $\bar{C}$  e quindi da quello della sua quota più significativa. Tale lavoro è fornito dalla E.P.L., valutata nella configurazione in esame, e la sua quota più significativa è espressa dalla (10.22); tenuto conto che la E.P.L. è stata formata in modo che la sua positività coincida con una prevalenza del lavoro resistente e la sua negatività con quella del lavoro motore, la stabilità richiede, ovviamente, che essa sia positiva per ogni allontanamento da  $\bar{C}$  (minimo dell'energia in  $\bar{C}$ ).

Ciò premesso, ricordiamo ancora che nella (10.22)  $T_r^{(2)}$  e  $T_c^{(4)}$  rappresentano valori numerici e precisamente quelli assunti quando in essi si attribuiscono:

- al carico  $F$  il valore  $F = \bar{F}_1 = F_{crit}$ ;
- alle variabili  $q_i$  le componenti del primo autovettore (quello che si attiva allo stato critico) ed il pedice è  $c$ , o di uno dei successivi, ed il pedice è  $r$ .

Notato da ultimo che le  $\bar{\beta}_r$  rappresentano "allontanamenti" dal canale critico, e che le  $T_r^{(2)}$  sono tutte positive (si rimanda ai righi successivi alla (10.18) dove ciò è stato discusso), si può dar luogo alle indagini.

#### IL VERDETTO DI STABILITÀ

Se  $T_c^{(4)}$  risulta positiva il lavoro di allontanamento da  $\bar{C}$ , stante la positività delle  $T_r^{(2)}$ , è senz'altro positivo per qualsiasi valore attribuibile alle  $\beta_r$ , ovvero per qualsiasi  $\delta C$  considerata; quindi:

$$T_c^{(4)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{stabilità} \quad (10.23.a)$$

È enunciabile allora il teorema:

**CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER LA STABILITÀ È CHE SIA POSITIVA LA VARIAZIONE QUARTA DELLA E.P.T. CALCOLATA LUNGO IL CANALE CRITICO.**

Nel caso in cui la  $T_c^{(4)}$  risulti negativa si ha ovviamente un giudizio di instabilità ma questo è meno perentorio del precedente.

Si ha infatti nullità della intera  $T$ , (10.22), ove:

$$\sum_r^N \beta_r^2 T_r^{(2)} = |T_c^{(4)}| \quad (10.24)$$

e ciò prospetta la esistenza di situazioni di *indifferenza* che sono d'altronde ben compatibili con lo *stato critico*. Se ci si avvicina però al canale critico, e le  $\bar{\beta}_r$  sono quindi fatte tendere a zero, si individua che proprio lungo il canale critico, e quindi per la particolare  $\delta C$  che lungo essa si esplica, si ha negatività della E.P.L. e quindi prevalenza del lavoro motore su quello resistente. In tal senso:

$$T_c^{(4)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{instabilità} \quad (10.23.b)$$

ed è enunciabile il teorema:

**CONDIZIONE SUFFICIENTE PER L'INSTABILITÀ È CHE SIA NEGATIVA LA VARIAZIONE QUARTA DELLA E.P.T. CALCOLATA LUNGO IL CANALE CRITICO.**

I precedenti risultati, pur sostanzialmente coincidenti con quelli riferiti da altri Autori, se ne discostano nel dettaglio per la maggiore attenzione qui posta alle conseguenze di ritrovarsi nel primo punto di biforcazione che è l'unico al quale si riserva l'appellativo di critico. Nel successivo paragrafo 10.5 si vedrà come le condizioni di necessità e sufficienza possano trovare diversa collocazione, nei confronti della stabilità e della instabilità, quando si esaminino altri punti di biforcazione.

#### 10.4.1. Esempio

Poiché negli esempi finora svolti (9.2.1, 9.5.1, 9.5.2, 9.5.3) ci si ritrova, fortunatamente, sempre con  $T_c^{(4)} > 0$  si sviluppa il caso di fig. 10.1.

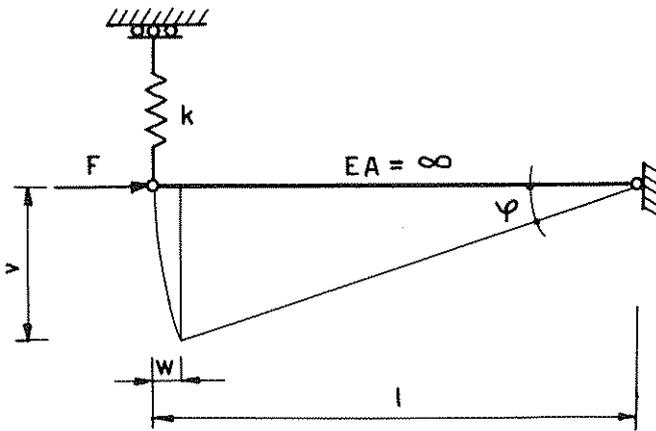


Fig. 10.1.

In essa si trascura la deformabilità assiale, il che risulta lecito dato che tale ipotesi non è in contrasto con l'equilibrio pre-critico.

Per operare in piena conformità con quanto indicato in 10.4, ma non è ovviamente necessario, si assume come lagrangiana la deformazione dell'organo elastico:

$q \equiv v$ .

Si trae successivamente:

$$\begin{aligned} \text{sen } \varphi &= \frac{v}{l} & \varphi &= \text{arc sen } \frac{v}{l} = \frac{v}{l} + \frac{1}{6} \left( \frac{v}{l} \right)^3 + \dots \\ \underline{f} \equiv w &= l (1 - \cos \varphi) = l \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} \right) \dots \right] = \\ &= \frac{v^2}{2l} + \frac{v^4}{8l^3} \dots \end{aligned}$$

La E.P.T. (locale) si scrive:

$$T = \frac{1}{2} k v^2 - \frac{F}{2l} \left( v^2 + \frac{v^4}{4l^2} + \dots \right) \quad (10.a)$$

Allo stato critico si ha:

$$\begin{aligned} T^{(2)} &= \frac{1}{2} k v^2 - \frac{F}{2l} v^2 \\ T_v^{(2)} &= k v - \frac{F}{l} v = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{crit}} = k l \end{aligned} \quad (10.b)$$

Data l'esistenza di una sola lagrangiana la discussione è limitata, non esistendo altri canali privilegiati (autovettori) distinti da quello critico. Poiché lungo esso è:

$$T_c^{(4)} = - \frac{F_{\text{crit}} v^4}{8 l^3} < 0$$

il giudizio di instabilità è senza alcuna riserva.

### 10.5. Qualità dell'equilibrio nelle biforcazioni successive

Se si pensa che la struttura abbia superato in qualche modo il primo carico critico,  $\bar{F}_1 = F_{\text{crit}}$  ed, eventualmente, altri successivi così da essere alla biforcazione *s-ma* nulla muta formalmente nella precedente trattazione. Sarà solo a sostituirsi al pedice *c*, che si è riservato all'autovalore ed all'autovettore  $r = 1$ , il pedice *s*. La (10.22) si scrive allora:

$$T = \sum_{r \neq s} \bar{\beta}_r^2 T_r^{(2)} + T_s^{(4)} \quad (10.25)$$

La sostanziale differenza intervenuta, col cambio dei pedici, è che ora alcune  $T_r^{(2)}$  sono negative. Infatti il valore di estremo assunto dalla E.P.L. nella biforcazione considerata, per cui è sempre  $T_s^{(2)} = 0$ , è un minimo solo rispetto alle  $\delta C$  in cui intervengono gli autovettori  $q_r$  con  $r > s$ ; è un massimo rispetto a quelle in cui siano presenti gli autovettori di indice  $r < s$ .

Con ciò possono dosarsi le  $\bar{\beta}_r$  in modo che la sommatoria che appare nella (10.25) assuma qualsiasi segno. Ne consegue che:

$$T_s^{(4)} < 0 \quad (10.26)$$

sia ancora *condizione sufficiente di instabilità*; la differenza rispetto al caso precedente è che non si ha più una sola  $\delta C$  lungo cui detta instabilità possa manifestarsi, ma una infinità.

La condizione opposta:

$$T_s^{(4)} > 0 \quad (10.27)$$

perde il suo carattere di definizione di una sicura stabilità.

Potranno dosarsi le  $\bar{\beta}_r$  in modo che il primo termine della (10.25) sia negativo e prevalente su  $T_s^{(4)}$ . La esistenza di  $\delta C$  per le quali il lavoro motore superi quello resistente, e ne basterebbe una sola, esclude che possa esistere stabilità nella situazione considerata.

In conclusione si enuncia il teorema:

**NEI PUNTI DI BIFORCAZIONE SUCCESSIVI AL PRIMO L'EQUILIBRIO È SEMPRE INSTABILE.**

#### 10.5.1. Esempio

Si riconsidera il sistema già studiato in 9.5.2 e 9.6.1. Per esso, ed anche in questo caso la E.P.T. e la E.P.L. coincidono, si ha nel 2° ordine:

$$T = T^{(2)} = \frac{1}{2} k \varphi_1^2 + \frac{1}{2} k (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - \frac{Fl}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \quad (10.c)$$

ed autovalori ed autovettori normalizzati sono noti:

$$\begin{array}{lll} \bar{F}_1 = 0,7639 \text{ k/l} & \varphi_{11} = 0,5257 & \varphi_{12} = 0,8506 \\ \bar{F}_2 = 5,2362 \text{ k/l} & \varphi_{21} = 0,8506 & \varphi_{22} = 0,5257 \end{array} \quad (10.d)$$

Attesa la dipendenza diretta della  $W$  ( $\equiv \Phi$ ) dalle lagrangiane, questa quota energetica coincide con  $W^{(2)}$  ed è pertanto  $W^{(3)} = W^{(4)} = \dots = 0$ . Quote di ordine

più elevato del secondo si trovano nel contributo dei carichi esterni; sviluppando lo spostamento  $f \equiv w$  fino al quarto ordine, vedi fig. 9.3 risulta:

$$\begin{aligned} w &= \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi_1) + \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi_2) = \frac{l}{2} \left( \frac{\varphi_1^2}{2} - \frac{\varphi_1^4}{24} \right) + \frac{l}{2} \left( \frac{\varphi_2^2}{2} - \frac{\varphi_2^4}{24} \right) = \\ &= \frac{l}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{l}{48} (\varphi_1^4 + \varphi_2^4) \end{aligned}$$

La parte di secondo ordine è stata già considerata nella (10.c), quella del quarto dà luogo a:

$$T^{(4)} = \frac{Fl}{48} (\varphi_1^4 + \varphi_2^4) \quad (10.e)$$

Lungo il canale critico, e quindi ponendo nella (10.e) la prima autosoluzione (10.d), si ottiene:

$$T_{11}^{(4)} = \frac{0,7639}{48} k (0,5257^4 + 0,8506^4) = 0,00955 k > 0$$

Valutando  $T_r^{(2)}$  ( $c = 1, r = 2$  essendo nel 1° punto di biforcazione) si trova:

$$\begin{aligned} T_{12}^{(2)} &= \frac{1}{2} k 0,8506^2 + \frac{1}{2} k (-0,5257 - 0,8506)^2 + \\ &\quad - \frac{0,7639}{4} k [0,8506^2 + (-0,5257)^2] = 1,1179 k \end{aligned}$$

Si vede che la (10.22) è positiva per  $\bar{\beta}$  qualunque: si ha piena stabilità.

Se si suppone, invece, di essere pervenuti in qualche modo al 2° punto di biforcazione, vanno valutate:

$$T_{22}^{(4)} = \frac{5,2362}{48} k [0,8506^4 + (-0,5257)^4] = 0,06544 k$$

$$\begin{aligned} T_{21}^{(2)} &= \frac{1}{2} k 0,5257^2 + \frac{1}{2} k (0,8506 - 0,5257)^2 + \\ &\quad - \frac{5,2362}{4} k (0,5257^2 + 0,8506^2) = -1,1182 k \end{aligned}$$

e, pur avendosi stabilità lungo il canale critico, questa stabilità si perde procedendo lungo un percorso come caratterizzato dalla (10.24):  $\bar{\beta} > 0,2419$ .

Nel concludere il presente paragrafo si dà, per il caso di due lagrangiane  $q_i$ , la rappresentazione nel piano delle configurazioni di quanto in precedenza discusso, fig. 10.2. L'andamento di  $T$ , rappresentata nella sua variabilità in direzione ortogonale al canale critico, è puramente indicativa.

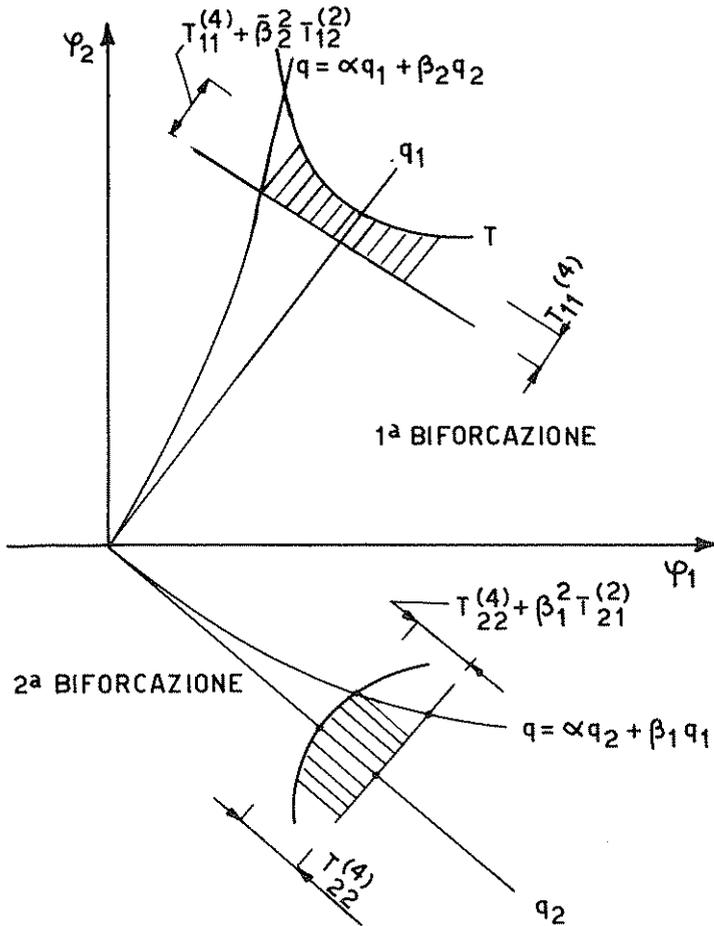


Fig. 10.2.

La situazione rappresentata corrisponde peraltro, qualitativamente, ai risultati del precedente esempio: rafforzamento di stabilità nella prima biforcazione, perdita di stabilità nella seconda.

### 10.6. Biforcazioni e curva caratteristica

Nel capitolo 8 si è introdotta la curva caratteristica  $F-f$  mostrando come essa dia pienamente conto del comportamento strutturale. In tale sede si è fatto ovviamente riferimento al solo ramo naturale; a capitoli 9 e 10 ormai conclusi è di notevole interesse vedere come da tale diagramma risultino descritti lo stato critico (= tendenza iniziale post-critica) ed i rami secondari che in essa prendono origine.

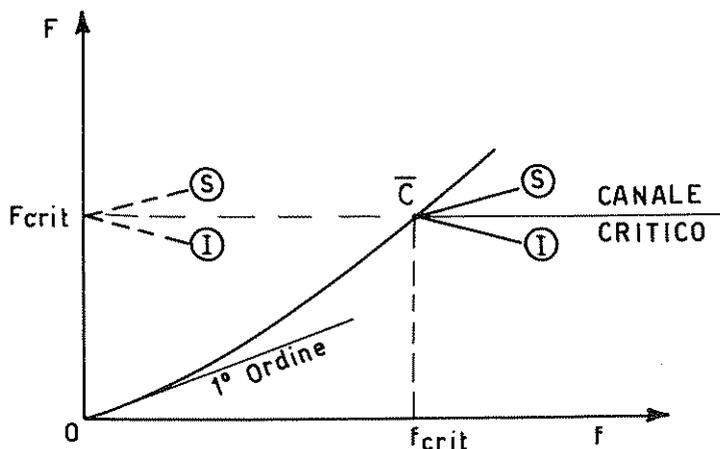


Fig. 10.3.

In fig. 10.3 è indicato un generico ramo naturale che, senza togliere generalità a quanto segue, si è pensato di 1<sup>a</sup> specie (stabilità crescente).

In  $\bar{C}$ , stato critico, esso perde la sua stabilità per  $\delta C$  in cui si attivino le lagrangiane  $Q_i \equiv q_i$ : si identificano canale critico e puntuale indifferenza. Ciò sulla curva caratteristica dà luogo, sulla orizzontale per  $\bar{C}$ , ad un tratto infinitesimo, non rappresentabile:

- $F$  assume il valore  $F_{crit}$ ;
- la variazione prima di  $f$  è nulla ( $f^{(1)} = 0$ ,  $f^{(2)} \neq 0$ ).

Esaminiamo ora come procedono le cose sul ramo secondario. Su di esso  $F$  deve assumere i valori dati da una relazione generale come la (8.9):

$$F = \frac{W_i^{(2)} + W_i^{(3)} + W_i^{(4)} + \dots}{f_i^{(1)} + f_i^{(2)} + \dots}$$

in un caso in cui è notoriamente  $f^{(1)} = W^{(2)} = 0$ . Trascurando gli infinitesimi di ordine più elevato risulta:

$$F = \frac{W_i^{(3)} + W_i^{(4)}}{f_i^{(2)}} = \frac{W_i^{(3)}}{f_i^{(2)}} + \frac{W_i^{(4)}}{f_i^{(2)}} \quad (10.28)$$

Il primo rapporto, dando alle lagrangiane i valori che loro competono sul ramo secondario, dà  $F_{crit}$ ; il secondo rapporto, la sua evoluzione,  $\Delta F = F - F_{crit}$ , post-critica quadratica nelle lagrangiane.

Anche  $f^{(2)}$  è quadratica nelle lagrangiane ed allora:

$$f = f^{(1)} + f^{(2)} + \dots \quad \text{e} \quad \Delta F = F - F_{crit}$$

sono dello stesso ordine. Proseguendo oltre  $\bar{C}$  sul diagramma di figura 10.3 si ha, nell'approssimazione della (10.28), e quindi come tendenza iniziale, una retta.

Se la retta è ascendente: stabilità ( $W^{(4)} > 0$ ).

Se la retta è discendente: instabilità ( $W^{(4)} < 0$ ).

Ancora una precisazione: un singolo punto di una delle due rette (o meglio tendenze) rappresenta, stante la simmetria dei rami secondari rispetto a  $\bar{C}$ , due configurazioni simmetriche.<sup>(1)</sup>

Nel concludere osserveremo che se la deformazione pre-critica viene trascurata, si ha la scomparsa in fig. 10.3 del ramo naturale  $\overline{OC}$ . In tal caso la rappresentazione diventa quella a tratti avente inizio dal punto  $F = F_{crit}$  sull'asse delle  $F$ .

#### 10.6.1. Esempio

Lo schema studiato in 9.2.1 dà luogo ad una diretta applicazione di quanto osservato nel presente paragrafo. Lo spostamento  $w$  di fig. 9.1 coincide infatti con lo spostamento generalizzato  $f$  e pertanto la (9.n) può formalmente scriversi:

$$\bar{F} = \bar{k} - 2 \bar{k} \bar{f} + 3 \bar{f}^2 - 2 \bar{f}^3 \quad (10.f)$$

e va ricordato che sussistono le adimensionalizzazioni:

$$\bar{f} = \frac{f}{l} \quad , \quad \bar{F} = \frac{F}{EA} \quad , \quad \bar{k} = \frac{k}{EA l} \quad (10.g)$$

Poiché la (10.f), che descrive il ramo secondario, prende vita da:

$$\bar{f}_{crit} = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4 \bar{k}} \right) \quad (10.h)$$

la curva caratteristica può immediatamente tracciarsi.

<sup>(1)</sup> Si è altrove chiarito che configurazioni diverse possono dar luogo alla stessa  $f$ .

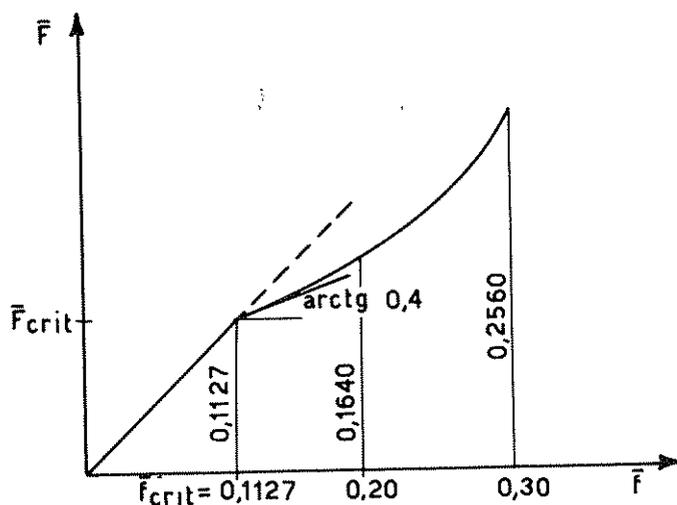


Fig. 10.4.

Ciò è stato fatto in fig. 10.4 per  $\bar{k} = 0,1000$ . L'inclinazione iniziale del ramo secondario è data in tal caso da:

$$\left| \frac{d\bar{F}}{d\bar{f}} \right|_{\bar{f}_{crit}} = |-2\bar{k} + 6\bar{f} - 6\bar{f}^2|_{0,1127} = +0,4000$$

### 10.7. I sistemi ad un grado di libertà

Nel caso di sistemi ad un solo grado di libertà, e non può che trattarsi di schemi elasto-rigidi, la validità della (10.11) è indiscutibile avendosi, per la esistenza di una sola lagrangiana, la coincidenza del canale critico e del ramo secondario.

Quando si tratti invece di sistemi a più gradi di libertà, artificialmente ricondotti ad un grado solo predefinendo un possibile canale di deformazione (ovvero il canale critico), la (10.11) è solo definitoria di una deformazione guidata lungo tale canale.

Anche se il canale considerato coincide col vero canale critico, prima autosoluzione del problema, quanto sopra osservato sussiste e, pur essendosi considerati il "vero"  $F_{crit}$  ed il "vero" canale critico, quest'ultimo sarà sempre distinto dal ramo secondario che, da esso dipartendosi, chiama in causa altri "modi" deformativi oltre il primo.

Ciò osservato, appare ben strano che molti Autori ritengano, operando come sopra, di descrivere il ramo secondario anche non in prossimità del punto di biforcazione, e ciò pur prescindendo dal fatto che, salvo in

sistemi elasto-rigidi privi di pre-critico ( $Q = 0$ ), si riattivano anche le  $Q$ , non presenti nella (10.11), che erano stazionarie solo in tale prossimità.

Con quanto precede si è voluto ben chiarire come non sia possibile, con artificiose riconduzioni ad un solo grado di libertà, ottenere informazioni più spinte sul post-critico. Queste sono necessariamente limitate ad  $F_{crit}$  ed alla qualità dell'equilibrio nel punto di biforcazione.

Il ramo secondario, al di fuori dei modelli ad una sola lagrangiana e quindi, si ribadisce, elasto-rigidi, resta in questa via sconosciuto. La sua determinazione, ove possibile, va perseguita come chiarito nella parte iniziale del paragrafo 10.6.

CAPITOLO 11

**I CARICHI CRITICI COINCIDENTI**

(Aldo Raithel e Nicola Augenti)

### 11.1. Premessa

In tutto quanto precede si è sempre evidenziata la importanza dello studio del comportamento post-critico e della modernità di tale ricerca. Seppure in pieno disaccordo con altri Autori sulle possibilità di una specifica evenienza, esistenza di asimmetria nell'intorno dello stato critico, non può che darsi atto della notevole spinta da Loro esercitata nel settore ed alla quale si deve, tra l'altro, la necessità di chiarificazione cui la presente opera ha preteso di dare un primo contributo.

In tale ottica va visto anche lo specifico problema dei carichi critici coincidenti che, molto opportunamente e realisticamente interpretato come di "ottimizzazione strutturale", sembra ancora lontano da una completa definizione. Gli sforzi si sono infatti orientati, ancora una volta, nel tentativo di far quadrare i risultati di qualche esemplificazione con le proprietà di una E.P.T. data come sviluppo in serie di una forma matematica ipoteticamente nota, la ormai più volte ricordata (7.3).

Un esempio di dubbia interpretazione, e la possibilità di poter trarre da una espressione così "larga" come quella testé ricordata tutti i coefficienti possibili ed immaginabili, hanno di fatto creato uno stato di confusione notevole. Ne è derivato che molte energie siano state rivolte alla soluzione di sottoproblemi e sottocasi, come ad esempio il numero di rami secondari passanti per un punto di biforcazione multiplo, tralasciando un più opportuno riesame del problema principale.

### 11.2. Frazionamento delle lagrangiane

Lo studio delle leggi dell'equilibrio di un sistema elastico parte dalla conoscenza del numero  $n$  dei suoi gradi libertà; esso è definito unicamente dalle caratteristiche intrinseche del sistema.

La condizione di carico considerata, rappresentata globalmente dal parametro  $F$ , richiederà al suo apparire ( $F$  crescente a partire da zero) che si attivino:

$$n' \leq n$$

gradi di libertà. Nello spazio  $R^{n'+1}$ , carico-lagrangiane attive, si sviluppa il *RAMO NATURALE*.

Se risulta  $n' = n$  la struttura non può che aspirare ad un ramo indefinito e crescente, o temere un carico limite, e ciò si è esaminato nel capitolo 8. Se  $n' < n$  sussistono i pericoli di biforcazione, e ciò si è esaminato nel capitolo 9 pensando che tutti i rimanenti gradi di libertà, in numero  $N = n - n'$ , fossero contemporaneamente coinvolti. Ciò ha consentito di evitare poco significative discussioni di "rango", in relazione alle equazioni allo stato critico ed al determinante che le regge, ed a chiarire che se  $N$  sono i gradi di libertà che insieme si attivano,  $N$  sono gli autovalori,  $F_r$ , del problema; ordinati questi in modo crescente, al primo  $\bar{F}_1$ , si è conferito il nome di critico:

$$F_{crit} = \bar{F}_1.$$

Il predetto complesso di autovalori non ammette coincidenze; comunque si varino le costanti degli organi elastici essi saranno sempre distinti. Sembra anzi che possa affermarsi come, al crescere dell'indice  $r$ , essi vadano sempre più distanziandosi<sup>(1)</sup>.

### 11.2.1. Esempio

Si riconsidera l'esempio 9.5.2 attribuendo rigidezza  $k_1$  e  $k_2$ , rispettivamente, agli organi elastici in  $C$  e  $B$ .

Risulta:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} k_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - \frac{Fl}{4} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

Le equazioni allo stato critico danno:

$$T_1^{(2)} = \left( k_1 + k_2 - \frac{1}{2} Fl \right) \varphi_1 - k_2 \varphi_2 = 0$$

$$T_2^{(2)} = -k_2 \varphi_1 + \left( k_2 - \frac{1}{2} Fl \right) \varphi_2 = 0$$

Annullando il determinante dei coefficienti del precedente sistema omogeneo si hanno, successivamente, l'equazione secolare e le sue radici (autovalori). Risulta:

$$(Fl)^2 - 2(k_1 + 2k_2)(Fl) + 4k_1k_2 = 0$$

$$Fl = (k_1 + 2k_2) \pm \sqrt{k_1^2 + 4k_2^2}$$

<sup>(1)</sup> Per l'asta di Eulero, ad esempio, gli autovalori sono dati da:

$$\bar{F}_r = (r\pi)^2 \frac{EI}{l^2} \quad r = 1, 2, \dots$$

Se si richiede la coincidenza delle due radici dovrà porsi:

$$k_1^2 + 4 k_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = i \cdot 2 k_2$$

ottenendo che uno degli organi elastici debba essere .... immaginario.

Ciò premesso penseremo ora che l'intero set di lagrangiane sia così frazionabile:

- $n'$  impegnate lungo il *ramo naturale* e siano le  $Q_k$ ;
  - $N_1$  attivabili in punti di biforcazione sul ramo naturale, ove non lo fossero già le successive; si dicono  $Q_i \equiv q_i$ ;
  - $N_2$  anche esse attivabili in punti di biforcazione sul ramo naturale, ove già non lo fossero le precedenti; si dicono  $Q'_i = q'_i$ ;
- e dovrà ovviamente risultare:

$$n' + N_1 + N_2 = n$$

Nulla impedisce di pensare ad una suddivisione ancora più spinta che, peraltro, niente aggiungerebbe al discorso in atto.

### 11.2.2. Esempio

Si prende in considerazione il sistema rappresentato in fig. 11.1.

Considerate assialmente deformabili le aste  $DC$  e  $CE$  si hanno complessivamente quattro gradi di libertà. Vengono assunte come lagrangiane:

- gli spostamenti  $v$  e  $w$  del nodo  $C$ ;
- le rotazioni relative in  $D$  ed  $E$ .

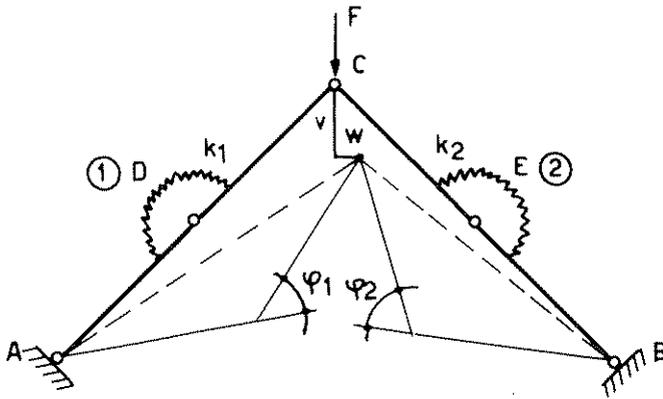


Fig. 11.1.

Il ramo naturale di equilibrio si sviluppa con le lagrangiane:

$$Q_1 = v, \quad Q_2 = w \quad (n' = 2)$$

e le aste *ADC* e *CEB* si conservano rettilinee. Quando gli sforzi normali nelle aste attingeranno particolari valori potrà attivarsi, a seconda dei valori delle costanti  $k_1$  e  $k_2$ :

- la lagrangiana  $Q = q = \varphi_1 \quad (N_1 = 1)$

- la lagrangiana  $Q' = q' = \varphi_2 \quad (N_2 = 1)$

e ciò ove non sia prima raggiunto il valore  $F_{lim}$  esistente sul ramo naturale (tale eventualità si penserà esclusa con opportuni "rapporti" tra le rigidezze in gioco).

Eseguita la precedente suddivisione si diano per svolte le indagini innanzi ricordate:

- nello spazio  $R^{n'+1}$  la ricerca del ramo naturale (capitolo 8);

- nello spazio  $R^{n'+N_1+1}$  la ricerca dei punti di biforcazione e quindi degli autovalori (capitolo 9):

$$F_{crit} = \bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_{N_1} \quad (11.1)$$

e della qualità dell'equilibrio (stabile o instabile) corrispondente ad  $\bar{F}_1$  (capitolo 10). Tale ultima ricerca ha stabilito, vedi 10.6, che nei punti di biforcazione successivi al primo l'equilibrio è sempre instabile e ciò va attentamente ricordato;

- nello spazio  $R^{n'+N_2+1}$  ricerca identica a quella precedente con la determinazione degli autovalori:

$$F'_{crit} = \bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_{N_2} \quad (11.2)$$

e della qualità dell'equilibrio nel primo punto di biforcazione (è certa la instabilità in quelli successivi).

Espletato il precedente lavoro, si confrontino le due successioni di autovalori e si consideri l'unico caso di interesse; il primo valore di una delle due successioni si inserisce fra i primi due dell'altra; sia, ordinando per valori crescenti:

$$\bar{F}_1, \bar{F}'_1, \bar{F}_2, \dots \quad (11.3)$$

Attesa la indipendenza dei valori  $\bar{F}_1$  ed  $\bar{F}'_1$  è ora pensabile che questi autovalori, di famiglie diverse e per ciascuno dei quali sono note le proprietà dell'equilibrio allo stato critico, siano fatti coincidere: *CARICO CRITICO DOPPIO*.

Ove il frazionamento delle lagrangiane fosse risultato più spinto, detta coincidenza potrebbe implicare i valori critici di più successioni; in generale: *CARICO CRITICO MULTIPLIO* (*compound braching point*).

### 11.2.3. *Precisazioni*

Con riferimento ad una singola successione, ad esempio la (11.1), va ricordato che al disopra del primo autovalore l'equilibrio è sempre instabile e che, di fatto, il raggiungimento di uno stato critico successivo è da escludersi a meno di non pensare di operare nell'ambito di una deformazione guidata particolare: quella che consente solo il modo deformativo rappresentato dalla autosoluzione corrispondente. In altre parole gli autovalori delle successioni predette sono determinati partendo, per ciascuno di essi, dalla configurazione iniziale ( $q_i = 0$ ). Quanto precede significa che, superato lo stato critico (nel presente discorso si suppone stabile affinché  $F$  possa crescere oltre  $\bar{F}_1$ ) ed in presenza quindi di  $q_i \neq 0$  e di una evoluzione delle  $Q_k$  ove queste ultime non siano trascurate, gli autovalori successivi al primo sono privi di ogni significato fisico: il fenomeno evolverà indefinitamente lungo il ramo di equilibrio biforcuto che ha inizio per  $F = \bar{F}_1$ .

Tali considerazioni valgono in gran parte anche per la successione unificata (11.3): tutti gli autovalori successivi al primo sono fisicamente insignificanti: superato  $F_1$  ci si pone in configurazioni distinte da quella iniziale e le lagrangiane  $N_2$ , che possono ancora attivarsi, inducono conseguenze diverse da quelle valutate in precedenza (per  $q_i = 0$ ) che avevano condotto alla individuazione di  $\bar{F}_1'$ .

In tal senso si precisa che, poiché tale attivazione avviene su un sistema geometricamente degradato dalla  $q_i$ , deve ritenersi che essa si abbia per un valore di  $F$ , e sia  $F^*$ , compreso nell'intervallo:

$$\bar{F}_1 < F^* < \bar{F}_1' \quad (11.4)$$

A partire da tale valore si ha, quindi, una nuova biforcazione e la rappresentazione del fenomeno passa dallo spazio (sottospazio) ad  $n' + N_1 + 1$  dimensioni a quello (completo) ad  $n + 1$  dimensioni; in questo dovrà indagarsi per riconoscere la qualità dell'equilibrio dopo la seconda biforcazione.

L'esame di ciò che accade in una tale eventualità è, ovviamente, strettamente legato, rappresentandone un limite, a quanto descritto nella precedente precisazione. Facendosi tendere  $\bar{F}_1'$  ad  $\bar{F}_1$ , e quindi  $F^*$  ad  $\bar{F}_1$ , scompare il percorso costituito da un tratto del primo ramo di equilibrio biforcuto ( $\bar{F}_1 \leq F \leq F^*$ ) e dal ramo di equilibrio che inizia per  $F = F^*$  (secondo ramo biforcuto), dandosi luogo ad un unico ramo di equilibrio (percorso senza discontinuità). La caratterizzazione di tale ultimo ramo (instabile o stabile) sarà ovviamente quella conferitagli dal secondo ramo biforcuto e ciò per potersi sempre pensare  $F^*$  maggiore di  $\bar{F}_1$ , seppure di una quantità infinitesima.

La rappresentazione grafica delle due predette eventualità è data nel piano  $\bar{F}$ - $f$ , ovvero in termini di curva caratteristica, in figura 11.2.

Entrambe le curve sono relative a casi in cui il pre-critico non è stato trascurato ( $Q_k \neq 0$  implica  $f_{crit} \neq 0$ ); la prima descrive una biforcazione (multipla) instabile, la seconda stabile.

Si rileva facilmente che le curve riportate potrebbero anche esemplificare carichi critici non coincidenti e con ciò si evidenzia, ancora una volta, come con esse si colga l'essenzialità del comportamento delle strutture,

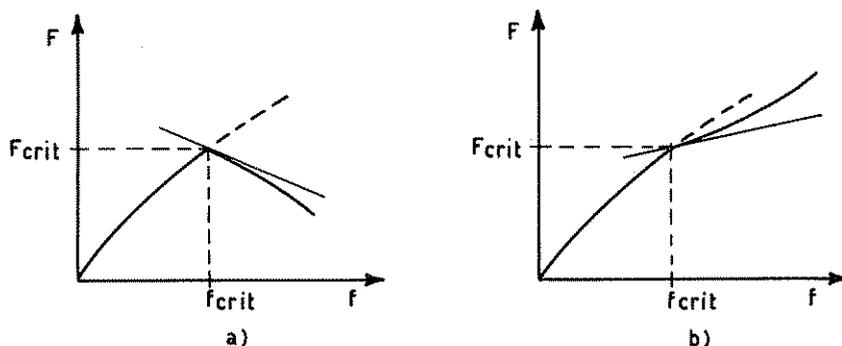


Fig. 11.2.

non essendo legate ad artifici intesi a semplificare l'elaborazione di un problema. Il frazionamento delle lagrangiane è, infatti, del tutto inutile, anzi fuorviante, nel caso in cui si verifichi la coincidenza dei primi autovalori<sup>(1)</sup>, o, in caso di non coincidenza, quando si voglia studiare tutto il campo post-critico. Esso, di contro, è ben utile, e così se ne giustifica storicamente l'adozione, quando si intenda conoscere il solo carico critico.... al fine di tenersene ben discosti.

### 11.3. Un esempio classico

Verso la metà degli anni '60 fu elaborato da Augusti un interessante esempio, successivamente riconsiderato da Thompson, caratterizzato da due gradi di libertà, cosicché le due successioni (11.1) ed (11.2) risultano, ciascuna, rappresentata da un solo autovalore ( $n' = 0$  trascurandosi il pre-critico per l'ipotizzata rigidità dell'asta,  $N_1 = N_2 = 1$ ).

Esso generalizza, nello spazio, il modello piano trattato (nei limiti ri-

<sup>(1)</sup> Si veda in merito il successivo paragrafo 11.3

stretti della determinazione del carico critico) nel paragrafo 9.5.1 ed è schematizzato nella figura 11.3 ove, data la inessenzialità dei segni, si è rinunciato a seguire convenzioni rigorose a vantaggio di una rappresentazione meno confusa.

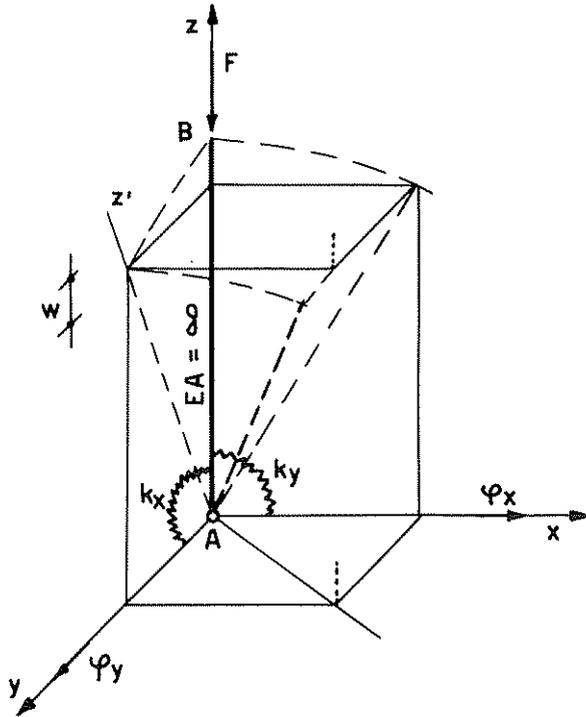


Fig. 11.3.

### 11.3.1. I carichi critici distinti

Frazionando i gradi di libertà si considerano separatamente le rotazioni  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  assumendo, in ciascuno dei casi, quale lagrangiana del problema quella supposta non nulla.

In fig. 11.4 è considerato il caso della  $\varphi_x$ , e ciò corrisponde a pensare esistente in  $A$  una cerniera cilindrica di asse  $x$ .

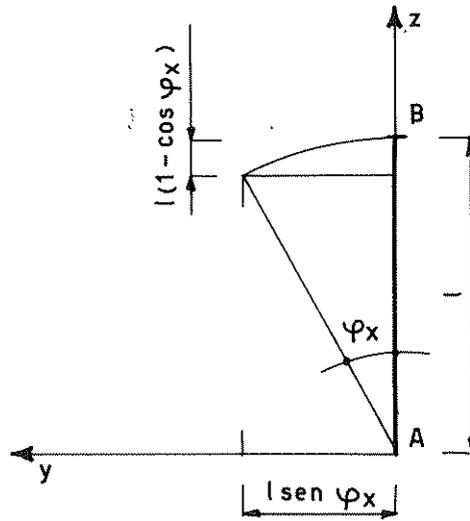


Fig. 11.4.

Poiché si identificano facilmente in:  
 $w = l(1 - \cos \varphi_x)$  lo spostamento verticale di B,  
 $\varphi_x$  la rotazione che chiama in causa  $k_x$   
 la E.P.T. si scrive:

$$T = \frac{1}{2} k_x \varphi_x^2 - Fl(1 - \cos \varphi_x) \quad (11.a)$$

L'equazione di equilibrio e la soluzione del problema sono, allora, in via esatta (non si sviluppa in serie il coseno):

$$\frac{dT}{d\varphi} = k\varphi - Fl \operatorname{sen} \varphi = 0$$

$$F = \frac{k}{l} \frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} \quad : \quad \bar{F} = F_{\text{crit}} = \frac{k}{l} \quad (11.b)$$

dove l'autovalore è stato dedotto per  $\varphi$  tendente a zero (con direzione che identifica lo stato critico) e si sono ommessi i pedici dato che il risultato trovato per il  $\varphi_x$  vale identicamente permutando  $x$  ed  $y$  (coincidenza dei carichi critici distinti per  $k_x$  e  $k_y$  eguali).

Nel concludere si osserva che la dipendenza di  $F$  da  $\varphi$  espressa dalla prima delle (11.b) è sempre crescente: i carichi critici distinti sono entrambi neutro-stabili.

Lo studio va ovviamente iniziato con la scelta di una coppia di lagrangiane (l'avvitamento dell'asta è inessenziale ed escluso) che, per dare concretezza al vincolo in A, si identificano con le rotazioni consentite da due cerniere cilindriche solidarizzate tra loro. Una di tali cerniere si penserà ancorata allo spazio fisso (ed il suo asse si fa coincidere con l'asse  $y$ ) mentre all'altra si penserà fissata l'asta AB. Tali rotazioni si indicheranno con  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  per quanto la prima, invertendo l'ordine arbitrario con cui possono pensarsi attivate, possa avvenire intorno ad un asse diverso da  $x$ .

Se si suppone di dar luogo prima a  $\varphi_x$  la situazione si presenta come nella fig. 11.4 e risulta:

$$x = 0 \quad y = l \operatorname{sen} \varphi_x \quad z = l \operatorname{cos} \varphi_x \quad (11.5)$$

La successiva rotazione intorno all'asse  $y$  trova ora l'asta nella posizione assunta nella predetta figura e fa ruotare l'estremo superiore lungo un arco di circonferenza di raggio  $l \operatorname{cos} \varphi_x$ , anziché  $l$ , senza che vari la  $y$  prima determinata. Le coordinate finali sono pertanto:

$$\begin{aligned} x &= (l \operatorname{cos} \varphi_x) \operatorname{sen} \varphi_y = l \operatorname{sen} \varphi_y \operatorname{cos} \varphi_x \\ y &= l \operatorname{sen} \varphi_x \\ z &= (l \operatorname{cos} \varphi_x) \operatorname{cos} \varphi_y = l \operatorname{cos} \varphi_x \operatorname{cos} \varphi_y \end{aligned} \quad (11.6)$$

e può procedersi alle determinazioni necessarie per la soluzione del problema:

- abbassamento del punto B;
- deformazioni degli organi elastici.

Il primo è subito ottenuto conoscendo la quota finale:

$$w = l - z = l (1 - \operatorname{cos} \varphi_x \operatorname{cos} \varphi_y); \quad (11.7)$$

le seconde richiedono si specifichi che gli organi elastici si pensano ancorati all'asta ed agli assi fissi così da essere attivati dalle variazioni,  $\alpha_x$  ed  $\alpha_y$ , degli angoli AB- $x$  ed AB- $y$  conseguenti allo spostamento di B (coordinate iniziali 0, 0,  $l$  e coordinate finali espresse dalle (11.6) sopra riportate).

Un rapido esame della fig. 11.3 comporta che si deducano, e basta porsi nei piani definiti dagli angoli sopra indicati con l'asta nella sua posizione finale,:

$$\operatorname{sen} \alpha_x = \frac{y}{l} = \operatorname{sen} \varphi_x \quad , \quad \operatorname{sen} \alpha_y = \frac{x}{l} = \operatorname{sen} \varphi_y \operatorname{cos} \varphi_x$$

Da queste si ottiene:

$$\alpha_x = \alpha_x \quad ; \quad \varphi_y = \arcsen(\sen \varphi_y \cos \varphi_x) \quad (11.8)$$

Le (11.8) mostrano come uno degli organi elastici sia chiamato a reagire proporzionalmente a  $\varphi_x$ , dando luogo ad un comportamento usuale, mentre l'altro è attivato da una deformazione,  $\alpha_y$ , certamente più piccola di  $\varphi_y$  (è  $\alpha_y = \varphi_y$  solo se si obbliga il sistema alla deformazione guidata  $\varphi_x = 0$  così da rendere  $\cos \varphi_x = 1$ ).

Ciò significa che il fenomeno evolverà in modo del tutto analogo a ciò che accade dopo il raggiungimento di un carico limite: il degrado strutturale rende l'equilibrio instabile.

### 11.3.2. Osservazioni

Quanto osservato non è certo legato all'ordine in cui si sono considerate le rotazioni essendo esse "lagrangiane". Invertendo tale ordine, infatti, l'arco di circonferenza che B descrive per effetto della seconda ha sì ancora raggio  $l$ , ma avviene in un piano diametrale non verticale. A calcoli eseguiti si ritrovano le (11.6) e quindi le (11.8).

Nulla muta sostanzialmente neanche se nella descrizione del vincolo si invertono gli assi delle due cerniere cilindriche, equivalendo ciò ad una rotazione rigida intorno all'asse  $z$  che inverte le espressioni formali di  $x$  ed  $y$  e quindi di  $\alpha_x$  ed  $\alpha_y$  tramutando il vincolo forte in debole e viceversa.

Da ultimo noteremo come con le "lagrangiane" scelte, proprio  $\varphi_x$  ed  $\varphi_y$ , nei lavori originali, dagli Autori citati non viene evidenziato il "degrado" degli organi elastici conseguente alle variazioni di configurazione. Pertanto il comportamento instabile, qui previsto, si manifesta solo alla fine dello studio, apparendo quasi sorprendente a fronte delle promesse di stabilità insite nelle determinazioni effettuate in 11.3.1 (i carichi critici distinti).

Passando ora alla fase risolutiva, e qui ci diversificheremo da uno degli Autori citati operando in via esatta e non in termini di infinitesimi fino al quarto ordine, si scrive la espressione della E.P.T.:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(k_x \varphi_x^2 + k_y \varphi_y^2) - F w = \\ &= \frac{1}{2} \left[ k_x \varphi_x^2 + \frac{1}{2} k_y \arcsen^2(\sen \varphi_y \cos \varphi_x) \right] + \\ &\quad - F l (1 - \cos \varphi_x \cos \varphi_y) \end{aligned} \quad (11.9)$$

Posto:

$$k_x = k \quad , \quad k_y = ck \quad , \quad \underline{F} = \frac{F}{k/l} \quad (11.10)$$

e notato che per  $c = 1$  i due carichi critici distinti coincidono, le consuete derivazioni della (11.9) forniscono le equazioni (di equilibrio) che reggono il problema. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_x}{\text{sen } \varphi_x \cos \varphi_y} - c \frac{\arcsen(\text{sen } \varphi_y \cos \varphi_x)}{(1 - \text{sen}^2 \varphi_y \cos^2 \varphi_x)^{1/2}} \text{tg } \varphi_y &= \underline{F} \\ c \frac{\arcsen(\text{sen } \varphi_y \cos \varphi_x)}{(1 - \text{sen}^2 \varphi_y \cos^2 \varphi_x)^{1/2}} \frac{1}{\text{tg } \varphi_y} &= \underline{F} \end{aligned} \quad (11.11)$$

Si individuano facilmente le seguenti soluzioni:

- 1)  $\varphi_x = 0 \quad , \quad \varphi_y = 0 \quad : \text{ ramo naturale};$
- 2)  $\frac{\varphi_x}{\text{sen } \varphi_x} \underline{F}_x \quad , \quad \varphi_y = 0 \quad : \text{ ramo biforcuto passante per } \underline{F}_x = 1;$
- 3)  $\varphi_x = 0 \quad , \quad c \frac{\varphi_y}{\text{sen } \varphi_y} = \underline{F}_y: \text{ ramo biforcuto passante per } \underline{F}_y = c$

del tutto conformi a quanto ricavato in 11.3.1.

Al fine di individuare ulteriori soluzioni, conviene sostituire al sistema (11.11) quello costituito da una delle equazioni (che fornirà il valore del carico) e della relazione e che si ottiene eguagliando i due valori di  $\underline{F}$  ivi espressi:

$$\varphi_x \frac{\text{sen } \varphi_y}{\text{sen } \varphi_x} = c \frac{\arcsen(\text{sen } \varphi_y \cos \varphi_x)}{(1 - \text{sen}^2 \varphi_y \cos^2 \varphi_x)^{1/2}} \quad (11.12)$$

Questa, studiata per prima, fornisce le coppie di valori di  $\varphi_x \varphi_y$  per cui l'equilibrio è possibile; esprime cioè il ramo di equilibrio nello spazio delle configurazioni: nel caso attuale, due curve simmetriche nel piano  $\varphi_x, \varphi_y$  delle quali basterà considerarne una sola.

A determinazioni effettuate (e l'indagine, fissato il valore di  $c$ , è possibile solo in via numerica) si constata che il ramo di equilibrio individuato è sempre decrescente (instabile) nell'allontanarsi dalla sua intersezione (distinta dall'origine) col più basso dei due rami descritti dalle soluzioni 2) e 3); il tutto in conformità di quanto descritto nel paragrafo 11.2 e nella seguente figura relativa al caso  $c < 1$ .

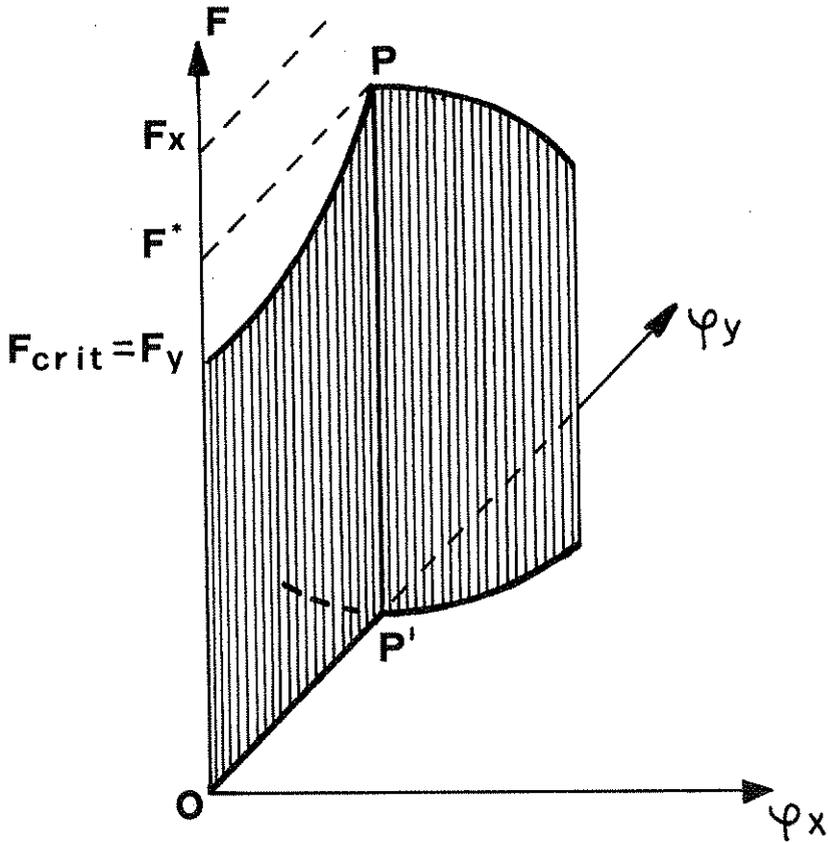


Fig. 11.5.

### 11.3.3. Nota

Che l'intersezione fra il primo ed il secondo ramo biforcuto avvenga in punto distinto dall'origine può trarsi dall'esame della (11.12) facendo tendere a zero  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$ .

Ne risulta il paradosso:

$$\dot{\varphi}_y = c \varphi_y \quad (11.c)$$

che esclude tale possibilità.

Se ora si fanno coincidere i due carichi critici distinti, (e ciò richiede che si ponga  $c = 1$ )  $F_x$ ,  $F^*$  ed  $F_y$  coincidono;  $P$  si porta in  $F_y$ ,  $P'$  nell'origine e resta il solo ramo instabile scomparendo la parte di percorso su un ramo "distinto".

Inoltre la curva nel piano  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  si specializza in una retta ed il fatto che essa passi per l'origine non è più paradossale, (11.c), atteso il valore unitario assunto da  $c$ .

#### 11.3.4. Una modifica al modello in esempio

Se, sempre con riferimento alla fig. 11.3, gli organi elastici si considerano insiti nelle cerniere di base, si dà vita ad un modello diverso (anch'esso considerato da Augusti):

*Modello rigido a vincoli elastici* con i vincoli elastici costituiti da cerniere elastiche (o incastrati cedevoli).

Quello trattato in precedenza è definibile invece come:

*Modello elasto-rigido a vincoli perfetti* essendo la rigidità insita nell'asta e l'elasticità negli elementi che la ancorano allo spazio fisso.

Nel modello ora introdotto, le deformazioni che attivano gli organi elastici, indicate come in precedenza con  $\varphi_x$  ed  $\varphi_y$ , coincidono con le lagrangiane assunte.

Invece delle (11.8) valgono le relazioni:

$$\alpha_x = \varphi_x \quad , \quad \alpha_y = \varphi_y \quad (11.d)$$

e, fermo il resto, la E.P.T. si scrive:

$$T = \frac{1}{2} (k_x \varphi_x^2 + k_y \varphi_y^2) - Fl (1 - \cos \varphi_x \cos \varphi_y) \quad (11.e)$$

Non si rileva, in questo caso, alcun degrado geometrico nella azione dei vincoli e l'equilibrio può prevedersi stabile.

Le soluzioni, ottenute con le modalità già descritte, confermano pienamente ciò, dandosi ancora luogo ad una rappresentazione come quella di fig. 11.5 con la sola differenza che, dopo la seconda biforcazione (punto P),  $F$  cresce invece di diminuire.

Facendo coincidere le due rigidezze ( $c = 1$ ), il ramo biforcuto (o meglio i due simmetrici entrambi possibili, e qui riemerge l'indifferenza che può riscontrarsi in modo ancora più spinto su altri modelli) è stabile.

#### 11.4. Il chiarimento di un equivoco

Ricollegandosi al discorso relativo al frazionamento delle lagrangiane va attentamente considerato l'equivoco in cui si può essere indotti nell'operare con la (11.3), unione dei due insiemi (11.1) e (11.2), nell'ambito di ciascuno dei quali ogni coincidenza di autovalori è esclusa e si è mostrato che l'equilibrio in una biforcazione successiva alla prima (ove si pensi di esservi "in qualche modo" pervenuti) è instabile.

Trasferendo, infatti, quest'ultima proprietà (valida nei sottospazi ad  $n' + N_1 + 1$  e  $n' + N_2 + 1$  dimensioni) al problema visto nella sua interezza (nello spazio ad  $n + 1$  dimensioni le cose sono diverse) qualche Autore ha tratto il verdetto che in uno stato critico doppio (o multiplo) l'equilibrio è sempre instabile. Ciò in base al ragionamento che, seppure in un ambito di valori di fatto coincidenti, sia sempre possibile ordinare i diversi autovalori in modo che uno preceda, seppure di un infinitesimo, l'altro e che quindi al di sopra di esso non possa esservi che instabilità. L'esempio precedente, frettolosamente esaminato, sembra confermare tali tesi erronea.

Affinché possa pervenirsi, invece, ad una più ragionata previsione del comportamento della struttura, seppure nello spirito di un frazionamento delle lagrangiane che tende a spezzare il problema in sottoproblemi, dovrà operarsi come segue e ciò, beninteso, quando la instabilità non appaia già in  $F_1$  o  $F'_1$ , condizione di per sé sufficiente ad emettere il verdetto di instabilità.

Le configurazioni di equilibrio determinate in ciascuno dei sottoproblemi vanno saggiate, nei riguardi della stabilità, con il riferimento agli spostamenti derivanti dalle lagrangiane considerate nell'altro sottoproblema. Ad esempio, il ramo di equilibrio (supposto stabile) che ha origine in  $F_1$  va esaminato, per quanto riguarda la qualità dell'equilibrio, con riferimento alle lagrangiane  $q'_i$  del gruppo  $N_2$ .

Se una sola di tali indagini dà esito negativo il carico critico distinto ( $F_1$  in esempio) va definito instabile anche se, nel sottospazio in cui era stato individuato, era a ritenersi stabile.

Con tale restrittiva interpretazione dell'appellativo da attribuirsi ad un carico critico distinto si elimina ogni possibilità di confusione e vale quanto di seguito riportato.

### 11.5. La qualità dell'equilibrio

Da tutto quanto precede risulta che in un punto di biforcazione multiplo i singoli carichi critici "distinti", appartenenti cioè a famiglie (o successioni, o insiemi) diverse, che sono fatti coincidere (e si tratta, famiglia per famiglia, del primogenito) portano con sé le loro qualificazioni nella forma restrittiva testè precisata.

Pertanto:

*AFFINCHÉ UNA BIFORCAZIONE MULTIPLA SIA STABILE È NECESSARIO E SUFFICIENTE CHE SIANO TALI LE BIFORCAZIONI DISTINTE CHE LA COSTITUISCONO.*

Di contro:

*LA ESISTENZA DI UNA SOLA BIFORCAZIONE DISTINTA INSTABILE È SUFFICIENTE AD ASSICURARE LA INSTABILITÀ IN UNA BIFORCAZIONE MULTIPLA CHE LA CONTENGA.*

#### 11.5.1. Esempio

Nella consueta, accettabile, ipotesi di trascurare il pre-critico (il sistema rettilineo è in equilibrio anche se le aste si accorciano) si sottopone a studio il sistema di fig. 11.6.

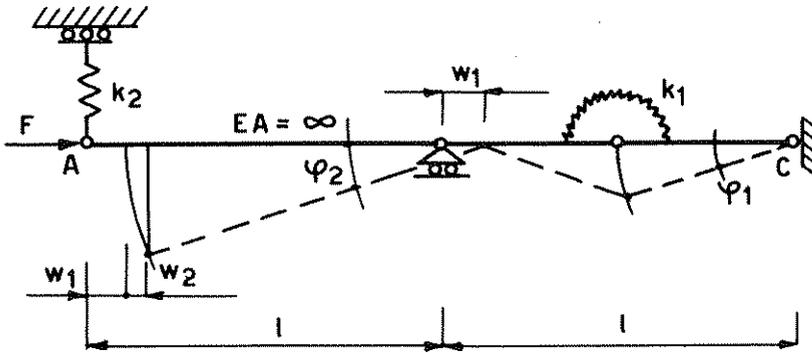


Fig. 11.6.

Si calcolano con sviluppi in serie fino al quarto ordine:

- lo spostamento della sezione di estremità:

$$\begin{aligned} \underline{f} \equiv w_1 + w_2 &= 2 \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi_1) + l (1 - \cos \varphi_2) = \\ &= \frac{1}{2} l (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{1}{24} l (\varphi_1^4 + \varphi_2^4) \end{aligned}$$

- la rotazione relativa che interessa l'organo elastico di rigidezza  $k_1$ :

$$s_1 = 2\varphi_1$$

- lo spostamento che interessa l'organo elastico di rigidezza  $k_2$ :

$$s_2 = l \operatorname{sen} \varphi_2 = l \left( \varphi_2 - \frac{1}{6} \varphi_2^3 \right)$$

Poiché la E.P.T. va calcolata come:

$$T = \frac{1}{2} k_1 s_1^2 + \frac{1}{2} k_2 s_2^2 - F \underline{f}$$

effettuate le precedenti sostituzioni, le prime due quote di detta energia risultano:

$$T^{(2)} = 2 k_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} k_2 l^2 \varphi_2^2 - \frac{Fl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \quad (11.f)$$

$$T^{(4)} = -\frac{1}{6} k_2 l^2 \varphi_2^4 + \frac{Fl}{24} (\varphi_1^4 + \varphi_2^4) \quad (11.g)$$

Le consuete derivazioni di  $T^{(2)}$  danno luogo alle equazioni critiche:

$$\frac{dT^{(2)}}{d\varphi_1} = 4 k_1 \varphi_1 - Fl \varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{F}_1 = \frac{4 k_1}{l} \quad (11.h)$$

$$\frac{dT^{(2)}}{d\varphi_2} = k_1 l^2 \varphi_2 - Fl \varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{F}_2 = k_2 l \quad (11.i)$$

Tali due valori possono essere resi coincidenti ponendo:

$$\frac{4 k_1}{l} = k_2 l \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{1}{4} k_2 l^2 \quad (11.l)$$

Si riconsiderano ora le espressioni (11.f) ed (11.g) di  $T^{(2)}$  e  $T^{(4)}$  così da valutarle nel punto di biforcazione doppio; inserendo in esse i valori (11.i) ed (11.l), e agli stessi risultati si perverrebbe esprimendo tutto in funzione di  $k_1$  invece che di  $k_2$ , si ottiene:

$$T^{(2)} = 0 \quad \text{per ogni coppia di } \varphi_1 \text{ e } \varphi_2$$

$$T^{(4)} = \frac{1}{24} k_2 l^2 \varphi_1^4 - \frac{1}{8} k_2 l^2 \varphi_2^4 \quad (11.m)$$

Il primo giudizio, esame di  $T^{(2)}$ , è di una uniforme indifferenza: tutti i canali uscenti dal punto di biforcazione sono critici.

Il secondo è che esiste un intero settore di instabilità per:

$$\varphi_2^4 > \frac{1}{3} \varphi_1^4$$

La caratteristica di carico critico instabile di  $\bar{F}_2$  dà instabilità al punto di biforcazione doppio.

### 11.5.2. Esercizio proposto

Nel caso di fig. 11.7 determinare le condizioni per cui si verifica un carico critico doppio. Dimostrare che in corrispondenza di esso lo stato critico è stabile.

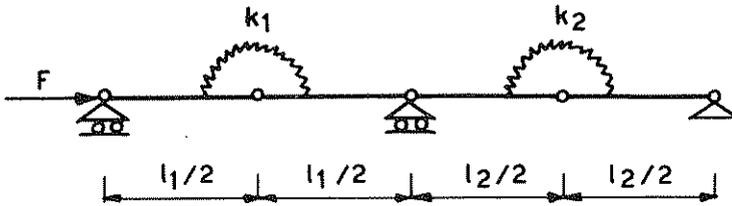


Fig. 11.7.

CAPITOLO 12

**LE STRUTTURE REALI: IMPERFEZIONI GEOMETRICHE**

(Aldo Raithel e Nicola Augenti)

### 12.1. Premessa

Nel capitolo 6 si è dato breve cenno dei motivi per cui risulta necessario valutare, sul modello di calcolo di una struttura, gli effetti di imperfezioni  $\Delta$  che ne mutino la geometria iniziale. A causa di tali imperfezioni la configurazione assunta dal sistema, quando tutti i suoi organi elastici non risultano sollecitati ( $s_j = 0 \Rightarrow S_j = 0$ ), sarà diversa da quella  $C_0$  finora considerata e verrà detta  $C_\Delta$ .

In fig. 12.1 sono dati due semplici esempi. Il primo consegue ad un errore di fabbricazione dell'asta orizzontale; il secondo ad un montaggio

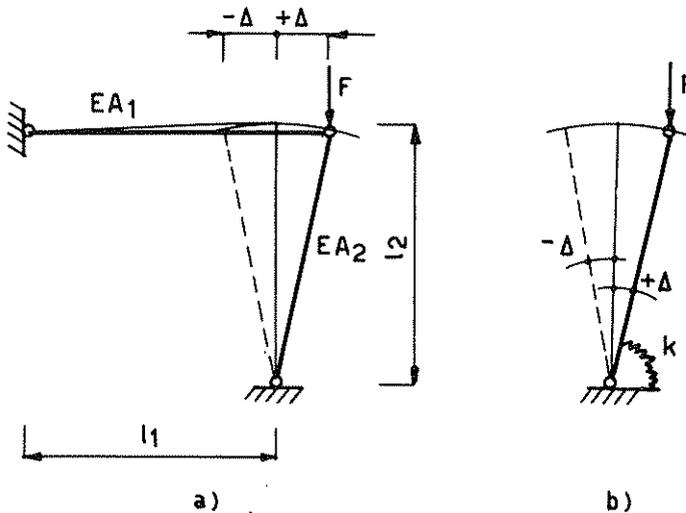


Fig. 12.1.

erroneo, o ancora ad un difetto di costruzione dell'organo elastico.

I due precedenti esempi, oltre a voler evidenziare la differenza tra  $C_0$  e  $C_\Delta$ , anticipano i due modi sostanzialmente diversi in cui le imperfezioni  $\Delta$  possono influire sul comportamento strutturale.

Nel primo caso, in cui non si può ovviamente trascurare la deformazione assiale delle aste, risulterà modificato il ramo naturale.

Nel secondo, posto  $EA = \infty$ , non si hanno più un ramo principale banale (asta verticale) ed un ramo secondario che prende vita per  $F = F_{crit}$ , bensì un unico e ben definito ramo principale.

## 12.2. La configurazione di riferimento

Nella formulazione della E.P.T. la scelta del riferimento  $C_\Delta$  ( $T = O$  in  $C_\Delta$ ) è quella che appare la più immediata e spontanea. Ostando peraltro a ciò alcune considerazioni:

- difficoltà di eseguire le valutazioni geometriche necessarie, deformazioni  $s_j$  e spostamenti  $f_k$ , partendo da una situazione scomoda come la  $C_\Delta$ ;
- opportunità, più che altro psicologica, di non abbandonare il riferimento  $C_0$  cui si torna se le  $\Delta$  si fanno scomparire.

Per tali motivi si penserà di "costringere" il sistema in  $C_0$ , e questa necessità di costrizione deriva ovviamente dal fatto che per  $F = 0$  tale configurazione non è di equilibrio (lo è la  $C_\Delta$ ), e di partire da quella configurazione.

Cosa accade in  $C_0$ :

- è presente una energia elastica di deformazione negli organi elastici. Nei casi di figura 12.1, rispettivamente:

$$\frac{1}{2} \frac{EA_1}{l_1} \Delta^2 \quad , \quad \frac{1}{2} k \Delta^2$$

- sono presenti sforzi  $S_\Delta$  negli organi elastici. Nei casi di fig. 12.1, rispettivamente:

$$S_\Delta = S_1 = \frac{EA_1}{l_1} \Delta \quad , \quad S_\Delta = S = k\Delta$$

La prima cosa non riveste alcuna importanza: la E.P.T. è definibile a meno di una costante.

La seconda è facilmente ovviabile, basterà porre in conto, nell'esprimere la energia elastica  $W$ , anche il loro contributo: proprio come si è fatto in 7.4 passando dalla E.P.T. globale a quella locale.

Il vantaggio è che tutto ciò riesce in modo automatico. Consideriamo il generico organo elastico (la sommatoria a tutti essi non muta il risultato). Poniamoci in  $C_\Delta$ : esso è scarico ma, rispetto a  $C_0$ , si legge in corrispondenza di esso la deformazione  $s_\Delta$  che rappresenta "l'imperfezione  $\Delta$ " (proprio  $\Delta$  nel caso degli esempi). Costringiamolo in  $C_0$ : nasce in esso una vera deformazione elastica, —  $s_\Delta$ . A partire da  $C_0$  facciamo evolvere le lagrangiane: queste forniscono una deformazione  $s$ . La deformazione tota-

le dell'organo elastico nella generica configurazione  $C$  sarà allora  $-s_{\Delta} + s^{(*)}$ ; l'energia immagazzinata varrà:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} k (-s_{\Delta} + s)^2 = \\ &= \frac{1}{2} k s_{\Delta}^2 - k s_{\Delta} s + \frac{1}{2} k s^2 \\ &= W^{(0)} - S_{\Delta} s + \frac{1}{2} k s^2 \end{aligned} \quad (12.1)$$

Con simboli analoghi a quelli adottati nel paragrafo 7.5 porremo, facendo scomparire la inessenziale costante  $W^{(0)} = k s_{\Delta}^2 / 2$ :

$$W = L_{\Delta} + \Phi \quad (12.2)$$

Comparando gli spostamenti  $s$  nelle loro quote infinitesime risulterà:

$$W = L_{\Delta}^{(1)} + L_{\Delta}^{(2)} + \dots + \Phi^{(2)} + \Phi^{(3)} + \dots \quad (12.3)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} W^{(1)} &= L_{\Delta}^{(1)} \\ W^{(r)} &= \Phi^{(r)} + L_{\Delta}^{(r)} \quad \forall r \neq 1 \end{aligned} \quad (12.4)$$

La conclusione è che, assumendo come riferimento la configurazione  $C_0$ , la energia elastica possiede in questo caso anche una quota del primo ordine; essa costituisce il termine principale in cui sono contenute le imperfezioni  $\Delta$ .

Ciò detto su  $W$ , il discorso sul potenziale dei carichi  $U$  è immediato. Esso differisce, in  $C_0$  e  $C_{\Delta}$ , di una costante; per la inessenzialità di una costante nella definizione della E.P.T. può scegliersi, senza necessità di modifiche, il riferimento  $C_0$ .

Con ciò la E.P.T. assume la sua forma operativa:

$$T = W^{(1)} + W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)} + \dots - F(f^{(1)} + f^{(2)} + \dots) \quad (12.5)$$

del tutto analoga alla (7.2) da cui differisce, e si vedano le (12.4);

- per la presenza del termine  $W^{(1)}$  ( $= L_{\Delta}^{(1)}$ );
- per il diverso significato dei termini  $W^{(r)}$ .

---

(\*) Va osservato che, nel caso di un solo organo elastico, le deformazioni  $s_{\Delta}$  ed  $s$  sono certamente di segno opposto. Nel caso più generale sarà certamente negativo il lavoro  $L_{\Delta}$  di seguito definito.

In merito all'ultima osservazione va però notato che se le imperfezioni  $\Delta$  vengono pensate piccole, e precisamente dello stesso ordine di grandezza delle lagrangiane, in ciascuna delle (12.4) il secondo termine che le contiene,  $L_{\Delta}^{(n)}$ , diventa trascurabile rispetto al primo; risulta allora:

$$W^{(n)} \simeq \Phi^{(n)} \quad (12.6)$$

e la differenza tra la (12.5) e la (7.3) è solo costituita dal primo termine,  $W^{(1)}$ . In tal caso, con piena equivalenza di significato dei termini comuni, la (12.5) si scriverà:

$$T = L_{\Delta}^{(1)} + W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)} + \dots - F(f^{(1)} + f^{(2)} + \dots) \quad (12.7)$$

Nel prosieguo si farà di solito riferimento alla (12.5), e non alla (12.7), stante che, in via operativa, la  $W$  viene calcolata direttamente come nella (12.1) cosicché la scomposizione espressa dalle (12.4) non viene in realtà effettuata. Ciononostante, le imperfezioni  $\Delta$  saranno sempre pensate come piccole perché ove ciò non fosse, si tratterebbe in realtà di un sistema diverso e di un diverso problema. Esso andrebbe affrontato in via diretta e non, tortuosamente, derivandolo da un'altro.

### 12.2.1. Esempio

Il sistema perfetto è rappresentato in fig. 12.2.a; per esso viene assunta quale lagrangiana  $Q$  la rotazione  $\varphi$  cosicché la deformazione dell'organo elastico è data da (vedi fig. 12.2.a):

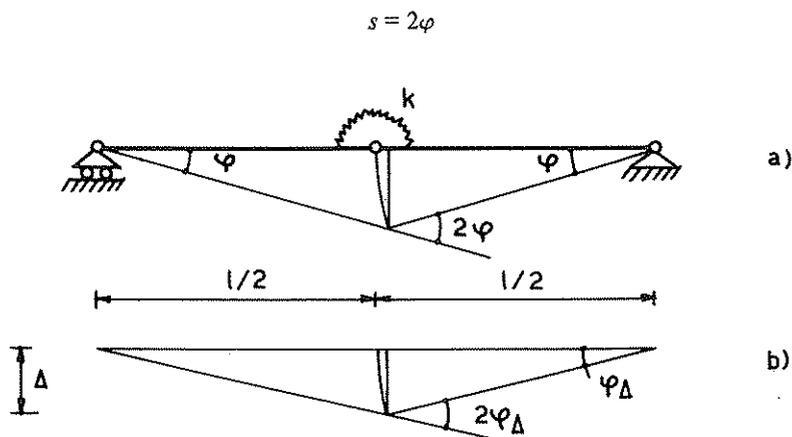


Fig. 12.2.

Come imperfezione si considera assegnato uno spostamento  $\Delta$  in mezzzeria, fig. 12.2.b. A tale  $\Delta$  consegue la rotazione di una semitrave:

$$\varphi_{\Delta} = \text{arc sen} \left( \frac{\Delta}{l/2} \right) = \frac{2 \Delta}{l} + \frac{1}{6} \left( \frac{2 \Delta}{l} \right)^3 + \dots$$

e la "deformazione iniziale" nell'organo elastico:

$$s_{\Delta} = 2 \varphi_{\Delta} = \frac{4 \Delta}{l} + \frac{1}{3} \left( \frac{2 \Delta}{l} \right)^3 + \dots$$

L'energia elastica  $W$  varrà, come noto,;

$$W = \frac{1}{2} k (s - s_{\Delta})^2 = \frac{1}{2} k s_{\Delta}^2 - k s_{\Delta} s + \frac{1}{2} k s^2$$

Prescindendo dalla costante:

$$W^{(0)} = \frac{1}{2} k s_{\Delta}^2$$

risulta:

$$W = -k \left[ \frac{4 \Delta}{l} + \frac{1}{3} \left( \frac{2 \Delta}{l} \right)^3 + \dots \right] 2 \varphi + \frac{1}{2} k (2 \varphi)^2 \quad (12.a)$$

Confrontando con le (12.4) si riconosce l'esistenza delle quote infinitesime:

$$W^{(1)} = -L_s^{(1)} = -8 \frac{k}{l} \Delta \varphi$$

$$W^{(2)} = \Phi^{(2)} - L_s^{(2)} = 2 k \varphi^2 \quad (L_s^{(2)} = 0)$$

$$W^{(3)} = \Phi^{(3)} - L_s^{(3)} = -\frac{16 k}{3 l^3} \Delta^3 \varphi \quad (\Phi^{(3)} = \Phi^{(4)} = \dots = 0)$$

Operando nello spirito delle (12.6) e (12.7), ovvero trascurando le potenze di  $\Delta$  superiori alla prima, si assumerà:

$$W = -8 \frac{k}{l} \Delta \varphi + 2 k \varphi^2 \quad (12.b)$$

Per quanto attiene il potenziale dei carichi  $U$ , ovvero le quote di vario ordine,  $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$ , dello spostamento generalizzato  $f$ , le determinazioni andranno eseguite esclusivamente a partire dallo schema di fig. 12.2.b (e con ciò si opera a meno della costante  $U_0 = -Ff_{\Delta}$ ).

### 12.3. La configurazione iniziale

Essendo nota la formulazione (12.5) della E.P.T. le equazioni di equilibrio si ottengono da essa con le consuete derivazioni rispetto alle lagrangiane. La generica di esse si scriverà:

$$T_i = W_i^{(1)} + W_i^{(2)} + W_i^{(3)} + \dots - F(f_i^{(1)} + f_i^{(2)} + \dots) = 0 \quad (12.8)$$

Va osservato che se si considera il valore assunto dalle (12.8) nella configurazione  $C_0$  con carico nullo ( $Q = 0, F = 0$ ) esse porgono:

$$T_i = T_i^{(1)} = W_i^{(1)} = L_{\Delta,i}^{(1)} \quad (12.9)$$

e per essere le  $W_i^{(1)}$  delle costanti, segnalano la non nullità della variazione prima delle E.P.T. in  $C_0$ ; ciò era da attendersi perché l'equilibrio, per  $F = 0$ , si stabilisce in  $C_{\Delta}$  e non in  $C_0$ .

In particolare, quindi, la configurazione  $C_{\Delta}$  sarà espressa dai valori delle lagrangiane che, per  $F = 0$ , soddisfano le (12.8); queste si riducono al sistema:

$$W_i^{(2)} + W_i^{(3)} + \dots = W_i^{(1)} = L_{\Delta,i}^{(1)} \quad (12.10)$$

e da tale  $C_{\Delta}$  avrà inizio il ramo naturale del sistema imperfetto.

Va osservato che per essere le (12.10) caso particolare delle (12.8), in assenza di  $F$ , si è espressa in realtà coincidenza di  $T$  e  $W$ ; ne deriva che la condizione di minimo risulta imposta alla sola  $W$  e può dirsi che: la configurazione  $C_{\Delta}$  assunta dal sistema sotto imperfezioni assegnate è quella che minimizza l'energia elastica di deformazione.

### 12.4. Il ramo naturale di equilibrio

Il precedente discorso evidenzia che le imperfezioni geometriche hanno l'effetto di "mettere in moto" le lagrangiane ancor prima che sul sistema siano fatti agire i carichi esterni partendo, come di consueto, dal valor nullo della loro intensità ( $F = 0$ ).

È d'uopo, a tale riguardo, fare qualche precisazione con riferimento ad una eventuale suddivisione delle lagrangiane, valida per il sistema perfetto.

Se tale suddivisione sussiste, e sia la consueta:  $n'$  coordinate  $Q_k$ ,  $N$  coordinate  $Q_l$  (che si attivano come  $q_l = Q_l$  sul ramo secondario) potrà accadere:

- che le  $\Delta$  chiamino in causa solo le  $Q_k$  (in  $C_\Delta$ :  $Q_k \neq 0$ ,  $Q_l = 0$ );
- che le  $\Delta$  chiamino in causa, "mettendole in moto", sia le  $Q_k$  che le  $Q_l$ , interessando così tutti i gradi di libertà del sistema.

Nel primo caso, solo il ramo naturale risentirà in modo diretto od immediato delle  $\Delta$ . Quello secondario, e quindi la biforcazione, esisterà sempre; risentirà al più del fatto che debba dipartirsi da una configurazione  $\bar{C}_\Delta$  diversa da quella da cui si sarebbe originata,  $\bar{C}$ , ove il sistema fosse stato perfetto.

#### 12.4.1. Esempio

L'asta di fig. 12.3 ha una imperfezione  $\Delta$  nella sua lunghezza  $l$ . Il regime pre-critico (ramo naturale) sarà retto da:

$$Q \equiv w = \frac{F(l \pm \Delta)}{EA}$$

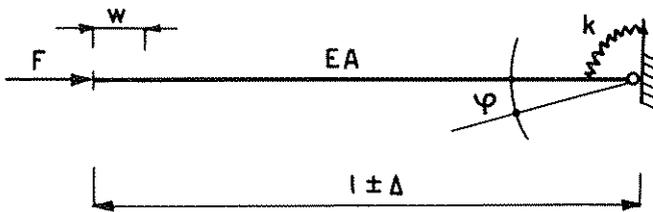


Fig. 12.3.

La presenza di tale imperfezione non influisce sull'esistenza del ramo secondario. Se si trascura  $\Delta$ , come eventualmente si è già operato nei riguardi di  $w$ , (e con ciò si rendono coincidenti  $C_o \equiv \bar{C} \equiv \bar{C}_\Delta$ ) sarà:

$$F_{crit} = \frac{k}{l}$$

Volendo, e si farà  $C_o \equiv \bar{C} \neq \bar{C}_\Delta$ , potrà sostituirsi  $l$  con  $l' = l \pm \Delta$ .

Nel secondo caso non si potrà più parlare della esistenza di un ramo principale e di un ramo secondario. Si avrà unicamente un ramo naturale che assume caratteristiche derivate da entrambi.

Al verificarsi di ciò, ed è ben intuibile, nella parte iniziale "comanderà" il ramo naturale perfetto; avvicinandosi al punto di biforcazione di questo (biforcazione che scompare) "comanderà" il ramo secondario perfetto. Se questo è stabile, si avrà salvezza della struttura: curva caratteristi-

ca sempre ascendente (equilibrio di 1<sup>a</sup> specie); se è invece instabile, la curva caratteristica dovrà piegare verso il basso: carico limite (equilibrio di 2<sup>a</sup> specie.)

#### 12.4.2. Esempio

Con riferimento all'esempio precedente si considera una imperfezione  $\Delta$  nell'organo elastico di rigidezza  $k$ .

Pur trascurando la deformazione assiale, e l'eventuale tolleranza di lunghezza dell'asta, risulterà:

$$T = \frac{1}{2}k (\varphi - \Delta)^2 - Ff$$

Espresso lo spostamento:

$$f = l(1 - \cos \varphi) = \frac{l}{2}\varphi^2 - \frac{l}{24}\varphi^4 \dots$$

la E.P.T. si scrive:

$$T = \frac{1}{2}k (\varphi - \Delta)^2 - \frac{Fl}{2}\varphi^2 + \frac{Fl}{24}\varphi^4 \dots$$

A questo punto la equazione di equilibrio:

$$\frac{dT}{d\varphi} = T_\varphi = 0$$

fornisce l'equazione del ramo naturale:

$$F = \frac{k}{l} \frac{\varphi - \Delta}{\varphi - \varphi^3/6} \quad (12.c)$$

che ha, ovviamente, inizio da  $\varphi = \Delta$  e si sviluppa in continua ascesa.

In figura 12.4 sono illustrati possibili andamenti di legami come il (12.c). Essi variano col valore assegnato a  $\Delta$  e tendono, per  $\Delta \rightarrow 0$ , alla soluzione del sistema perfetto: ramo naturale, in questo caso degenerare per avere considerato  $EA = \infty$ , e ramo deviato.

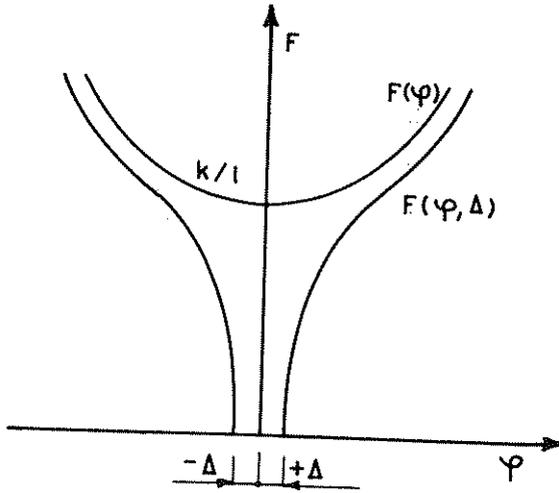


Fig. 12.4.

## 12.4.3. Esempio

Si riconsidera il caso di fig. 10.1 (esempio 10.4.1) introducendo nell'organo elastico una imperfezione  $\Delta$  cosicché nella configurazione  $C_\Delta$  l'asta non si presenta più rettilinea.

La espressione (10.a) della E.P.T. si modifica in:

$$T = \frac{1}{2} k (v - \Delta)^2 - \frac{F}{2l} \left( v^2 + \frac{v^4}{8l^2} + \dots \right) \quad (12.d)$$

per cui l'equazione di equilibrio si scrive:

$$T_v = k (v - \Delta) - \frac{F}{l} \left( v + \frac{v^3}{4l} + \dots \right) = 0$$

Da questa si deduce immediatamente l'equazione del ramo naturale:

$$F = kl \frac{v - \Delta}{v + v^2/4l} \quad (12.e)$$

che ha inizio per  $v = \Delta$ .

Se si cerca il massimo di  $F$  la condizione  $F_v = 0$ , scartata la radice negativa (per cui sarebbe  $v < \Delta$ ), porge lo spostamento corrispondente:

$$v = \Delta \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4l}{\Delta}} \right) \quad (12.f)$$

Sostituendo questo valore nella (12.e) per ogni valore di  $\Delta$  resta definito:

$$F_{MAX} \equiv F_{lim}(kl, \Delta) \quad (12.g)$$

In fig. 12.5 sono illustrati possibili andamenti di legami come il (12.e).

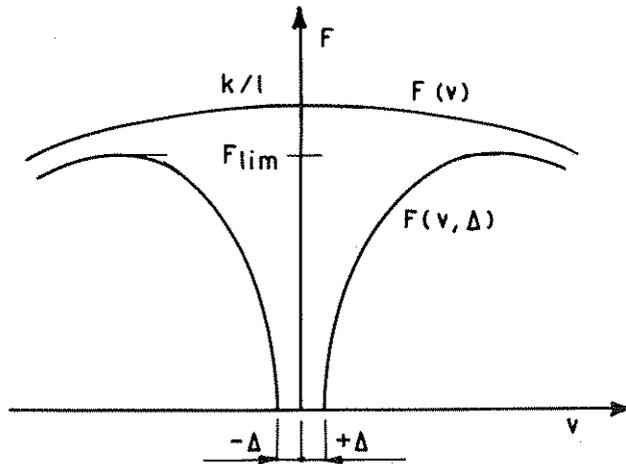


Fig. 12.5.

Naturalmente, anche in questo caso, per  $\Delta \rightarrow 0$  si riottiene il comportamento del sistema perfetto. In tale tendenza si riconosce piena conferma a quanto affermato in altra occasione: il carico critico instabile di un sistema perfetto ha totale significato di carico limite sul ramo secondario.

#### 12.4.4. *Esercizi proposti*

I due precedenti esempi si sono svolti esprimendo la E.P.T. in termini di vario ordine, come di fatto sempre necessario nei casi reali, ed in conformità degli sviluppi teorici. La semplicità dei casi ne consente immediata soluzione in forma chiusa. Se ne richiede la formulazione ed il confronto con i risultati innanzi riportati.

### 12.5. Le equazioni di equilibrio

La precedente descrizione del ramo naturale di equilibrio, e le semplici esemplificazioni che se ne sono date, è, naturalmente, del tutto conforme alle indicazioni che possono trarsi da una discussione generale delle equazioni di equilibrio.

Ciò viene di seguito fatto in pieno confronto, e non potrebbe essere altrimenti, a quanto svolto al capitolo 8, con riferimento ai sistemi perfetti, ed in particolare al paragrafo 8.3.

Si inizia quindi riscrivendo le (12.8) con la sola modifica formale di raggruppare i primi due termini energetici:

$$(W^{(2)} + L_{\Delta}^{(1)})_i + W_i^{(3)} + W_i^{(4)} + \dots - F(f_i^{(1)} + f_i^{(2)} + \dots) = 0 \quad (12.11)$$

Osservato che la soluzione effettiva dovrà dar luogo a un valore di  $F$  indipendente dalla particolare equazione utilizzata, si deduca tale valore proprio dalla equazione *i*-ma rappresentata dalla (12.11):

$$F = \frac{(W^{(2)} + L_{\Delta}^{(1)})_i + W_i^{(3)} + W_i^{(4)} + \dots}{f_i^{(1)} + f_i^{(2)} + \dots} = F(Q_i) \quad (12.12)$$

Da tale espressione si trae subito che, salvo la modifica del primo termine dovuto alla costante  $L_{\Delta}^{(1)}$  in cui appaiono le  $\Delta$ , la discussione si svolge in modo del tutto analogo a quella condotta sulla (8.9).

La soluzione del 1° ordine è ovviamente fornita da:

$$F = \frac{(W^{(2)} + L_{\Delta}^{(1)})_i}{f_i^{(1)}} = \frac{W_i^{(2)}}{f_i^{(1)}} + \frac{L_{\Delta}^{(1)}}{f_i^{(1)}} \quad (12.13)$$

e differisce da quella del sistema perfetto sia per il diverso valore che qui assume  $W_i^{(2)}$ , vedi la seconda delle (12.4), che per la presenza del secondo addendo, dove le imperfezioni appaiono in modo più esplicito.

Essa costituisce la parte principale della soluzione: tangente nell'origine al ramo naturale.

Le modificazioni a tale soluzione, quando al crescere della deformazione, ovvero delle lagrangiane, non sono più trascurabili i termini successivi delle (12.12), è ovviamente demandata a  $W^{(3)}$  ed  $f^{(2)}$ , in loro mancanza, al primo successivo non nullo.

Non ci dilungheremo su tale discorso dando qui per integralmente trascritto il contenuto del capitolo 8 nella parte successiva alle formule (8.9) ed (8.10).

Dovremo peraltro precisare che, pur mantenendo le predette considerazioni piena validità, le valutazioni dei segni possono risultare apparentemente del tutto capovolte; ove accada quanto detto, e nonostante ciò, concettualmente nulla sarà mutato.

Riesaminando gli esempi 12.4.2 e 12.4.3 appare che l'inversione di segno dell'imperfezione  $\pm\Delta$  è del tutto irrilevante; a seconda di tale segno si

percorre un ramo di equilibrio o un'altro simmetrico del primo. L'esistenza di tale simmetria è però caso particolare, assicurato dalla mancanza di  $T^{(3)}$ , e più in generale, dalle quote dispari nella espressione della E.P.T.<sup>(1)</sup>.

Ciò premesso, riesaminiamo la (12.12), e ancor meglio, la (12.13); cosa accade se si cambia segno alle  $\Delta$  ?

- la "costante"  $L_{\Delta,i}^{(1)}$  cambia segno essendo lineare nelle  $\Delta$ ;
- il termine  $W_i^{(2)}$ , lineare nelle  $Q$ , deve anch'esso cambiare di segno.

Il ramo di equilibrio, e la teoria del 1° ordine ne rappresenta nello spazio  $R^{n+1}$  (carico-lagrangiane) la tangente iniziale, prende inizio con  $Q$  di segno opposto. A tale cambiamento di segno sono insensibili i termini pari della E.P.T., mentre lo seguono i termini dispari, primo tra essi  $T^{(3)}$  e quindi  $W^{(3)}$ . Il suo ruolo si inverte.

Se per  $\Delta$  di un segno,  $W^{(3)}$  è auspicie di equilibrio di 1ª specie (stabilità crescente, curva caratteristica sempre ascendente) per  $\Delta$  di segno opposto, darà profezia di equilibrio di 2ª specie.

Affinché tali profezie assumano il carattere di certezze è noto che bisogna esaminare anche  $f^{(2)}$ ; ma  $f^{(2)}$  è forma pari nelle  $Q$ , non cambia segno, ed allora:

- *IN UN SISTEMA DISIMMETRICO IL RAMO NATURALE DI EQUILIBRIO HA CARATTERISTICHE DIPENDENTI DAL SEGNO DELLE IMPERFEZIONI.*
- *IN UN SISTEMA SIMMETRICO LE CARATTERISTICHE DEL RAMO NATURALE NON DIPENDONO DAL SEGNO DELLE IMPERFEZIONI.*

Il ruolo determinante è ancora una volta assunto, nei casi che esista o che sia nulla, da  $W^{(3)}$ .

Ai rami naturali generati dalle imperfezioni sarà dato genericamente il nome, già utilizzato, di *RAMI NATURALI IMPERFETTI*; quando però viene precisato valore e segno delle imperfezioni, e quindi si perviene alla precisa identificazione di uno di questi, ad esso daremo il nome di *RAMO IMPERFETTO COATTO*.

Nel concludere noteremo come possa ritenersi utile inserire imperfezioni "ad hoc" così da obbligare la struttura a seguire un ramo di equilibrio più forte; con ciò si ricade nella tecnica delle distorsioni impresse.

## 12.6. I casi di simmetria

Quando si considerano problemi simmetrici si ricade nelle possibilità già esaminate in sede di esemplificazione.

La prima di esse è che le imperfezioni, anche esse rispettose della sim-

---

<sup>(1)</sup> Gli esempi ricordati sono "costituzionalmente simmetrici"; tale è il ramo naturale assunto,  $Q = 0$ ; tali, sempre, i rami secondari (nullità delle quote dispari della E.P.T. nell'intorno del canale critico, vedi 10.6).

metria, attivino solo le lagrangiane  $Q_k$ , già non nulle nel caso di sistema perfetto (esempio 12.4.1).

In tali situazioni la curva caratteristica  $F-f$  del sistema non cambia la sua qualità con le imperfezioni  $\Delta$ ; le variazioni sono solo quantitative e la rappresentazione è quella di fig. 12.6:

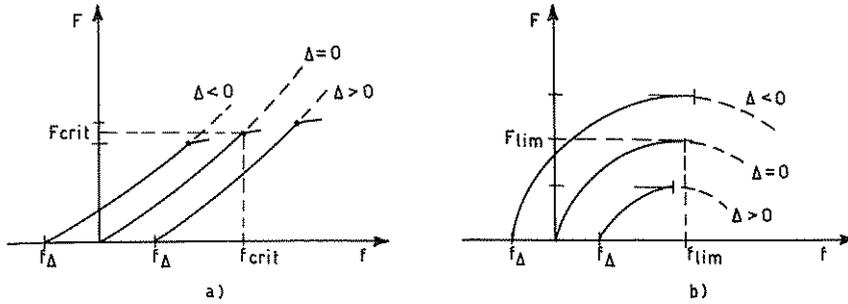


Fig. 12.6.

In a) si è illustrato un caso di stabilità crescente, con punto di biforcazione stabile; in b), pur sussistendo in generale pericolo di biforcazione sul tratto ascendente, si è evidenziata la influenza delle imperfezioni sul carico limite.

La seconda possibilità è quella già considerata negli esempi 12.4.2 e 12.4.3: tutte le lagrangiane sono inizialmente impegnate dalle imperfezioni. A seconda del segno di queste esisteranno, per ogni loro valore, due rami naturali perfettamente simmetrici. Nella rappresentazione in termini di curva caratteristica,  $F-f$ , tali due rami coincidono e ciò mostra la ines-

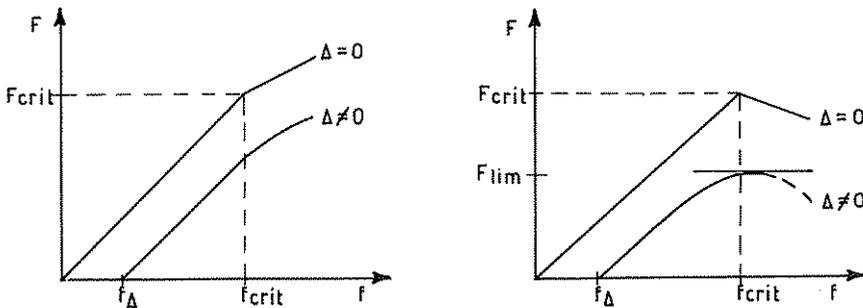


Fig. 12.7.

senzialità del segno di  $\Delta$  sulla tipologia della soluzione.

In fig. 12.7. a) si è esplicitamente considerata la modifica del ramo imperfetto nel caso di biforcazione stabile: scomparsa del carico critico.

In fig. 12.7. b), dove il punto di biforcazione si è considerato instabile, la modifica dovuta alle  $\Delta$  non è solo quantitativa: al pericolo di carico critico si sostituisce quello, più insidioso, di carico limite.

### 12.7. Il caso di asimmetria

Ove la struttura su cui si considerano le imperfezioni sia non simmetrica, il problema diventa più complesso. Nel prosieguo lo riguarderemo prescindendo da una eventuale biforcazione e ciò stante il fatto che essa, presentandosi in una configurazione ben definita,  $\overline{C}_\Delta$ :

- non modifica il ramo naturale nella parte che la precede, e che è quello di interesse;
- dà luogo nella sua prossimità, che è la unica parte che si prende in considerazione, ad un comportamento simmetrico.

Ciò stante, si diano le  $\Delta$  e ad esse corrisponda il ramo naturale imperfetto che si origina, per  $F = 0$ , in  $f_\Delta$ . Senza togliere generalità al discorso supponiamo che esso si presenti come nella fig. 12.8.:

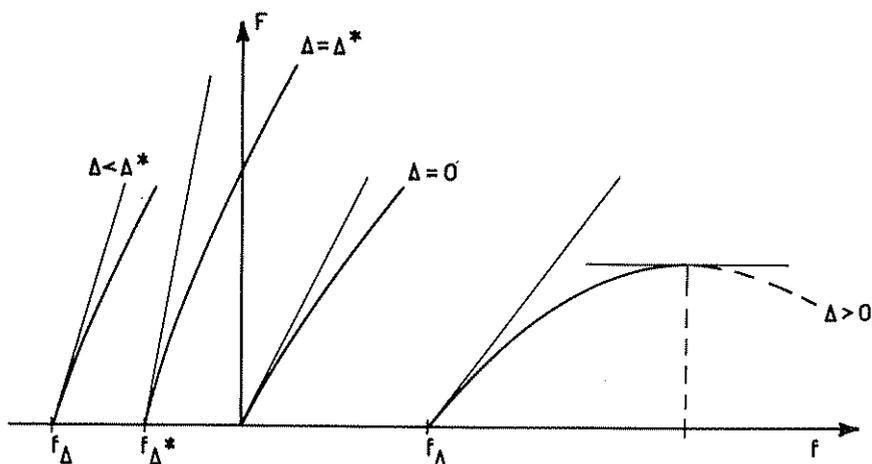


Fig. 12.8.

Tenendo presente la (12.13), che rappresenta la tendenza iniziale del comportamento strutturale (teoria del 1° ordine), facciamo diminuire le  $\Delta$ . Man mano che queste diventano più piccole, diminuisce  $f_\Delta$  e la tangente iniziale ruota fino a pervenire alla posizione che le compete nel sistema perfetto, ove passa per l'origine. Se consideriamo  $\Delta$  ancora più piccole, e quindi negative, anche  $f_\Delta$  diventa negativa e la tangente iniziale assumerà ad un certo punto una inclinazione limite che non potrà in ogni caso superare; ciò avverrà per un particolare valore delle imperfezioni,  $\Delta = \Delta^*$ , cui corrisponderà  $f_\Delta = f_{\Delta^*}$ , che si dirà **IMPERFEZIONE CARATTERISTICA**. Essa è tale da bilanciare al meglio la asimmetria insita nello schema strutturale e segna la fine di un possibile comportamento. Se si fa diminuire ancora  $\Delta$ , e si va quindi ancora più a sinistra in fig. 12.8, la struttura si comporta in modo diverso da quello iniziale nel senso che alcune delle

lagrangiane che si annullano per  $\Delta = \Delta^*$ , evolvono ora con segno opposto: nel diagramma  $F-f$  ciò è denunciato da un "ritorno" della tangente.

La possibilità innanzi considerata mostra come le imperfezioni, al variare di segno, possano, oltre certi valori caratteristici, spingere la struttura da un comportamento asimmetrico connaturato, ad altro comportamento asimmetrico innaturale.

### 12.7.1. Esempio

Si riconsidera l'esempio 8.8.3, nel quale si è studiato il comportamento della struttura perfetta di fig. 12.9, cui si attribuisce come imperfezione la tolleranza  $\Delta$  sulla lunghezza dell'asta verticale.

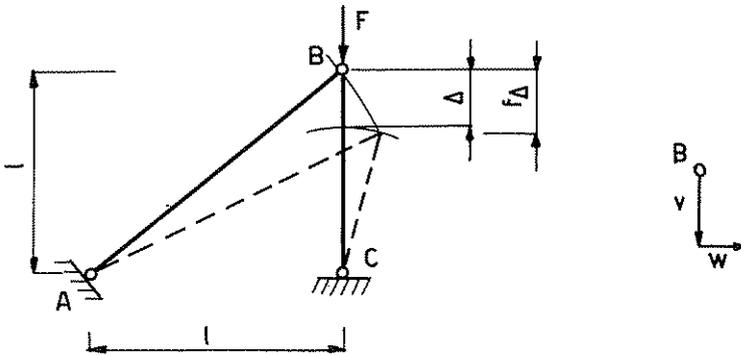


Fig. 12.9.

Le convenzioni e le ipotesi di base sono quelle già adottate nell'esempio citato;  $\Delta$  viene assunta positiva verso il basso.

La espressione (8.h) della E.P.T. va corretta per quello che è il contributo dell'asta verticale (termini in  $\rho$ ). Lo spostamento nella direzione dell'asta,  $\Delta t$ , è ora somma di quello necessario a riportare la struttura da  $C_\Delta$  a  $C_o$  ( $= \Delta$ ), e di quello dovuto alla lagrangiana  $v$  ( $= -v$ )<sup>(1)</sup>; lo spostamento normale all'asta,  $\Delta n$ , è sempre dovuto alla lagrangiana  $w$  ( $= w$ ):

$$\Delta t = + \Delta - v \quad ; \quad \Delta n = w$$

La variazione di lunghezza dell'asta vale allora, vedi esempio 4.5.1:

$$\Delta l = \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\Delta n^2}{l} = \Delta - v + \frac{1}{2l} w^2$$

<sup>(1)</sup> Si assumono positivi, come di consueto, gli spostamenti che tendono ad allungare l'asta.

e l'energia elastica di deformazione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{EA_2}{l} \Delta l^2 &= \frac{EA_2}{2l} \left( \Delta - v + \frac{1}{2l} w^2 \right)^2 = \\ &= \rho \frac{EA_1}{2l} \left( \Delta^2 + v^2 + \frac{1}{4l^2} w^4 - 2 \Delta v + \frac{\Delta}{l} w^2 - \frac{1}{l} v w^2 \right) \end{aligned}$$

Arrestandosi ai termini di terzo grado nelle lagrangiane, e trascurando la costante in  $\Delta^2$ , si ha:

$$EA_1 l \rho \left( \frac{1}{2} \bar{v}^2 - \bar{w}^2 \bar{v} - \bar{\Delta} \bar{v} + \frac{1}{2} \bar{\Delta} \bar{w}^2 \right)$$

Dal confronto con la (8.h) si vede che vanno aggiunti i termini:

$$\Delta T = \Delta W = EA_1 l \rho \left( -\bar{\Delta} \bar{v} + \frac{1}{2} \bar{\Delta} \bar{w}^2 \right) \quad (12.h)$$

Tenendo conto dei loro contributi (derivate) nelle equazioni di equilibrio (8.m) queste risultano così modificate:

$$\begin{aligned} (T_w = 0) \quad & \frac{\sqrt{2}}{4} \bar{w} - \frac{\sqrt{2}}{4} \bar{v} - \rho \bar{w} \bar{v} + \rho \bar{w} \bar{\Delta} = 0 \\ (T_v = 0) \quad & -\frac{\sqrt{2}}{4} \bar{w} + \rho \bar{v} - \frac{1}{2} \rho \bar{w}^2 - \rho \bar{\Delta} = \bar{F} \end{aligned} \quad (12.i)$$

Dalla prima si deduce:

$$\bar{v} = \bar{v}(\bar{w}) = \bar{w} \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} + \rho \bar{\Delta}}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \rho \bar{w}} \quad (12.l)$$

e posto questo valore nella seconda:

$$\bar{F} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \bar{w} + \rho \bar{w} \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} + \rho \bar{\Delta}}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \rho \bar{w}} - \frac{1}{2} \rho \bar{w}^2 \quad (12.m)$$

che definisce il ramo naturale.

L' estremo di  $F, F_{lim}$ , è individuato dal valore di  $w$  per cui:

$$\frac{dF}{d\bar{w}} = F_{\bar{w}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{w}^3 + \frac{3\sqrt{2}}{4\rho}\bar{w}^2 + \frac{3}{8\rho^2}\bar{w} - \left(\frac{1}{8\rho^2} + \frac{\sqrt{2}}{4\rho}\bar{\Delta}\right) = 0 \quad (12.n)$$

Assegnato  $\rho = 10^4$ , e facendo variare  $\bar{\Delta}$ , si sono ottenuti i valori di seguito tabellati:

$\bar{\Delta}$	$\bar{w}$	$\bar{F}_{lim}$
$45 \cdot 10^{-6}$	$1,749 \cdot 10^{-3}$	0,3217
$35 \cdot 10^{-6}$	$1,672 \cdot 10^{-3}$	0,3244
$25 \cdot 10^{-6}$	$1,587 \cdot 10^{-3}$	0,3272
$15 \cdot 10^{-6}$	$1,492 \cdot 10^{-3}$	0,3302
$5 \cdot 10^{-6}$	$1,383 \cdot 10^{-3}$	0,3334
0	$1,322 \cdot 10^{-3}$	0,3351
$-5 \cdot 10^{-6}$	$1,255 \cdot 10^{-3}$	0,3369
$-15 \cdot 10^{-6}$	$1,094 \cdot 10^{-3}$	0,3408
$-25 \cdot 10^{-6}$	$0,086 \cdot 10^{-3}$	0,3454
$-35 \cdot 10^{-6}$	$0,026 \cdot 10^{-3}$	0,3527
$-45 \cdot 10^{-6}$	$-0,035 \cdot 10^{-3}$	0,3422

Essi confermano pienamente l'andamento previsto:

- per  $\bar{\Delta} = 0$  si ritrova una soluzione nota (struttura perfetta);
- per  $\bar{\Delta} > 0$  si ha un deterioramento rispetto ai risultati del sistema perfetto;
- per  $\bar{\Delta} < 0$  si ha un primo tratto in cui prevale ancora il comportamento del sistema perfetto ( $\bar{w} > 0$ ) ma si ha un irrigidimento della struttura;
- per  $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}^*$  il cambiamento di comportamento che qui si ha per  $\bar{\Delta}^* \approx -37 \cdot 10^{-6}$ ;
- per  $\bar{\Delta} < \bar{\Delta}^*$  il nuovo comportamento ( $\bar{w} < 0$ ) e l'inizio di un nuovo deterioramento per  $\bar{\Delta}$  ancora minori.

Ovviamente può aversi il caso esattamente opposto a quello considerato in fig. 12.8 e nel precedente esempio. Basterà a tal fine pensare che la struttura "perfetta" sia quella la cui geometria contiene imperfezioni minori delle  $\Delta^*$  qui esplicitamente considerate. Per essa vale identicamente il discorso precedente ma la situazione sull'asse delle  $f$  sarà configurata al contrario: il cambio di comportamento avverrà prima di scavalcare l'origine. In tal caso, e contrariamente a quanto prima verificatosi, il superamento della imperfezione caratteristica dà luogo ad un comportamento strutturale meno efficiente.

CAPITOLO 13

**LE STRUTTURE REALI: FORZE DI DISTURBO**

(Aldo Raithel e Nicola Augenti)

### 13.1. Premessa

L'aver già discusso di imperfezioni geometriche semplifica notevolmente il discorso relativo alle forze di disturbo, rappresentate dal loro parametro di intensità  $D$  già introdotto nel capitolo 6.

Se infatti si pensa che l'*ACCIDENS*, rappresentato da  $D$ , si verifichi prima dell'azione delle forze principali, ovvero per  $F = 0$ , si ha che queste, al loro insorgere ( $F$  crescente a partire da zero) troveranno il sistema in una configurazione, e sia  $C_D$ , diversa da quella di riferimento  $C_0$ . Per  $D = \text{cost}$  (massimo valore dell'*accidens* che si considera) si percorrerà allora nello spazio  $F-Q$ , un ramo di equilibrio disturbato, la cui la configurazione generica sarà detta  $C_{DF}$ .

Se si pensa, al contrario, di applicare prima  $F$ , e si percorre quindi il ramo naturale indisturbato, ci si arresti al generico valore  $F = \text{cost}$ : configurazione  $C_F$ . Una successiva applicazione della  $D$ , fatta crescere beninteso staticamente da zero al suo valore finale, trasporterà il sistema da  $C_F$  a  $C_{FD}$ .

Orbene  $C_{DF}$  e  $C_{FD}$  coincidono e pertanto lo studio può essere condotto ipotizzando che sul sistema avvenga per prima l'applicazione della  $D$ .

Che tale coincidenza sussista è immediata conseguenza del modo stesso in cui è formata la E.P.T.:

$$T = W - Ff - Dd \quad (13.1)$$

Essa non riconosce "primogenitura":  $F$  e  $D$  hanno eguale dignità e presenza nella (13.1) tanto che nulla osterebbe a far ritenere  $F$  disturbatrice e  $D$  principale. Una volta, cioè, assegnate  $F$  e  $D$ , le equazioni di equilibrio, che si deducono dalla (13.1), sono uniche.

Ciò stante, potremo sempre pensare che le  $F$  agiscano, come detto all'inizio, sul sistema disturbato, configurazione  $C_D$  e da ciò deriva una piena analogia col caso delle imperfezioni.

### 13.2. Le equazioni di equilibrio

Non sussistendo alcun discorso preliminare sulla formulazione della

E.P.T., formula (13.1), dovrà semplicemente considerarsi la sua espressione reale nelle varie quote infinitesime in funzione delle lagrangiane:

$$T = W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)} + \dots - F (f^{(1)} + f^{(2)} + \dots) + \\ - D (d^{(1)} + d^{(2)} + \dots) \quad (13.2)$$

In quest'ultima, una generica attribuzione di piccolezza alla  $D$  consente, ma non è comunque cosa necessaria, che si trascurino  $d^{(2)}$  ed i termini successivi. La generica equazione di equilibrio, esplicitata come di consueto rispetto ad  $F$ , fornisce allora:

$$F = \frac{(W^{(2)} - Dd^{(1)})_i + W_i^{(3)} + W_i^{(4)} + \dots}{f_i^{(1)} + f_i^{(2)}} \quad (13.3)$$

e il del pari usuale avvio, teoria del 1° ordine,:

$$F = \frac{(W^{(2)} - Dd^{(1)})_i}{f_i^{(1)}} \quad (13.4)$$

Non ripeteremo la discussione fatta con riferimento alle imperfezioni nei paragrafi 12.5 e 12.6; essa si dà qui come interamente trascritta con la sostanziale sostituzione della parola "imperfezione" con "disturbo".

Ne consegue che, a seconda del segno  $D$ , possa attuarsi uno dei due *RAMI NATURALI DISTURBATI*. Naturalmente, fissato il segno di  $D$ , solo uno di questi sussiste e verrà detto *RAMO DISTURBATO COATTO*.

### 13.2.1. Esempio

Si ripropone l'esempio simmetrico 12.4.2 che, adattato al problema attuale, si configura come appresso:

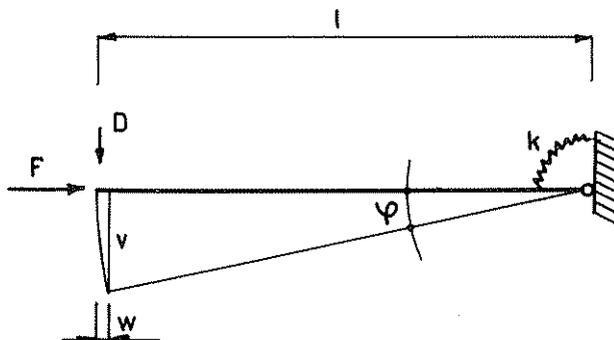


Fig. 13.1.

Risulta:

$$s = \varphi \quad f = l(1 - \cos \varphi) = \frac{l}{2} \varphi^2 - \frac{l}{24} \varphi^4 \dots \quad d^{(1)} = l \varphi$$

e pertanto:

$$T = \frac{1}{2} k \varphi^2 - \frac{Fl}{2} \left( \varphi^2 - \frac{\varphi^4}{12} \right) - Dl \varphi \quad (13.a)$$

L'equazione di equilibrio  $T_\varphi = 0$  fornisce:

$$F = \frac{\frac{k}{l} \varphi - D}{\varphi - \frac{\varphi^3}{6}} \quad (13.b)$$

Si constata che per  $F = 0$  la lagrangiana  $\varphi$  è già attivata:

$$\varphi = \varphi_D = \frac{Dl}{k} \quad (13.c)$$

e che, al crescere di  $\varphi$  oltre tale valore, si ha un andamento consimile a quello di fig. 12.4.

### 13.2.2. *Esercizio proposto*

Partendo dal caso considerato in 12.4.3 si mostri, come, per  $\Delta = 0$  e  $D \neq 0$ , si pervenga a risultati consimili a quelli di fig. 12.5.

### 13.2.3. *Esercizio proposto*

Rinunciando agli sviluppi in serie, inutili data la semplicità degli schemi considerati, si dia la soluzione esatta dei precedenti esempi.

Ovviamente nel caso che, per  $D = 0$ , preesista simmetria i due rami disturbati saranno simmetrici ed equivalenti: in termini di curva caratteristica saranno rappresentati da un unico diagramma.

Ciò non accade se la struttura è disimmetrica e potrà, anche questa volta, addivenirsi ad una definizione di *DISTURBO CARATTERISTICO* che indicheremo con  $D^*$ . Prescindendo qui da ovvie considerazioni sui versi (svolte nel caso analogo di  $\Delta^*$ ) avverrà che:

- per  $D < D^*$  l'andamento del ramo disturbato non sarà molto dissimile da quello del ramo naturale indisturbato;
- per  $D > D^*$  si perverrà ad un andamento sostanzialmente diverso (cambiamento di segno di alcune lagrangiane).

Il pericolo è ovviamente a ricercarsi nel fatto che si possa instaurare, scavalcata  $D^*$ , un ramo disturbato coatto sostanzialmente più debole di quello naturale (curva caratteristica più schiacciata).

#### 13.2.4. Esempio

Si riprende ancora una volta in esame la struttura degli esempi 8.8.3 e 12.7.1, questa volta perfetta ma soggetta ad una forza di disturbo  $D$  orizzontale nel nodo  $B$ . Essa viene assunta positiva verso destra: concorde allo spostamento positivo  $w$ .

Le modifiche da apportare alla E.P.T., data dalla (12.h), sono questa volta banali; aggiunta del termine:

$$\Delta T = - Dw \quad (13.d)$$

Ne risulta modificata solo la seconda delle equazioni di equilibrio (12.i) (derivazione rispetto a  $w$ ); eseguita la adimensionalizzazione:

$$\bar{D} = \frac{D}{EA_1}$$

il sistema risolvente è quindi:

$$\begin{aligned} (T_w = 0) \quad & \frac{\sqrt{2}}{4} \bar{w} - \frac{\sqrt{2}}{4} \bar{v} - \rho \bar{w} \bar{v} - \bar{D} = 0 \\ (T_v = 0) \quad & \frac{\sqrt{2}}{4} \bar{w} + \rho \bar{v} - \frac{1}{2} \rho \bar{w}^2 = \bar{F} \end{aligned} \quad (13.e)$$

Operando le consuete sostituzioni,  $\bar{v} = \bar{v}(\bar{w})$  dalla prima nella seconda, risulta:

$$\bar{v} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} \bar{w} - \bar{D}}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \rho \bar{w}} \quad (13.f)$$

$$\bar{F} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \bar{w} + \rho \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} \bar{w} - \bar{D}}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \rho \bar{w}} - \frac{1}{2} \rho \bar{w}^2 = 0 \quad (13.g)$$

che fornisce l'equazione del ramo disturbato.

Proseguendo:

$$\frac{d\bar{F}}{d\bar{w}} = F_{\bar{w}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{w}^3 + \frac{3\sqrt{2}}{4\rho}\bar{w}^2 + \frac{3\bar{w}}{8\rho^2} - \left( \frac{1}{8\rho^2} + \frac{\bar{D}}{\rho} \right) = 0 \quad (13.h)$$

e la (13.h) dà i valori dello spostamento  $\bar{w}$  allo stato limite.

Assegnato  $\rho = 10^4$ , e facendo variare  $\bar{D}$ , si sono ottenuti i valori di seguito tabellati:

$\bar{D}$	$\bar{w}$	$\bar{F}_{lim}$
$20 \cdot 10^{-4}$	$7,348 \cdot 10^{-3}$	0,0773
$15 \cdot 10^{-4}$	$6,677 \cdot 10^{-3}$	0,1249
$10 \cdot 10^{-4}$	$5,837 \cdot 10^{-3}$	0,1780
$5 \cdot 10^{-4}$	$4,644 \cdot 10^{-3}$	0,2409
$1 \cdot 10^{-4}$	$2,788 \cdot 10^{-3}$	0,3092
0	1,322	0,3351
$-1 \cdot 10^{-4}$	$-1,030 \cdot 10^{-3}$	0,3613
$-5 \cdot 10^{-4}$	$-1,826 \cdot 10^{-3}$	0,3450
$-10 \cdot 10^{-4}$	$-2,311 \cdot 10^{-3}$	0,3342
$-15 \cdot 10^{-4}$	$-2,649 \cdot 10^{-3}$	0,3257
$-20 \cdot 10^{-4}$	$-2,918 \cdot 10^{-3}$	0,3184

Essi confermano pienamente l'andamento previsto:

- per  $\bar{D} = 0$  si ritrova una soluzione nota (struttura indisturbata);
- per  $\bar{D} > 0$  si ha un deterioramento rispetto ai risultati del sistema perfetto (in questo caso particolarmente rapido);
- per  $\bar{D} < 0$  si ha un primo tratto, non visibile col passo della precedente tabellazione, in cui prevale il comportamento del sistema perfetto ( $\bar{w} > 0$ ) ma si ha un irrigidimento della struttura;
- per  $\bar{D} = \bar{D}^*$  il cambiamento di comportamento che qui si ha tra  $\bar{D} = 0$  e  $\bar{D} = -1 \cdot 10^{-4}$ . Ad una indagine più spinta risulta  $\bar{D}^* \approx -0,125 \cdot 10^{-4}$  avendosi in corrispondenza  $\bar{w} \approx 0$ ,  $\bar{F} \approx 0,43$ ;
- per  $\bar{D} < \bar{D}^*$  il nuovo comportamento ( $\bar{w} < 0$ ) e l'inizio di un nuovo deterioramento per  $\bar{D}$  ancora minori (comunque più lento che per  $\bar{D} > 0$ ).

### 13.3. Conclusioni

Atteso che la scelta di uno schema strutturale è sostanzialmente dettata dalle sue funzioni, e quindi dalle azioni principali che dovrà sopportare, può ben comprendersi come esso possa rivelarsi particolarmente indifeso rispetto all'imprevisto. In tal senso prendere in considerazione turbative è di estremo interesse e qui esse si sono rappresentate con forze di disturbo.

La risposta strutturale a tale tipo di azioni è del tutto simile a quella mostrata nel caso di imperfezioni. Per sistemi simmetrici può pervenirsi a leggi di equilibrio sostanzialmente difformi; nei sistemi asimmetrici, oltre a doversi considerare situazioni di inversione di comportamento (alcune lagrangiane cambiano segno), può verificarsi un deterioramento del comportamento di base che, a differenza di quanto accade per le imperfezioni, può assumere aspetti quantitativi di notevole rilievo come nell'esempio che precede.

CAPITOLO 14

**LE STRUTTURE REALI: ELASTICITÀ NON LINEARE**

(Aldo Raithel e Nicola Augenti)

### 14.1. Premessa

Lo studio di base sull'equilibrio e la stabilità delle strutture è quello condotto con riferimento all'adozione di materiali perfetti. Tanto perfetti da esibire un legame costitutivo elastico-lineare-indefinito; di un tale materiale si sono pensati costruiti gli organi elastici considerati nella presente opera.

È peraltro noto che una tale schematizzazione può non coprire adeguatamente il campo di indagine di volta in volta necessario; una elasticità ancora perfetta, ma non più lineare, può essere impegnata; ancora più oltre può entrarsi nel campo delle deformazioni residue (leggi di carico e scarico non più coincidenti).

Pur senza volere entrare in tale ultimo campo, e si tratterebbe in effetti di un vero e proprio calcolo spinto fino alla rottura, è sembrato necessario non sottacere quali stravolgimenti concettuali possano derivare da un semplice sconfinamento dal campo lineare a quello non lineare seppure, sempre, in elasticità perfetta.

A tale sconfinamento viene dedicato questo capitolo.

### 14.2. L'energia elastica di deformazione

Si è più volte avuto occasione di dire che la vita strutturale è condizionata dalla forma  $W$ , attitudine ad assorbire energia; essa si crea e si costruisce parallelamente alla costruzione della struttura reale. Ove fosse possibile realizzare una struttura capace di immagazzinare energia in qualunque forma le fosse somministrata, ovvero, in campo statico, per qualunque distribuzione di azioni ad essa applicata, questa sarebbe eterna ed indistruttibile. Stante la impossibilità di pervenire a tanto limitiamoci, per una struttura assegnata, a vedere come i suoi destini futuri possano essere influenzati dallo "scostamento" da una legge elastico-lineare. Di tali possibilità si è già discusso nei capitoli 3 e 4; si è ivi notato che si può correggere l'andamento lineare adottando leggi che presentino, oltre al termine di primo grado che lo rappresenta, altri termini di grado  $\alpha > 1$ . La discussione ivi condotta ha mostrato che l'assunzione di termini di tale tipo, e ci

si è limitati ad una forma binomia, non può essere del tutto arbitraria: vanno rispettate le ipotesi assunte a caratterizzare una perfetta elasticità.

Operando in tali limiti, e con forma binomia, si è visto come in realtà operare la "correzione" della elasticità lineare equivalga ad affiancare, ad ogni organo elastico lineare, un altro organo non lineare.

Le reazioni offerte dai due organi valgono rispettivamente, vedi (3.8), (4.6) e (4.7):

$$S_1 = k_1 s \quad , \quad S_\alpha = k_\alpha |s^\alpha| (\text{sgn } s) \quad (14.1)$$

e l'energia globalmente immagazzinata nel "parallelo" costituito dai due organi elastici, vedi la (4.8), vale:

$$W = \frac{1}{2} k_1 s^2 + \frac{1}{\alpha + 1} k_\alpha |s^{\alpha+1}| \quad (14.2)$$

È chiaro che "giocando" opportunamente su  $\alpha$  e  $k_\alpha$  può modificarsi l'energia immagazzinata e, quindi, influire in ogni caso specifico sul destino strutturale.

Soffermandoci più attentamente su tale influenza, ricordiamo che, in campo elastico lineare, la intera  $W$  è suddivisa in modo discontinuo:

$$W = W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(4)} + \dots \quad (14.3)$$

fra i termini di vario ordine nelle lagrangiane; essi trovano la loro origine nella prima parte della (14.2). La seconda quota di tale energia, e consideriamo anche esclusivamente quella corrispondente alla parte del primo ordine,  $s^{(1)}$ , dell'intera  $s$ , sarà di ordine  $\alpha + 1$ . Vigendo per  $\alpha$  l'unica limitazione che sia  $\alpha > 1$ , tale quota energetica, che chiameremo  $W^{(\alpha)}$ , potrà situarsi dovunque, e col segno attribuito a  $k_\alpha$ , dopo  $W^{(2)}$ .

Per  $\alpha \in ] 1, 2 [$  essa si situerà, ad esempio, come segue:

$$W = W^{(2)} + W^{(\alpha)} + W^{(3)} + W^{(4)} + \dots \quad (14.4)$$

mentre per  $\alpha \in ] 2, 3 [$  sarebbe:

$$W = W^{(2)} + W^{(3)} + W^{(\alpha)} + W^{(4)} + \dots \quad (14.5)$$

e risulta ovviamente inutile proseguire nelle esemplificazioni.

Consegue da ciò che appena si abbandona la teoria del primo ordine, per cui è  $W \equiv W^{(2)}$ , la elasticità non lineare, ed era ben logico, faccia sentire pesantemente la sua voce nel problema.

Ciò accade sul ramo naturale, nel caso della (14.4), dove il ruolo guida, prima appartenente alla  $W^{(3)}$ , viene ora assunto da  $W^{(\alpha)}$  che lo precede.

Ciò accade ancora sui rami secondari dove, stante la nullità di  $W^{(3)}$ ,  $W^{(\alpha)}$  diventa termine guida sia nel caso che sussista la (14.4) che non la (14.5) ovvero per  $\alpha \in ] 1, 3 [$ .

Nel chiudere l'attuale discorso osserveremo che i comportamenti reali sembrano tutti indirizzati nel verso di far considerare, nelle (14.1) e (14.2), valori di  $k_\alpha$  negativi; in altri termini appare ben improbabile che possa doversi considerare un materiale in cui la tensione cresca più rapidamente della deformazione corrispondente. Al momento comunque, ed in veste di pura ipotesi, ciò non verrà escluso.

### 14.3. Influenza sul ramo principale

La presenza del nuovo termine introdotto nella  $W$  ha diretta ripercussione sulla E.P.T., e quindi sulle equazioni di equilibrio. Ponendosi nel campo di validità della (14.4), dalla generica di tali equazioni si trarrà per  $F$ , invece che la (8.9):

$$F = \frac{W_i^{(2)} + W_i^{(\alpha)} + W_i^{(3)} + W_i^{(4)} + \dots}{f_i^{(1)} + f_i^{(2)} + \dots} \quad (14.6)$$

Nulla muterà sostanzialmente nel comportamento strutturale salvo il fatto che, a seconda del segno di  $k_\alpha$ , lo scostamento dalla teoria del 1° ordine sarà influenzato proprio da tale segno. Per  $k_\alpha > 0$  si avrà un comportamento più rigido, per  $k_\alpha < 0$  una curva caratteristica  $F-f$  più schiacciata; nel secondo caso se si era già ( $k_\alpha = 0$ ) in equilibrio di 2ª specie, il carico limite risulterà diminuito.

Trattandosi in ogni caso solo di una variazione quantitativa, e non qualitativa, non ci soffermeremo oltre sull'argomento.

#### 14.3.1. Esempio

Si riprende lo studio dell'arco ribassato dell'esempio 8.4.5. Il comportamento lineare viene corretto aggiungendo all'energia elastica la quota, vedi la (14.2),:

$$W^{(\alpha)} = 2 \frac{E_\alpha}{\alpha + 1} \frac{A h^2}{l^3} v^{\alpha + 1} \quad \alpha \in ] 1, 2 [ \quad (14.a)$$

dove il moltiplicatore due si deve alla presenza di due aste e, come detto in (14.2), si sono trascurate, nell'esprimere  $W^{(\alpha)}$ , le deformazioni di ordine superiore al primo ( $s \equiv s^{(1)} = \nu h/l^2$ ).

Introdotta tale termine nella E.P.T., ed espresso l'equilibrio, la (8.d) diventa:

$$F = \frac{EAh^3}{\bar{F}} (2 \bar{v} + 2 \gamma \bar{v}^\alpha - 3 \bar{v}^2 + \bar{v}^3) \quad (14.b)$$

in cui si è introdotto il rapporto:

$$\gamma = \frac{E\alpha}{E} \quad (14.c)$$

Posto  $\alpha = 1,5$  e  $\gamma = \pm 0,1$  si sono ottenuti i seguenti valori dello spostamento adimensionalizzato corrispondente a  $F_{MAX} = F_{lim}$ , e di  $F_{lim}$ . Tra essi si è inserito il risultato già ottenuto in 8.4.5:

$\gamma$	$\bar{v}$	$\bar{F}_{lim}$
+0,1	0,485	0,446
0,0	0,426	0,385
-0,1	0,374	0,335

ed il tutto è conforme alla teoria che precede.

#### 14.4. Influenza sui rami secondari

Indubbiamente gli effetti più rilevanti di una elasticità non lineare si manifestano nelle modificazioni che si riscontrano nei rami secondari e ciò può essere, *A PRIORI*, chiaramente giustificato.

Le equazioni dello stato critico coinvolgono la parte di secondo ordine della E.P.T.,  $T^{(2)}$ , ed essa, a stato critico identificato (primo autovalore  $\bar{F}_1 = F_{crit}$  e corrispondente autovettore  $q_1$  noti) si annulla identicamente lungo il canale critico:  $T_c^{(2)} = 0^{(*)}$ .

Stante la congenita nullità di  $T^{(3)}$  la espressione della E.P.T., da cui si deriva il ramo secondario, si presenta allora nella forma:

$$T = \dots + T^{(4)} + \dots \quad (14.7)$$

I puntini che precedono il primo termine non nullo indicano una stazionarietà "forte" di  $T$  e corrispondono, in via fisica, alla consolidata idea di *INDIFFERENZA* dell'equilibrio allo stato critico.

Il post-critico, e quindi la qualità dell'equilibrio, è affidato a  $T^{(4)}$  e di ciò si è ampiamente discusso in 10.4.

---

(\*) Si nota come il pedice  $c$  ricorda che l'espressione (in questo caso particolare  $T^{(2)}$ ) va calcolata per  $F = F_{crit}$ .

Quanto precede, ovviamente, in elasticità lineare perfetta. Ora, e siamo in elasticità non lineare, può inserirsi, tra il segno di eguale e  $T^{(4)}$ , il termine  $W^{(\alpha)}$ . Sarà:

$$T = W^{(\alpha)} + T^{(4)} + \dots \quad (14.8)$$

e nelle vicinanze dello stato critico, che diremo *NEAR FIELD* utilizzando una dizione anglo-sassone o, all'italiana, *NEL VICINO*, comanderà  $W^{(\alpha)}$ :

$$W^{(\alpha)} > 0 \quad \Rightarrow \quad k_{\alpha} > 0 \quad \text{STABILITÀ}$$

$$W^{(\alpha)} < 0 \quad \Rightarrow \quad k_{\alpha} < 0 \quad \text{INSTABILITÀ}$$

Al crescere della deformazione, ovvero delle lagrangiane, diverrà prevalente  $T^{(4)}$  cosicché, e saremo nel *FAR FIELD*, ossia *NEL LONTANO*, ritroveremo la nostra versione dei fatti:

$$T^{(4)} > 0 \quad \text{STABILITÀ}$$

$$T^{(4)} < 0 \quad \text{INSTABILITÀ}$$

Si conclude l'attuale discussione con la precisazione, in senso storico, che le dizioni *NEAR FIELD* e *FAR FIELD*, seppure già usate da altri Autori, hanno qui trovato una precisa quantificazione: campo degli infinitesimi inferiori al quarto, campo degli infinitesimi a partire dal quarto.

#### 14.4.1. Esempio

Si riconsidera ancora una volta lo schema a mensola di figura 9.3 con  $EA = \infty$ . Al suo organo elastico, in  $B$ , viene però questa volta attribuita una elasticità non lineare cosicché la E.T.P. assume la forma, considerata questa volta in via esatta,:

$$\begin{aligned} T &= W - Fl (1 - \cos\varphi) = \\ &= \frac{1}{2} k \varphi^2 + \frac{1}{\alpha + 1} k_{\alpha} \left| \varphi^{\alpha+1} \right| - Fl (1 - \cos\varphi) \end{aligned} \quad (14.d)$$

Si ha successivamente:

$$T_{\varphi} = k\varphi + k_{\alpha} \varphi^{\alpha} - Fl \operatorname{sen}\varphi = 0$$

e posto:

$$\gamma = \frac{k_{\alpha}}{k} \quad \alpha = \frac{3}{2}$$

si ottiene:

$$F = \frac{k}{l} \frac{\varphi + \gamma \varphi^{\frac{3}{2}}}{\text{sen } \varphi} \quad (14.e)$$

La (14.e) descrive, ovviamente, il ramo secondario con inizio da:

$$F = F_{\text{crit}} = \frac{k}{l}$$

che però assume le insolite forme che si leggono in fig. 14.1.

Per  $\gamma > 0$  è confermata la piena stabilità del ramo secondario, così come assicurato dalla positività di  $T^{(4)}$  che si desume sviluppando in serie l'ultimo termine della (14.d), qui trattato in via esatta.

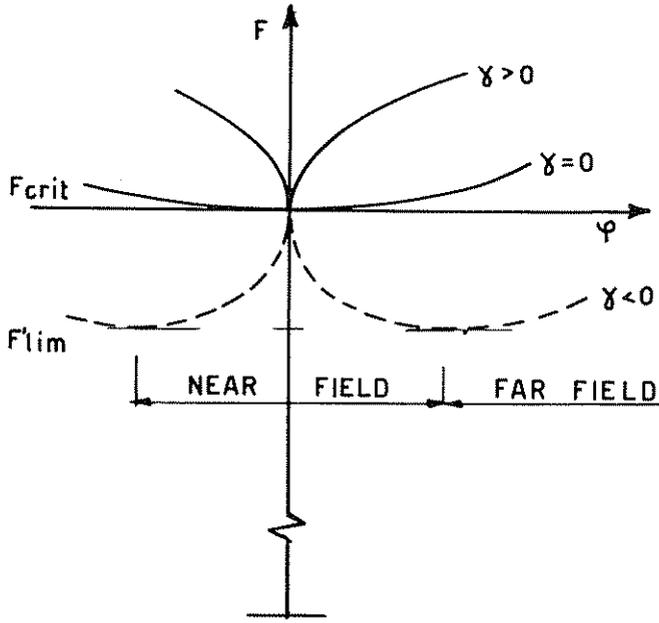


Fig. 14.1.

Ancora più interessante è la rappresentazione per  $\gamma < 0$ . Pur trattandosi di un caso intrinsecamente stabile si osserva, nel vicino, una incertezza di comportamento ancora più spinta della, una volta, temuta indifferenza. Il carico sopportabile diminuisce dopo la biforcazione fino ad un valore, qui indicato con  $F_{\text{lim}}$ , che ha proprio il significato di un carico limite invertito (minimo e non massimo su un

ramo di equilibrio). Segue la ripresa strutturale: prevalenza di  $T^{(4)}$  e termini successivi.

Ultima osservazione: il passaggio dal pre-critico al post-critico è per tangente, piena continuità di comportamento, in salita ed in discesa; risulta infatti:  $|F_\varphi|_o = \infty$ .

#### 14.4.2. Esercizio proposto

L'esempio 10.4.1 è relativo a un caso in cui l'equilibrio post-critico è instabile. Mostrare che in campo elastico non lineare si hanno gli andamenti indicati in fig. 14.2.

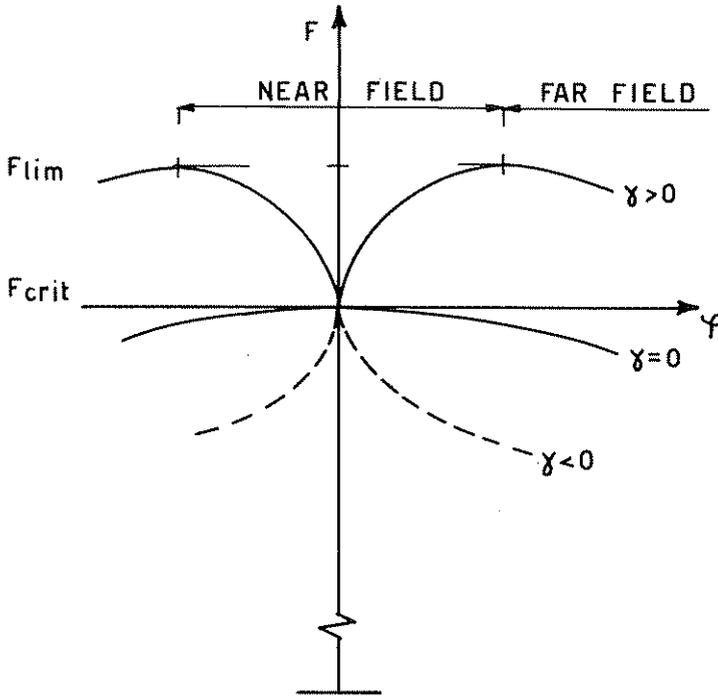


Fig. 14.2.

Dimostrare in particolare che i rami secondari sono tangenti all'asse verticale.

Ad esempi sviluppati l'inserimento di  $W^{(a)}$  nella (14.8) assume piena evidenza. Tenuto conto che nella realtà assumono importanza i casi di  $k_\alpha$  (o  $\gamma$ ) negativi si osserva che:

— La **STABILITÀ POST-CRITICA** implica una fase iniziale in cui l'equilibrio è instabile. Una esitazione nel comportamento strutturale che fa sì che l'equilibrio si stabilisca *nel lontano*: ciò è ben conosciuto ad accor-

ti sperimentatori ed aggravato, non causato, dalle imperfezioni  $\Delta$  certamente esistenti nella prova più accurata: fig. 14.3.a.

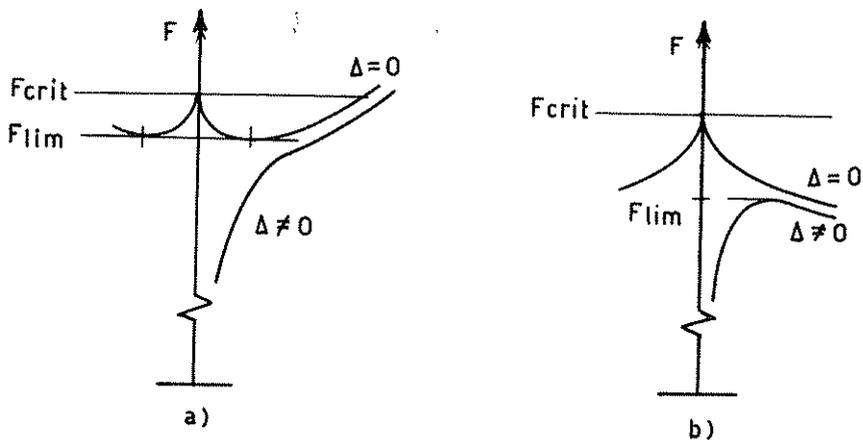


Fig. 14.3.

— La *INSTABILITÀ POST-CRITICA* si sviluppa con un andamento particolarmente insidioso. In presenza di imperfezioni  $\Delta$  il ramo naturale imperfetto esibirà un  $F_{lim}$  che potrà risultare molto discosto da  $F_{crit}^{(*)}$ .

#### 14.5. Breve discorso sulla asimmetria

Nel concludere il presente lavoro verità storica vuole che si consideri un secondo caso di instabilità asimmetrica, questo in elasticità non lineare. Esso è stato supportato da molti Autori e sull'argomento:

- è stato anticipato un drastico giudizio nel paragrafo 10.6;
- sono state poste le basi di tale giudizio in 3.3 e 4.6.

Il tutto nasce dall'uso di una espressione della energia elastica  $W$  in cui si è inserito un organo elastico non lineare, che segue la legge:

$$S = k_1 s + k_2 s^2$$

senza sottoporlo preventivamente ad alcuna prova. Nessuna considerazione è stata svolta sul "parallelo" di organi elastici così rappresentato e non ci si è accorti di quanto evidenziato in 4.6.1. All'inserire nella (14.4) il termine  $W^{(a)}$  si è in realtà situato sulla struttura uno strano ordigno. Visto

(\*) La situazione ricorda, ma è ancora più grave, il degrado del carico limite in un caso (?) di instabilità asimmetrica.

da un lato sembra anche lui un organo elastico (assorbi-energia), visto dall'altro può essere interpretato come un motore (o un aspiratutto): energeticamente è rappresentato da:

$$\frac{1}{3} k_2 s^3 \approx \frac{1}{3} k_2 s^{(1)3}$$

e per  $s^{(1)} > 0$  si ha il primo comportamento; per  $s^{(1)} < 0$  il funzionamento come generatore in cui si somministra lavoro motore.

A questo punto approntiamo l'attrezzatura ideale per registrare la curva caratteristica  $F-f$  della struttura ed iniziamo la prova. Il carico cresce: arrivati ad  $F_{crit}$  come proseguirà il diagramma?

Avviciniamoci alla struttura, che sta accadendo? L'organo elastico  $k_1$  combatte una eroica battaglia: saltella tutt'intorno alla struttura e bilancia  $F_{crit}$  (e in questo bilancio  $T^{(2)}$  si annulla). Sia  $F_{crit}$  che  $k_1$  sperano in rinforzi, sembrano Napoleone e Wellington a Waterloo: arriverà  $+T^{(4)}$  o arriverà  $-T^{(4)}$ ? Non si saprà mai! Arriva prima:

$$W^{(\alpha)} = \frac{1}{3} k_2 s^{(1)3}$$

Nel fervore della battaglia  $s^{(1)}$  oscilla intorno allo zero, un pò positivo: tutto bene! Un pò negativo: catastrofe. La  $W^{(\alpha)}$  innesca un processo a catena, è cubica; il motore parte, (o l'aspiratutto va in funzione) e la struttura scompare, portata via.