ISTITUTO UNIVERSITARIO STATALE DI ARCHITETTURA - REGGIO CALABRIA

NICOLA AUGENTI

APPUNTI

DI

STATICA



ISTITUTO DI TECNOLOGIA Q U A D E R N O N. 10

ISTITUTO UNIVERSITARIO STATALE DI ARCHITETTURA - REGGIO CALABRIA

NICOLA AUGENTI

APPUNTI

 \mathbf{DI}

STATICA



ISTITUTO DI TECNOLOGIA

Le pagine che seguono raccolgono gli appunti da me presi nelle ore dedicate alla preparazione delle lezioni di STATICA che ho tenute negli Anni Accademici 1976-77 e 1977-78 presso l'Istituto Universitario Statale di Architettura di Reggio Calabria. Volutamente essenziali, li consegno agli allievi con l'avvertimento che essi costituiscono soltanto una guida ragionata per uno studio organico della materia, e dunque in nessun modo possono sostituire o surrogare le lezioni ed i libri di testo che sempre rimangono i soli e certi strumenti per l'apprendimento e l'approfondimento della disciplina.

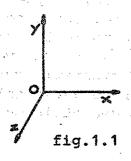
Nicola Augenti

Reggio Calabria, maggio 1978.

I - RICHIAMI DI CALCOLO VETTORIALE

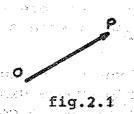
I.1) - DEFINIZIONI

RIFERIMENTI: una terna di assi x,y,z di riferimen to con origine nel punto O si definisce: ontogonale se gli assi formano fra loro tutti ango li retti; cantesiana se gli assi sono rettilinei; levogina se un osservatore orientato nella direzio



ne e nel verso di z vede l'asse x ruotare in senso antiorario per sovrapporsi ad y,ovvero, con una immediata regola pratica, se gli assi x,y,z sono diretti rispettivamente come pollice, indice e medio del la mano destra(vedi fig.1.1).

SEGMENTI ORIENTATI



: sono i segmenti sui quali sia fissato un verso; il segmento orientato rappresentato in fig.2.1 avente come origine o primo estremo il punto O e come estremo libero o secondo estremo il punto P si indica con la notazione (P-O). Un seg

mento orientato é caratterizzato da quattro elementi: origine, lunghezza, direzione, verso.

SEGMENTI ORIENTATI EQUIPOLLENTI: sono tutti i seg menti orientati aventi la stessa lunghezza, direzione e verso.

GRANDEZZE SCALARI: sono le grandezze caratterizza bili con loro misura in una certa scala (ad es.:la temperatura); gli enti atti a rappresentarle, i nu meri reali, si dicono scalari.

GRANDEZZE VETTORIALI: sono le grandezze caratterizzabili con una lunghezza, una direzione ed un verso (ad es.:forze, spostamenti); gli enti atti a rappresentarle si dicono vettori. VETTORI LIBERI: sono enti costituiti da un numero reale detto lunghezza o modulo, da una direzione e da un verso; i vettori liberi si indicheranno nel seguito con lettere sottosegnate, i loro moduli con le sole lettere non sottosegnate.

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI VETTORI: istituen do una corrispondenza fra vettori liberi e segmenti orientati equipollenti dello spazio, si può rap presentare geometricamente un vettore libero con la classe di segmenti orientati equipollenti aventi la lunghezza, la direzione ed il verso del vettore. Se (P-0) è uno dei segmenti orientati equipollenti avente lunghezza, direzione e verso del vettore libero \underline{u} , esso rappresenta geometricamente \underline{u} e si scrive : \underline{u} = (P-0): \underline{u} il suo modulo vale : \underline{u} = PO

VETTORE APPLICATO: é l'insieme di un vettore libe ro \underline{u} e del suo punto di applicazione P; esso si in dica con la notazione (P, \underline{u}).

VETTORE UNITARIO O VERSORE: é un vettore di lunghezza unitaria; il vettore unitario avente direzione e verso del vettore libero \underline{u} si indica con vers \underline{u} e si dice versore di \underline{u} ; per definizione ri sulta allora: vers $\underline{u} = \underline{u}/u$.

VETTORE NULLO: é un vettore di lunghezza nulla e si indica con 0.

uguaglianza FRA VETTORI LIBERI: due vettori liberi si dicono uguali se hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione, lo stesso verso.

COMPONENTE DI UN VETTORE \underline{u} SECONDO UNA RETTA ORIENTATA n: si indica con u_n ed \underline{e} lo scalare prodotto

of fig.3.1

fra il modulo u del vettore u

ed il coseno dell'angolo a for

mato dalla direzione orientata

di u con la direzione della

fig.3.1 retta h: u = u cosa. Geometri

camente é rappresentato dal segmento O'P' della retta n i cui estremi O' e P' si ottengono proiet tando ortogonalmente su n gli estremi O e P del segmento rappresentativo di n . Risulta ovviamente n = O'P' (vedi fig.3.1).

I.2) - OPERAZIONI FRA VETTORI LIBERI

SOMMA DI VETTORI : é l'operazione che associa agli n vettori liberi $\underline{u}_1 = (1-0)$, $\underline{u}_2 = (2-1)$,... $\underline{u}_n = (n-(n-1))$ il vettore somma $\underline{R} = (n-0)$ detto risultante il cui segmento orientato rappresentativo (n-0) é il lato di chiusura della poligonale di origine O ed ultimo estremo n, che si ottiene riportando successi-

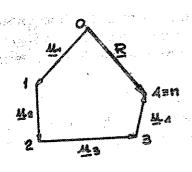


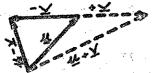
fig.4.1

vamente, a partire da un punto O, i segmenti orientati rappre sentativi dei vettori componen $ti \, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n$ e che prende nome di poligono dei vettori

$$\frac{R}{u} = \frac{u_1}{u_1} + \frac{u_2}{u_2} + \cdots + \frac{u_n}{u_n}$$
Proprietà:
$$\frac{u+v}{(u+v)+w} = \frac{u+u}{u+(v+w)}$$

$$\frac{u+0}{u+(-u)} = \frac{u}{u}$$

DIFFERENZA DI VETTORI: é l'operazione che associa ai due vettori <u>u</u> e <u>v</u> il vetto re somma di u e dell'opposto



di $\frac{v}{u}$ (v.fig.5.1): u - v = u + (-v)

fig.5.1

PRODOTTO DI UN VETTORE <u>u</u> PER UNO SCALARE c : é la operazione che associa al vettore <u>u</u> ed allo scalare c il vettore di modulo c·u , direzione uguale a quella di <u>u</u>, verso uguale od opposto a quello di <u>u</u> a seconda che sia c>0 oppure c<0. Tale operazione consente di esprimere sempre un vettore <u>u</u> come

prodotto della sua intensità u per il suo versore :

$$\underline{u} = u \cdot \text{vers } \underline{u}$$

Proprietà: $c(h \cdot \underline{u}) = c h \underline{u}$ $(c+h) \underline{u} = c \underline{u} + h \underline{u}$ $(\underline{u}+\underline{v}) c = c \underline{u} + c \underline{v}$

PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI \underline{u} e \underline{v} : si indica con $\underline{u}\underline{x}\underline{v}$ ed é l'operazione che associa ai due vettori \underline{u} e \underline{v} lo scalare prodotto dei moduli dei vettori e del coseno dell'angolo α che le direzioni orientate dei due vettori formano tra loro, ovvero il prodotto del modulo di uno dei due vettori per la componente dell'altro sulla sua retta di applicazione

$$\frac{d}{d} = u \cdot v \cdot \cos \alpha = u_v \cdot v = v_u \cdot u_v \cdot \alpha$$

Tale operazione consente di esprimere la componente del vettore \underline{u} sulla retta orientata r come prodotto scalare di \underline{u} per il versore \underline{e} avente direzione e verso di r:

$$u_r = \underline{u} \cdot \underline{e}$$

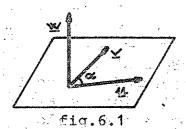
Il prodotto scalare di due vettori è nullo se uno dei vettori ha modulo nullo o se i due vettori sono ortogonali.

Proprietà :
$$\underline{u} \times \underline{v} = \underline{v} \times \underline{u}$$

 $\underline{c} \, \underline{u} \times \underline{v} = \underline{u} \times \underline{c} \, \underline{v}$
 $\underline{u} \times (v+w) = \underline{u} \times v + u \times w$

Per indicare il prodotto scalare di due vettori o<u>l</u> tre alla notazione $\underline{u} \times \underline{v}$ si adotta spesso la notazione $u \cdot v$

zione <u>u·v</u> PRODOTTO VETTORIALE DI DUE VETTORI u e v : si indi



ca con $\underline{u} \wedge \underline{v}$ ed é l'operazione che associa ai vettori \underline{u} e \underline{v} il vettore prodotto \underline{w} il cui modulo é dato da $u \cdot v \cdot \text{senc}$ (prodotto dei moduli dei vettori per il seno dell'angolo formato dalle direzioni orientate dei vetto-

TOWN THE WAY TO SEE THE SERVER BOTH

ri stessi), la cui direzione é ortogonale ai vetto ri \underline{u} e \underline{v} , il cui verso é tale che la terna $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ risulti levogira (v.fig.6.1).

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = \underline{w}$$

Il prodotto vettoriale risulta nullo se uno dei due vettori ha modulo nullo oppure se i due vettori so no paralleli.

Proprietà $\underline{u}\underline{\Lambda}\underline{v} = -\underline{v}\underline{\Lambda}\underline{u}$ $\underline{c}\underline{u}\underline{\Lambda}\underline{v} = \underline{c}(\underline{u}\underline{\Lambda}\underline{v})$ $\underline{u}\underline{\Lambda}(\underline{v}+\underline{w}) = \underline{u}\underline{\Lambda}\underline{v}+\underline{u}\underline{\Lambda}\underline{w}$

PRODOTTO MISTO DI TRE VETTORI \underline{u} , \underline{v} , \underline{t} : si indica con $\underline{u}\underline{\wedge}\underline{v}$ x \underline{t} ed é l'operazione che associa ai vetto ri \underline{u} , \underline{v} , \underline{t} lo scalare che si ottiene moltiplicando scalarmente per \underline{t} il vettore prodotto di $\underline{u}\underline{\wedge}\underline{v}$. Tale scalare rappresenta anche il volume del paralle lepipedo avente per lati i segmenti rappresentativi dei tre vettori. Il prodotto misto si annulla se é nullo il modulo di uni dei vettori, se due di essi sono paralleli o se i vettori sono complanari.

EQUAZIONI VETTORIALI : dati i vettori u, v, ú determinare gli scalari x, y, z in modo che sia :

$$\underline{u}x + \underline{v}y + \underline{\omega}z = \underline{d}$$

Una equazione di questo tipo si dice vettoriale con incognite scalari e, geometricamente, corrisponde al problema della scomposizione del vettore \underline{d} nella somma dei tre vettori $\underline{u} \times ,\underline{v} y,\underline{w} z$. L'incognita x si ottiene moltiplicando, ambo i membri dell'equazione, prima vettorialmente per \underline{v} e poi scalarmente per \underline{w} :

 $\underline{u} \times \Lambda \underline{v} \times \underline{w} + \underline{v} \underline{y} \Lambda \underline{v} \times \underline{w} + \underline{w} \underline{z} \Lambda \underline{v} \times \underline{w} = \underline{d} \Lambda \underline{v} \times \underline{w}.$

da cui risulta :

$$x = \frac{d\Lambda v x w}{u \Lambda v x w} = \frac{d x v \Lambda w}{u x v \Lambda w}$$

Analogamente si ottengono i valori delle altre in

cognite
$$u \times d \wedge w$$
 $z = \frac{u \times d \wedge w}{u \wedge v \times w}$; $z = \frac{u \times v \wedge d}{u \times v \wedge w}$

1.3) - RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEI VETTORI

Si consideri una terna levogira di riferimento x,y, z di assi cartesiani ortogonali aventi origine 0 e siano $\underline{\ell},\underline{j},\underline{k}$ ordinatamente i versori degli assi. Dato il vettore \underline{v} di origine 0 e detti α,β,γ i co seni direttori della sua direzione orientata, le componenti di \underline{v} secondo gli assi x,y,z sono gli scalari:

 $v = v \cdot \alpha = v \times i$; $v = v \cdot \beta = v \times j$; $v = v \cdot \gamma = v \times k$ Elevando al quadrato e sommando si ha:

e sostituendo tale valore nelle prime tre relazioni risulta:

$$\alpha = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}}} \beta = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}}} \gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}}} \gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}} \gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \gamma$$

Le v, v, v si dicono componenti cartesiane del vettore v e si scrive v = (v, v, v, v; noti dunque i tre scalari v, v, v rimane univocamente definito il vettore v in modulo tramite l'espressione di v, in direzione e verso tramite le espressioni di α , β , γ . Ciò consente peraltro di affermare che ogni vettore si può caratterizzare compiutamente tramite una terna di scalari e dunque esiste una corrispondenza biunivoca fra vettori e terne di numeri reali che ne costituiscono le componenti.

Dato il vettore generico \underline{v} = (P-O) esso può essere

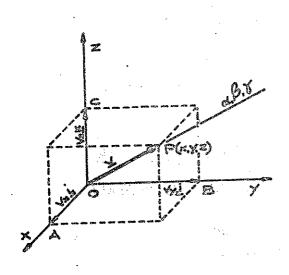


fig.7.1

scomposto secondo gli assi x,y,z nel la somma dei tre vettori (A-O), (B-O) (C-O) per cui risulta (v.fig.7.1): (P-O) = (A-O) + (B-O) +(C-O)

ed essendo:

$$(P-O) = \underline{v}$$

$$(A-O) = v_{\underline{v}} \underline{i}$$

$$(B-O) = v_{y} \underline{j}$$

$$(C-O) = v_{\frac{k}{2}}$$

si può scrivere :

$$\underline{v} = v_{x} \underline{i} + v_{y} \underline{i} + v_{z} \underline{k}$$

che prende nome di espressione cartesiana del vet tore <u>v</u> o espressione del vettore <u>v</u> in componenti cartesiane.

Dette x,y,z, le coordinate del punto P, essendo:

$$\overline{AO} = x$$
 , $\overline{BO} = y$, $\overline{CO} = z$ si può scrivere :

$$\mathbf{p} - \mathbf{0} = \mathbf{x} \, \underline{i} + \mathbf{y} \, \underline{j} + \mathbf{z} \, \underline{k}$$

ovvero:

$$P = 0 + x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}$$

che prende nome di espressione cartesiana del punto P; il punto P di coordinate x,y,z rappresenta cioé l'estremo libero del vettore di origine O e componenti cartesiane x,y,Z.

I.4) - OPERAZIONI SUI VETTORI IN COMPONENTI CARTE-SIANE

Dati i vettori $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ in componenti cartesiane :

$$\underline{u} = u_{x} \underline{i} + u_{y} \underline{i} + u_{z} \underline{k}$$

$$\frac{\mathbf{w}}{\mathbf{w}} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \\
\mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{k}$$

SOMMA DI VETTORT

3.4

$$\underline{u} + \underline{v} = (u_x + v_x) \underline{i} + (u_y + v_y) \underline{i} + (u_z + v_z) \underline{k}$$

DIFFERENZA DI VETTORI

$$\underline{u} - \underline{v} = (u_{\mathbf{x}} - v_{\mathbf{x}}) \underline{i} + (u_{\mathbf{y}} - v_{\mathbf{y}}) \underline{i} + (u_{\mathbf{z}} - v_{\mathbf{z}}) \underline{k}$$

PRODOTTO DI UN VETTORE U PER UNO SCALARE C

$$c\underline{u} = c\underline{u}_{\underline{x}} + c\underline{u}_{\underline{y}} + c\underline{u}_{\underline{z}} + c\underline{u}_{\underline{z}}$$
PRODOTTO SCALARE DI VETTORI

$$\underline{u} \times \underline{v} = u_{\mathbf{x}} \times x + u_{\mathbf{y}} \times y + u_{\mathbf{z}} \times z$$

PRODOTTO VETTORIALE DI VETTORI

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_{x} & u_{y} & u_{z} \\ v_{x} & v_{y} & v_{z} \end{vmatrix}$$

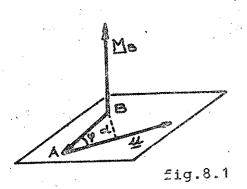
é il vettore dato dalla soluzione secondo la prima riga del determinante simbolico avente ordinatamen te per elementi i versori degli assi e le componen ti dei vettori.

PRODOTTO MISTO DI VETTORI

$$\underline{u} \wedge \underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} u & u & u \\ x & y & z \\ v & v & y \\ w & w & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

I.5) - VETTORI APPLICATI

MOMENTO di un vettore applicato (A,\underline{u}) rispetto al



avente modulo $AB \cdot u \cdot sen \phi$, direzione normale a quel la dei vettori (A-B) ed u, verso tale che i vettori (A-B), u, M costituiscano una terna levogira; il segmento orientato rappresentativo di

Menter de la viene contrassegnato con la doppia freccia. Si osservi che:

- il modulo del vettore momento é anche dato dal prodotto del modulo del vettore \underline{u} per la distanza d della sua retta di applicazione dal polo B;

- il momento non cambia se \underline{u} si sposta lungo la sua retta di applicazione;

- il momento di un vettore applicato é nullo se il vettore é nullo o se il polo appartiene alla sua retta di applicazione.

Dette u_x, u_y, u_z le componenti cartesiane di \underline{u} ed (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B) le coordinate dei punti A e B, l'espressione cartesiana del momento polare é data dalla soluzione del determinante simbolico :

$$\underline{M}_{B} = \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{i} & \underline{k} \\ (x_{A} - x_{B}) & (y_{A} - y_{B}) & (z_{A} - z_{B}) \\ u_{x} & u_{y} & u_{z} \end{bmatrix}$$

MOMENTO ASSIALE di un vettore applicato (A,\underline{u}) rispetto alla retta orientata r di versore \underline{e} \in lo scalare, componente secondo la retta r, del momento di tale vettore rispetto ad un qualunque punto O di essa :

$$M_r = (A-0) \Lambda \underline{u} \times \underline{e}$$

Si osservi che: M_{r} si annulla quando $\underline{u}=0$ oppure il vettore (A,\underline{u}) e la retta r sono complanari; M_{r} é anche uguale al prodotto del modulo di \underline{u} per la minima distanza di esso dalla retta r.

MOMENTO RISULTANTE di un sistema di vettori applicati (A, u,) rispetto al polo P é il risultante dei vettori momento M dei singoli vettori rispetto al polo P

 $\underline{M}_{P} = \sum_{i} (A_{i} - P) \wedge \underline{u}_{i}$

Se i vettori hanno tutti lo stesso punto di applicazione A, il momento risultante rispetto al polo P é dato dal momento rispetto a P del risultante \underline{R} dei vettori \underline{u}_i applicato in A (teorema di Varignon)

$$\underline{M}_{P} = \sum_{i} (A-P) \underline{\Lambda} \underline{u}_{i} = (A-P) \underline{\Lambda} \sum_{i} \underline{u}_{i} = (A-P) \underline{\Lambda} \underline{R}$$

Dato un sistema di vettori applicati (A_i, \underline{u}_i) e due poli P e Q il momento risultante rispetto al polo P é uguale alla somma del momento risultante rispetto al polo Q e del momento rispetto al polo P del risultante \underline{R} del sistema di vettori applicato in Q (teorema dello spostamento del polo). Infatti:

$$\underline{M}_{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{i}} (\mathbf{A}_{\mathbf{i}} - \mathbf{P}) \wedge \underline{u}_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{i}} (\mathbf{A}_{\mathbf{i}} - \mathbf{Q} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}) \wedge \underline{u}_{\mathbf{i}} = \\
= \sum_{\mathbf{i}} (\mathbf{A}_{\mathbf{i}} - \mathbf{Q}) \wedge \underline{u}_{\mathbf{i}} + (\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \wedge \sum_{\mathbf{i}} \underline{u}_{\mathbf{i}}$$

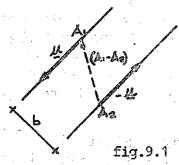
e dunque:

$$\underline{M}_{\mathbf{P}} = \underline{M}_{\mathbf{Q}} + (\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \Lambda \underline{R}$$

Si osservi che il momento risultante di un sistema di vettori applicati è indipendente dal polo se e solo se il risultante R=0 oppure se P varia su di una retta parallela ad R.

COPPIA: é un sistema di due vettori applicati (A_1, \underline{u}) e (A_2, \underline{u}) aventi uguale intensità, direzioni pa-

rallele e verso opposto. Il momento risultante di tale sistema :



$$\underline{M} = (A_1 - A_2) \wedge \underline{u}$$

é indipendente dal polo essen do R = 0 ; il modulo del vetto re momento é dato anche dal prodotto u·b del modulo dei due vettori per la distanza b fra le rette di applicazione dei vettori, detta braccio della

coppia; il momento risultante di una coppia è nul lo se i vettori hanno modulo nullo o se è nulla la loro distanza e cioè hanno la stessa retta di applicazione (v.fig.9.1).

INVARIANTE SCALARE di un sistema di vettori applicati è il prodotto scalare del risultante <u>R</u> e del momento risultante <u>M</u> rispetto ad un qualunque polo. Moltiplicando scalarmente per <u>R</u> l'espressione del teorema dello spostamento del polo si ha:

$$\underline{\underline{M}}_{P} \times \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{M}}_{Q} \times \underline{\underline{R}} + (Q-P) \underline{\underline{N}}_{R} \times \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{M}}_{Q} \times \underline{\underline{R}}$$

e cioé comunque si scelga il polo, il prodotto fra risultante \underline{R} e momento risultante \underline{M} del sistema di vettori applicati, non varia.

In forma cartesiana :

$$\underline{R} \times \underline{M} = R_{\mathbf{X}} + R_{\mathbf{Y}} + R_{\mathbf{Z}} + R_{\mathbf{Z}}$$

ASSE CENTRALE di un sistema di vettori applicati \underline{a} vente risultante non nullo é il luogo dei punti $r\underline{i}$ spetto ai quali il momento risultante é parallelo ad \underline{R} oppure nullo.

SISTEMI PIANI DI VETTORI sono quelli i cui vettori appartengono tutti ad uno stesso piano; tali siste mi hanno invariante scalare nullo essendo \underline{R} ed $\underline{\underline{M}}$ sempre ortogonali.

SISTEMI DI VETTORI PARALLELI sono quelli i cui vet tori sono fra loro paralleli; tali sistemi hanno anch'essi invariante scalare nullo essendo \underline{R} ed $\underline{\underline{M}}$ sempre ortogonali.

SISTEMI PIANI DI VETTORI PARALLELI sono quelli costituiti da vettori paralleli e giacenti su di uno
stesso piano; dato un sistema piano di vettori applicati paralleli (P, ,u,) al ruotare dei vettori
attorno ai loro punti di applicazione P, l'asse
centrale ruota attorno ad un punto C detto cen
tro del sistema.

EQUIVALENZA FRA SISTEMI DI VETTORI APPLICATI
Dati due sistemi di vettori applicati aventi rispet
tivamente risultanti R₁ ed R₂ e momenti risultanti
M_{1P} ed M_{2P} rispetto ad un polo P, tali sistemi si
dicono equivalenti se vale una delle proprietà sequenti:

- qualunque sia P risulta:

$$\frac{R_1}{1} = \frac{R_2}{2}$$
; $\frac{M}{1P} = \frac{M}{2P}$ oppure

- se esiste un polo Q tale che:

$$\frac{R_1}{R_1} = \frac{R_2}{R_2}$$
; $\frac{M_{1Q}}{M_{1Q}} = \frac{M_{2Q}}{M_{2Q}}$ oppure

- se esistono tre punti non allineati A,B,C tali che:

$$\frac{M_{1A}}{M_{1A}} = \frac{M_{2A}}{M_{2B}}; \quad \frac{M_{1B}}{M_{2B}} = \frac{M_{2B}}{M_{2B}}; \quad \frac{M_{1C}}{M_{1C}} = \frac{M_{2C}}{M_{2C}}$$

In particolare un sistema di vettori applicati aventi risultante \underline{R} e momento risultante \underline{M} é equivalente a zeno se vale una delle proprietà seguenti :

- qualunque sia P risulta:

$$\frac{R}{R} = -\underline{0}$$
; $\underline{M}_{P} = \underline{0}$ oppure

- se esiste un polo Q tale che:

$$\underline{R} = \underline{0}$$
; $\underline{M}_{O} = \underline{0}$ oppure

- se esistono tre punti non allineati A.B.C tali che:

$$\underline{M}_{A} = \underline{0}; \quad \underline{M}_{B} = \underline{0}; \quad \underline{M}_{C} = \underline{0}$$

Ogni sistema di vettori applicati è equivalente al proprio risultante R applicato in un punto T arbitrariamente prefissato e ad una coppia di momen-

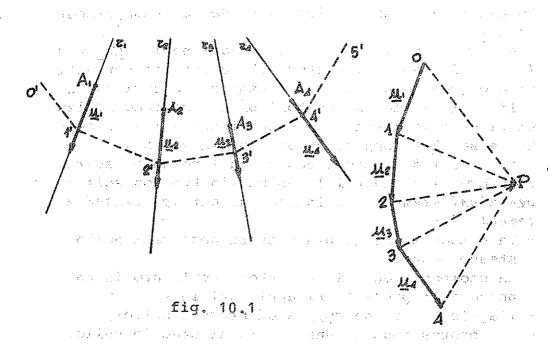
to uguale al momento risultante del sistema rispet to a T.

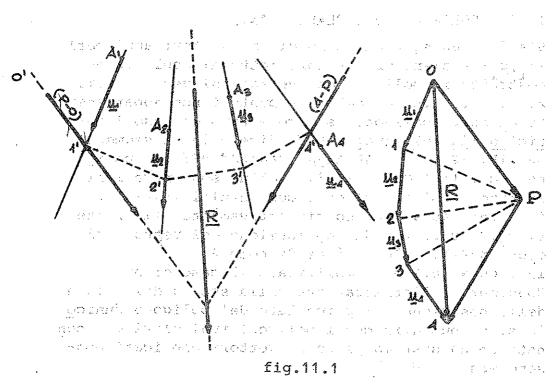
I sistemi aventi invariante scalare nullo $\underline{R} \times \underline{M} = \emptyset$ (quali ad esempio i sistemi di vettori concorrenti in uno stesso punto, o i sistemi di vettori paralleli, o i sistemi di vettori piani) sono equivalenti al proprio risultante \underline{R} applicato all'asse centrale se $\underline{R} \neq \underline{\emptyset}$ oppure ad una coppia se $\underline{R} = \underline{\emptyset}$. Due sistemi di vettori equivalenti possono essere trasformati o ridotti l'uno nell'altro con sole operazioni elementari, intendendo per operazioni elementari:

- la composizione di più vettori applicati nello stesso punto;
- la scomposizione di un vettore applicato in un punto A in più vettori applicati in A;
- l'aggiunta di una coppia di braccio nullo;
- la soppressione di una coppia di braccio nullo.

I.6) - POLIGONI FUNICOLARI PIANI

Sia dato un sistema piano di n vettori applicati (A_i, \underline{u}_i) e siano r, le loro rette di applicazione; costruito il poligono dei vettori di vertici 0,1, 2....i....n, e scelto un punto P non appartenen te al detto poligono, si proiettino da esso i ver tici della poligonale: P si dice polo, i segmenți OP, 1P, 2P...iP...nP raggi proiettanti. Il poligono i cui lati 0'1', 1'2', (n-1)n sono paralleli ai raggi proiettanti ed i cui vertici 1', 2',.... i'....n', appartengono rispettivamente alle rette r, r₂,...r_n di applicazione dei vettori si dice poligono funicolare di polo P. In figura 10.1 é esemplificato il caso di n=4. Considerata l'arbitrarietà della scelta del polo e della posizione del primo lato del poligono funico lare, si può dire che i poligoni funicolari che con nettano un sistema piano di vettori applicati possono essere ∞3.





TEOREMA FONDAMENTALE: un sistema piano di vettori applicati é equivalente ai vettori (P-0) ed (n-P) applicati al primo ed all'ultimo lato del poligono funicolare.

La retta parallela al risultante \underline{R} del sistema di vettori, passante per l'intersezione del primo e dell'ultimo lato del poligono funicolare é, per de finizione, l'asse centrale del sistema; il sistema é equivalente quindi al risultante \underline{R} applicato a tale retta(v.fig.11.1).

La condizione di equivalenza a zero di un sistema piano di vettori si esprime graficamente con la con dizione che siano chiusi sia il poligono dei vetto ri che il poligono funicolare : se infatti il poli gono dei vettori é chiuso si ha che il risultante R é nullo (il suo segmento rappresentativo é un punto), se inoltre é chiuso il poligono funicolare si ha che é nullo anche il momento risultante M ri spetto ad un qualunque polo e ciò in quanto i due vettori (P-0) e (n-P) cui il sistema é riducibile risultano applicati alla stessa retta e costituiscono quindi una coppia di braccio nullo. Nella fi gura 12.1 é riportato un sistema di vettori applicati equivalenti a zero per il quale risultano quin di chiusi sia il poligono dei vettori che il poligono funicolare.

Il metodo dei poligoni funicolari consente in particolare la risoluzione grafica di alcuni problemi riguardanti i sistemi piani di vettori applicati:

a) riduzione di un sistema piano di vettori al proprio risultante R applicato all'asse centrale se R≠0 oppure ad una coppia se R=0. Il primo caso è rappresentato in fig.11.1, mentre per il secondo caso, di fig.13.1, dato un sistema di vettori a risultante nullo, per il quale sia cioè chiuso il poligono dei vettori, si verifica che il poligono funicolare ha il primo e lo ultimo lato, paralleli; a tali lati per il teo rema fondamentale vanno peraltro applicati i

The Libert She Contact on the contact of the State of the Contact (Comp. The Comp. Comp. Co. Sec. 1997) In the comp. secretion issues and a secretific 4.3 97 YET 美国工作的 医二甲基磺胺 医苯酚基 我的现在分词 化环烷酸 化二氯二甲基二甲基二甲基二甲基二甲基二甲基二甲基 人名英威格特拉 机二十二十分 多度 表示 動物 医内部 医克克特氏试验检尿 医乳腺性 医电极性 二醇二酰亚二 1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,1986年,19 As a series The Transport of the last 《海津縣》的計劃的人。如《北京的《古里道中》,在自由《道的》 O 23 4 2 2 5 7 3 AT LEAD OF BETTER MORE CONT. this one me be of on those or and head ifig. 13:1 and a first light first a group of the grantest formation

vettori (P-0) e (4-P) ed essendo questi ugauli in modulo e direzione ed opposti in verso costituiscono la coppia cui il sistema é equivalente.

b) riduzione di un sistema piano di vettori a due vettori, uno applicato ad un punto assegnato ed un altro applicato ad una retta del piano non passante per esso(v.fig.14.1).

Dato il sistema piano di vettori applicati(A_1 , \underline{u}_1), (A_2,\underline{u}_2) , (A_3,\underline{u}_3) , (A_4,\underline{u}_4) e assegnato il pun

Dato 11 sistema piano di vettori applicati(A_1 , u_1), (A_2, u_2) , (A_3, u_3) , (A_4, u_4) e assegnato il punto T e la retta r si costruisce un poligo no funicolare di polo P il cui primo lato passi per T; detto S il punto di intersezione dello

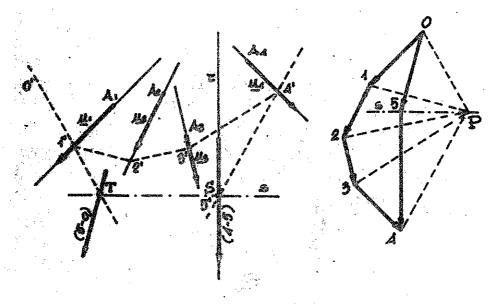


fig.14.4

ultimo lato del poligono funicolare con la retta r, e detta s la retta passante per i punti T ed S, si traccia per P la parallela ad s e per l'ultimo estremo del poligono la parallela ad r individuando in tal modo il punto 5. I vet tori (5-0) e (4-5) applicati rispettivamente al punto T ed alla retta r, sono i vettori cerca ti : considerando infatti il sistema costituito dai vettori applicati (1-0), (2-1), (3-2), (4-3),

chiuso sia il poligono dei vettori che quello funicolare.

c) riduzione di un sistema piano di vettori ad un vettore applicato ad un punto assegnato più una coppia (v.fig.15:1).

Dato il sistema piano di vettori applicati (A₁, u₁); (A₂, u₂) (A₃, u₃), (A₄, u₄) ed assegnato il punto Q si costruisce il poligono funicolare

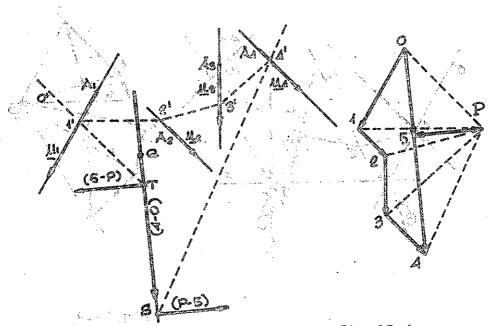


fig.15.1

net a state pastor T. confirm the case of the contact of a state of the contact o

di polo P e di prime lato generico; considerato che il sistema e riducibile ai vettori (P-0) e (4-P) applicati al primo ed all'ultimo lato del poligono funicolare si scompongono tali vettori secondo la direzione dell'asse centrale e secon

do la direzione ad essa ortogonale. Risultando (P-0)=(5-0)+(P-5) e (4-P)=(5-P)+(4-5) il siste ma é equivalente ai vettori (5-0) e (P-5) applicati in T e (5-P) e (4-5) applicati in S e dun que essendo (4-5)+(5-0)=(4-0)=R, il sistema da to risulta equivalente alla risultante R applicata in Q più la coppia costituita dai vettori (5-P) e (P-5).

d) determinazione del centro di un sistema di vetto ri paralleli (v.fig.16.1). Dato il sistema piano di vettori applicati paral

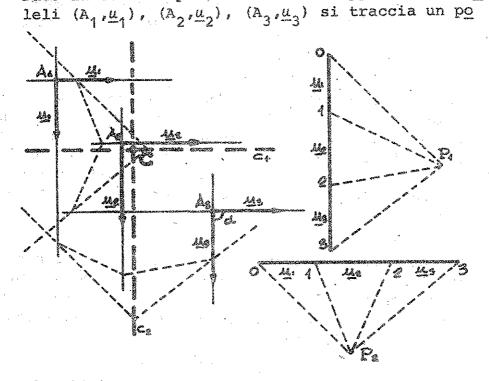


fig.16.1

ligono funicolare generico di polo P; la retta c, parallela alla risultante (e cioé alla comune direzione dei vettori) passante per l'intersezione del primo e dell'ultimo lato del poligo no funicolare rappresenta l'asse centrale. Ruotati quindi tutti i vettori attorno ai loro punti di applicazione di un angolo a, si costruisce

un nuovo poligono funicolare di polo P₂ e dunque il nuovo asse centrale c₂: l'intersezione fra le rette c₁ e c₂ rappresenta per definizione il centro C del sistema di vettori ed infatti attorno ad esso ruota l'asse centrale quando i vettori del sistema ruotano attorno ai loro punti di applicazione.

1.7) - VETTORI NUMERICI

Si definisce vettore numerico \underline{a} di ordine n sul campo base C, un insieme ordinato di n elementi di C, $a_1 \dots a_n$, che si dicono componenti del vettore e si scrive :

$$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

In particolare si é visto che il generico vettore libero \underline{v} é definito dai tre scalari v_{χ} , v_{χ} , v_{χ} che geometricamente ne rappresentano le componenti secondo gli assi di una terna cartesiana ortogonale; algebricamente \underline{v} sarà allora un vettore numerico di ordine tre sul campo dei numeri reali e si indicherà con:

$$\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

In generale il vettore $\underline{a}=(a_1, a_2, \ldots a_n)$ si potrà considerare un vettore numerico ad n componenti in uno spazio \mathbb{R}^n ad n dimensioni (iperspazio). Dato il vettore \underline{a} si definisce norma o lunghezza del vettore, lo scalare

$$a = |\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2};$$

un vettore la cui norma é uno dicesi vettore uni-

Dati i vettori numerici $\underline{a}=(a_1,a_2,\ldots a_n)$ e $\underline{b}=(b_1,b_2,\ldots a_n)$

(a,b) e la costante c si definiscono le seguenti operazioni:

- SOMMA DI VETTORI : é l'operazione che associa ai vettori addendi \underline{a} e \underline{b} il vettore somma $\underline{a+b}$ le

cui componenti sono somma delle componenti omonime dei vettori addendi:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

- PRODOTTO DI UNO SCALARE PER UN VETTORE : é l'operazione che associa allo scalare k ed al vettore $\underline{\alpha}$ il vettore ka le cui componenti sono prodotto dello scalare per le componenti del vettore :

$$k\underline{\alpha} = (k\alpha_1, \ldots, k\alpha_n)$$

- PRODOTTO DI VETTORI : É l'operazione che associa ai vettori da moltiplicare lo scalare somma dei prodotti delle componenti omonime dei vettori:

$$\underline{a} \times \underline{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

II - RICHIAMI DI ALGEBRA DELLE MATRICI

II.1) - DEFINIZIONI

MATRICE DI ORDINE m x n : é un insieme di m x n elementi disposti ordinatamente secondo m righe ed n colonne; l'elemento appartenente alla riga i ed alla colonna j si indica con a ; si dice componen te della matrice |A| e può essere di natura qualsi asi.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$$

MATRICE RIGA o VETTORE RIGA : é una matrice di ordine 1xn

$$[B] = [b_1 \ b_2 \dots b_j \dots b_n] = [b_{ij}]$$

MATRICE COLONNA o VETTORE COLONNA : é una matrice di ordine mx1

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_i \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \end{bmatrix} = \{ \mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_i \dots \mathbf{c}_m \} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{i1} \end{bmatrix}$$

MATRICE TRASPOSTA della matrice A di ordine m x n é la matrice di ordine n x m e di componenti a ji

ottenuta scambiando ordinatamente fra loro righe e

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

colonne.

MATRICE QUADRATA: é una matrice per la quale m=n Ovvero in cui il numero di righe é uguale al nume ro di colonne

Per tali matrici si definiscono elementi della $d\underline{a}$ gonale principale gli elementi a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn} aventi lo stesso indice.

MATRICE DIAGONALE: é una matrice quadrata i cui unici elementi non nulli sono quelli della diagonale principale:

$$a_{ij} = \begin{cases} =0 & \text{per } i \neq j \\ \neq 0 & \text{per } i=j \end{cases}$$

MATRICE NULLA: é una matrice i cui elementi sono tutti nulli e si indica con [0]

MATRICE SPARSA: é una matrice con prevalenza di

elementi nulli.

Section 1. The second

MATRICE UNITARIA : é una matrice diagonale i cui elementi non nulli sono tutti uguali all'unità :

=0 per $i\neq j$ Tale matrice si dice anche matrice unità o matrice identica e si indica con la notazione [I].

MATRICE TRIANGOLARE: é una matrice quadrata i cui elementi al disopra o al disotto della diagonale principale sono tutti nulli.

MATRICE A BANDA: é una matrice quadrata i cui ele menti non nulli sono addensati lungo la diagonale principale.

MATRICE SIMMETRICA: é una matrice quadrata per la quale sia a_{ij}= a_{ji}

MATRICE EMISIMMETRICA: é una matrice quadrata per la quale sia a j = -a j e quindi in particolare gli elementi della idiagonale principale sono uguali.

$$\begin{bmatrix}
0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
-a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
-a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\
-a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0
\end{bmatrix}$$

SOTTOMATRICE: data la matrice [A] di ordine m x n dicesi sottomatrice di [A] ogni matrice di ordine p x q composta da p < m righe e q < n colonne di [A] MATRICE RIPARTITA: dicesi ogni matrice [A] in cui siano individuate più sottomatrici $[A_{ij}]$.

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$ove \begin{bmatrix} A_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{34} \end{bmatrix}$$

MATRICE RECIPROCA di una matrice quadrata A si in dica con [A] ed é la matrice i cui elementi sono i complementi algebrici degli elementi a di [A].

MATRICE AGGIUNTA di una matrice quadrata [A] si indica con [A] ed é la trasposta della matrice reciproca di [A].

uGUAGLIANZA DI MATRICI: due matrici [A] e [B] si dicono uguali se hanno lo stesso ordine e risulta per tutti gli elementi a i bij.

II.2) - OPERAZIONI TRA MATRICI

SOMMA DI MATRICI: due matrici [A] e [B] sono sommabili se hanno lo stesso ordine. La matrice som ma [c] avrà ordine uguale a quello delle matrici addende ed elementi c;=a;;+b;; somma degli elementi di [A] e [B] aventi gli stessi indici.

$$[A] + [B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & \dots & (a_{1n} + b_{1n}) \\ (a_{m1} + b_{m1}) & (a_{m2} + b_{m2}) & \dots & (a_{mn} + b_{mn}) \end{bmatrix}$$

Se le matrici [A] e [B] sono ripartite la somma é possibile solo se le sottomatrici omonime hanno lo stesso ordine: la matrice somma é in tal caso una matrice ripartita le cui sottomatrici sono somma delle sottomatrici omonime di [A] e di [B].

$$[A] + [B] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{+B} & A_{12}^{+B} & A_{1$$

Proprietà della somma di matrici :

$$[A] + [B] = [B] + [A]$$

$$([A] + [B]) + [C] = [A] + ([B] + [C])$$

$$[A]^{T} + [B]^{T} = [A+B]^{T}$$

DIFFERENZA DI DUE MATRICI [A] e [B] : é la matrice somma di [A] e dell'opposta di [B], ovvero la matrice [D] i cui elementi sono $d_{ij} = a_{ij} + (-b_{ij})$ PRODOTTO DI UNA MATRICE [A] PER UNO SCALARE k : é una matrice di ordine uguale a quello di [A] ed elementi ka;

$$k[A] = k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Proprietà :

$$k(h[A]) = (k \cdot h) [A]$$

$$(k+h)[A] = k[A] + h[A]$$

$$k([A] + [B]) = k[A] + k[B]$$

$$(k[A])^{T} = k[A]^{T}$$

PRODOTTO DI DUE MATRICI: il prodotto fra la matrice [A] di ordine m x n e la matrice [B] di ordine p x q é possibile solo se il numero di colonne di [A] é uguale al numero di righe di [B] ovvero se n=p; la matrice prodotto avrà ordine m x q ed i suoi ele menti c si otterranno come prodotto scalare del vettore i riga i-mo di [A] per il vettore colonna j-mo di [B].

$$c_{ij} = (a_{i1}, \dots a_{in}) \times (b_{1j}, \dots b_{nj}) = \sum_{k} a_{ik} b_{kj}$$

Proprietà del prodotto di matrici :

$$[A]([B] \cdot [C]) = ([A][B])[C]$$

$$(|A|+|B|)|C| = |A||C|+|B||C|$$
 $k(|A|\cdot|B|) = (k|A|)|B| = |A|(k|B|)$
 $\cdot (|A|\cdot|B|)^{T} = |B|^{T} \cdot |A|^{T}$

INVERSIONE DI UNA MATRICE: é una operazione possibile solamente se la matrice é quadrata ed il suo determinante é non nullo.

Si definisce inversa della matrice [A] la matrice $[A]^{-1}$ tale che : $[A]^{-1} \cdot [A] = [I]$ essendo [I] la matrice unitaria .

Gli elementi componenti della matrice [A] 1 si pos sono ottenere dividendo i singoli elementi della matrice aggiunta di [A] per il determinante di |A|

$$[A]^{-1} = \frac{[A]}{A}$$

L'inversione di una matrice [A] può eseguirsi anche operando una ripartizione della matrice in modo ta le però che gli elementi della diagonale principale della matrice ripartita siano sottomatrici invertibili. Detta [B] la matrice inversa di [A] overo posto $[A]^{-1} = [B]$ per definizione dovra essere [A] [B] = [I] ovvero:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

e cicé sviluppando il prodotto [A][B] dovrà essere:

$$\begin{bmatrix} A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} A_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} A_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$$

La soluzione di tale sistema fornisce i valori del le sottomatrici incognite $\left[\mathbf{B}_{11}\right]$, $\left[\mathbf{B}_{12}\right]$, $\left[\mathbf{B}_{21}\right]$,

[B22] costituenti l'inversa di [A]. Nel caso esami nato risulta:

$$\begin{bmatrix} B_{11} \end{bmatrix} = (\begin{bmatrix} A_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} \end{bmatrix})^{-1} \\
\begin{bmatrix} B_{22} \end{bmatrix} = (\begin{bmatrix} A_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \end{bmatrix})^{-1} \\
\begin{bmatrix} B_{12} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{22} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} B_{21} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \end{bmatrix}$$

Proprietà dell'inversione di matrici :

$$([A][B])^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1}$$

MATRICI ORTOGONALI: una matrice quadrata [A] si dice ortogonale se é invertibile e la sua inversa coincide con la trasposta, ovvero se : $[A]^{-1}=[A]^T$.

III - CENNI DI ALGEBRA LINEARE

III.1) - DEFINIZIONI

FORMA LINEARE nelle variabili
$$x_1, \dots, x_n$$
:
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

EQUAZIONE LINEARE di coefficienti a_1, \ldots, a_n , incognite x_1, \ldots, x_n e termine noto b:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

SISTEMA DI m EQUAZIONI LINEARI IN N INCOGNITE

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$
 $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$

il sistema si definisce :

- compatibile se ammette almeno una soluzione
- incompatibile se non ammette soluzioni
- determinato se ammette una sola soluzione
- indeterminato se ammette infinite soluzioni
- omogeneo se i termini noti b_i sono tutti nulli non omogeneo se i termini noti b_i non sono tutti nulli.

Si definiscono altresì per il sistema le seguenti matrici :

MATRICE DEI COEFFICIENTI

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[A'] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m} \end{bmatrix}$$

Con notazione matriciale il sistema si può scrivere nella forma :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ovvero :

$$[A][X] = [B]$$

avendo indicato con : [A] la matrice dei coefficienti

[X] il vettore colonna delle incognite

[B] il vettore dei termini noti

La soluzione del sistema, ovvero la determinazione delle componenti del vettore [X], é data da:

$$[X] = [A]^{-1} [B]$$

formalmente analoga alla soluzione di un'equazione di primo grado ; sostanzialmente essa esprime la regola di Cramer con notazione matriciale e mostra che la risoluzione del sistema si riduce all'inversione della matrice [A].

III.2) - DISCUSSIONE DEI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

Detti: p il rango della matrice dei coefficienti del sistema

p' il rango della matrice completa del sistema

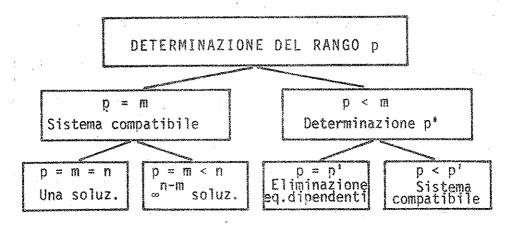
m il numero di equazioni del sistema

n il numero di incognite del sistema

si possono verificare i squenti casi e sottocasi :

A) p=m : il sistema si dice normale ed é sempre compatibile;

- i sottocasi possibili allora sono :
- A.a) p=m=n : esiste una sola soluzione che si de termina con la regola di Cramer o con altro metodo;
- A.b) p=m<n : si possono fissare ad arbitrio i va lori di n-m incognite e determinare la soluzione del sistema in funzione degli n-m parametri fissati; le soluzioni saranno °
- A.c) p=m>n : questo sottocaso va contemplato direttamente nel caso B)dovendo essere necessariamente p<m
- B) p<m : in questo caso é necessario determinare anche p'
- i sottocasi possibili sono :
- B.a) p=p' : per il teorema di Rouché-Capelli il sistema é compatibile: si eliminano m-p equazioni linearmente dipendenti e si risolve il sistema delle sole equazioni linearmente indipendenti che é un sistema normale. Si rientra dunque nel caso A
- B.b) p<p: : il sistema é incompatibile.
 QUADRO RIEPILOGATIVO



IV - CENNI DI CINEMATICA DEI CORPI RIGIDI

IV.1) - GENERALITA'.

La cinematica studio il moto dei corpi dal punto di vista geometrico indipendentemente dalle cause che l'hanno generato.

Dato un corpo ed assegnati nello spazio un sistema di riferimento fisso ed un sistema di riferimento mobile, si definisce:

moto assoluto il moto del corpo rispetto al riferi
mento fisso ;

moto relativo il moto del corpo rispetto al riferi mento mobile ;

Esempio classico é quello dell'uomo che passeggia su di un treno in corsa: assumendo che la terra non si muova, il moto dell'uomo rispetto alla terra (riferimento fisso) é assoluto, rispetto al treno (riferimento mobile) é relativo, perché men tre l'uomo si muove il treno non rimane fermo ma si sposta an ch'esso rispetto alla terra.

Il corpo più semplice che si possa prendere in con siderazione é quello costituito da un punto P; per individuarne la posizione in uno spazio a tre dimen sioni é sufficiente fissare le sue tre coordinate rispetto ad un sistema di assi di riferimento : di remo allo ra che un punto ha tre gradi di libertà nello spazio, ovvero che può assumere nello spazio ∞3 posizioni, dipendendo ogni sua posizione da 3 parametri. Quando non si ponga alcuna limitazione alle posizioni che il punto P può occupare esso si dice libero ed é possibile fissare le sue tre coor dinate in maniera qualunque; se invece si impongono delle limitazioni alle posizioni che P può assu mere, si dice che il punto é vincolato e le condizioni cui deve soddisfare prendono nome di vincoli. Un vincolo può essere espresso analiticamente da una equazione f=0 o da una disequazione f≷0 : nel primo caso il vincolo si definisce bilaterale, nel secondo caso unilaterale. Geometricamente i vincoli bilaterali impongono al punto di muoversi mante nendosi sempre sulla superficie rappresentata dall'equazione f=0, i vincoli unilaterali impongono invece al punto di spostarsi mantenendosi sempre entro una delle due regioni dello spazio limitate dalla superficie f=0, a seconda che sia f>0. I vincoli che si prenderanno in esame nel sequito saranno sempre bilaterali salvo esplicito avviso contrario. Un modo di vincolare allora il punto P é quello di obbligarlo a spostarsi su di una superficie: analiticamente il vincolo é espres so dall'equazione della superficie, equazione che deve essere sempre soddisfatta dalle coordinate del punto. In questo caso si é liberi di fissare solo due delle coordinate di P mentre la terza si ricava dall'equazione del vincolo: il punto possiede allora due gradi di libertà ed il vincolo si dice semplice perché elimina un solo grado di libertà. Se poi si vincola il punto a muoversi rimanendo su due superfici, e cioé sulla loro curva di intersezione, si può dire che il punto possiede un solo grado di libertà e due vincoli semplici, ovvero un vincolo doppio. Se infine il punto é vincolato a rimanere su tre superfici, esso non ha alcun grado di liber tà essendo vincolato alla posizione di intersezione delle tre superfici: possiede allora tre vincoli semplici, ovvero un vincolo triplo ed é quindi fis

Si noti che perché più vincoli non eliminino gli stessi gradi di libertà ovvero siano efficaci le loro equazioni devono essere indipendenti. Allorché il punto P passa dalla posizione A di coor dinate (x_A,y_A,z_A) alla posizione B di coordinate

 (x_B, y_B, z_B) si dice che esso ha subito lo spostamento to $\underline{\delta} = (B-A)$; tale spostamento é una grandezza vet toriale e dunque e rappresentabile con un vettore.

Se il corpo, invece che da un solo punto P, é costituito da un numero finito n di punti, si parla di sistema discreto di punti. Un sistema di n punti possiede, in uno spazio a tre dimensioni, 3n gradi di libertà e, potendo ogni punto assumere ∞^3 posizioni, l'intero sistema potrà assumere ∞^{3n} con figurazioni; se si impongono invece al sistema δ vinco li, i gradi di libertà del sistema si riducono a $3n-\delta$.

In particolare un sistema di 2 punti possiede nello spazio a tre dimensioni 6 gradi di libertà; se si impone invece ai due punti il vincolo di muoversi nello spazio mantenendo immutata la reciproca distanza d ciò equivale a vincolare uno dei punti a muoversi rimanendo sempre sulla superficie sferica avente per centro l'altro punto e per raggio d: i gradi di libertà del sistema costituito dai due punti così vincolati divengono allora 5. Se il sistema é costituito da un numero di punti n>2 vincolati a muoversi tenendo immutate le reciproche distanze i gradi di libertà del sistema sono sempre 6 indipendentemente dal numero n di punti.

Un sistema discreto di n punti cui sia imposto il vincolo di muoversi mantenendo immutate le recipro che distanze si definisce sistema rigido.

Un sistema rigido costituito da un numero infinito di punti distribuiti con continuità nella regione dello spazio da essi occupata, si definisce conpo nigido; nigido é dunque per definizione un corpo i cui spostamenti avvengono senza che vari la reciproca distanza fra gli infiniti punti che lo costituiscono, ovvero un corpo i cui spostamenti non sono accompagnati da deformazioni.

Un corpo rigido possiede allora anch'esso, in uno spazio a tre dimensioni, 6 gradi di libertà: ad esempio per individuarne la posizione basta fissare le tre coordinate dell'origine e tre coseni direttori di un riferimento di assi cartesiani ortogona li, solidale con il corpo.

Con ragionamenti del tutto analoghi si ricava che in uno spazio a due dimensioni (piano), un corpo costituito da un punto possiede 2 gradi di libertà, un corpo costituito da un sistema discreto di n punti liberi possiede 2n gradi di libertà, un sistema discreto rigido di n punti o un corpo rigido possie dono 3 gradi di libertà.

IV.2) - CINEMATICA DEI PICCOLI SPOSTAMENTI

Nei problemi trattati in Statica vengono presi in esame solo spostamenti molto piccoli, rispetto alle dimensioni del corpo e ciò comporta che le equazioni dei vincoli si riducono ad equazioni lineari. Infatti, si consideri un punto P vincolato a muoversi su di una superficie qualunque di equazio ne f=0 di grado n:se consideriamo, a partire dalla posizione iniziale, uno spostamento molto piccolo del punto P, possiamo con buona approssimazione am mettere che lo spostamento sia avvenuto sul piano tangente alla posizione iniziale; è possibile cioè nell'ipotesi dei piccoli spostamenti sostituire la superficie generica con la superficie piana ad essa tangente nella posizione iniziale occupata dal punto P. Ciò vuol dire che, nel caso di piccoli spostamenti e cioé quando questi sono trascurabili rispetto alle dimensioni del corpo, i vincoli sono tutti esprimibili mediante equazioni lineari; in tal caso si dice anche che si e linearizzato il pro blema.

Per indicare spostamenti piccoli del punto P si usa in genere in Meccanica Razionale la notazione δP e la dizione di spostamenti elementani; nel seguito verranno trattati, salvo esplicita menzione contra ria sempre e solo spostamenti piccoli (intendendo come tali spostamenti piccoli nispetto alle dimensioni del compo) che saranno indicati comunque con la notazione se invece di δP per non indurre nel lo studente pericolose confusioni.

Assegnato un sistema rigido di cui C e P siano due punti qualunque, supposto C fisso, per il vincolo

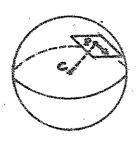


fig.1.4

di rigidità P sarà costret to a muoversi sulla superficie sferica di raggio PC, e, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, sulla superficie piana tangente alla sfera nella posizione iniziale di P. Tale piano é però ortogonale a PC e ciò si esprime in termini vettoria

li con la condizione che, nelle ipotesi fatte, debba essere sempre nullo il prodotto scalare fra qualunque spostamento $\frac{S}{p}$ del punto P ed il vettore (P-C)

$$\frac{S}{P} \times (P-C) = 0$$

Se poi il punto C non é fisso ma compie lo spostamento \underline{S}_{C} , la precedente equazione assume la forma più generale :

$$(\underline{S}_{p} - \underline{S}_{c}) \times (P - C) = 0$$

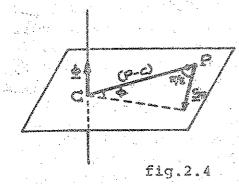
o ciò che é lo stesso

$$\frac{S}{P} \times (P-C) = \frac{S}{C} \times (P-C)$$

la quale esprime il fatto che nel passaggio di un sistema rigido da una posizione ad un'altra ad essa vicinissima, gli spostamenti di due qualsiasi punti devono avere la stessa proiezione sulla loro congiungente ovvero che la differenza fra i vettori spostamento dei due punti deve essere ortogonale alla congiungente i due punti.

Le espressioni sopra riportate caratterizzano dunque i moti dei sistemi rigidi nell'ambito dei piccoli spostamenti.

Tornando all'ipotesi che C sia fisso, dovendo il punto P muoversi sulla superficie sferica di raggio PC, nel compiere lo spostamento \underline{S} esso avrà compiuto altresì una rotazione ϕ attorno all'asse per C normale al piano contenente i vettori (P-C) ed \underline{S} , e dovendo



essere anche, per l'ipotesi di piccoli spostamenti, i vettori (P-C) ed $\frac{S}{P}$ ortogonali, lo spostamento $\frac{S}{P}$ potrà esprimersi come prodotto vettoriale di ϕ e di (P-C) (v.fig.2.4):

$$\frac{S}{P} = \frac{\phi}{\Lambda} \Lambda (P-C)$$

Se il punto C non $\hat{\epsilon}$ fisso ma si muove compiendo lo spostamento \underline{S}_{C} la precedente espressione assume la forma :

$$\underline{S}_{p} - \underline{S}_{c} = \underline{\phi} \Lambda (P-C)$$

ovvero:

$$\underline{s}_{p} = \underline{s}_{c} + \underline{\phi} \Lambda (P-C)$$

la quale esprime che per un sistema rigido, nell'i potesi di piccoli spostamenti, lo spostamento di un punto P può sempre esprimersi come somma di una rotazione ϕ di P attorno al centro C e di una traslazione di C: tale equazione caratterizza anch'essa i moti nigidi e costituisce la formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi.

Si é visto che quando il punto C (centro di rotazio ne) é fisso, lo spostamento del generico punto P é fornito dal vettore :

$$\frac{S}{P} = \Phi \Lambda(P-C)$$
;

di modulo

$$S_p = \phi \cdot \overline{PC} \cdot \operatorname{sen} \pi/2 = \phi \cdot \overline{PC}$$

dato dal prodotto del modulo della rotazione o per la distanza PC del punto P dal centro C, direzione della retta passante per P ortogonale alla congiun gente PC, verso tale che i vettori ◊,(P-C) ed S costituiscano, nell'ordine, una terna levogira. La componente dello spostamento S del punto P secondo la generica retta r inclinata dell'angolo a (qualunque e non necessariamente piccolo) rispetto

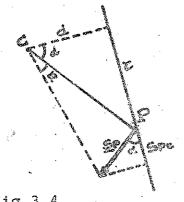
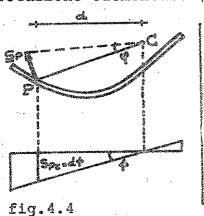


fig.3.4

alla direzione di S vale (v.fig.3.4):

 $S_{pr} = S_{p} \cdot \cos \alpha = \phi \cdot d$ e choé per i corpi rigidi, nell'ambito dei piccoli spostamenti, la com ponente secondo una retta r dello spostamento di un punto P é data dal prodotto della rotazione ø per la distanza della

retta r dal centro di rotazione C. Assegnato dunque un corpo rigido e noto il suo centro di rotazione C, é sempre possibile tracciare il diagramma delle componenti secondo una direzione r de gli spostamenti dei suoi punti, conseguenti ad una rotazione elementare o attorno al centro C.Sia quel



lo indicato in fig. 4.4. . il corpo rivido ed il suo centro di rotazione C e si voglia il diagram ma delle componenti secondo la direzione verti cale r degli spostamenti dei punti del corpo : es sendo la generica componente espressa nella for _= ø∘d tale diagra<u>m</u>

ma sarā lineare. Assunta

una fondamentale ortogonale alla direzione r secon do cui si vogliono le componenti e proiettato su di essa il centro di rotazione C secondo la direzione r, il diagramma cercato è fornito dalla retta passante per C ed inclinata dell'angolo è rispetto al la fondamentale: l'ordinata in corrispondenza del generico punto P è fornita infatti dal prodotto d'tga ed essendo tgè= per la ipotizzata piccolez za degli spostamenti, risulta S = pod. Le ordina te del diagramma così tracciate rappresentano cioè, in corrispondenza di ogni punto P, le componenti dello spostamento di P secondo la direzione della retta r.

[V.3) - LAVORO

LAVORO DI UNA FORZA \underline{F} applicata nel punto P é per definizione il prodotto scalare di \underline{F} per lo spostamento \underline{s} del punto P:

$$L = F \times S = F \cdot S \cos \alpha$$

ovvero per definizione di prodotto scalare é il prodotto del modulo di F per la componente dello spostamento s nella direzione della forza. In tale de finizione sia F che s vanno intesi in senso generalizzato potendo rappresentare F forze propria mente dette o coppie, ed s sia traslazioni che rotazioni.

Nel caso di più forze generalizzate \underline{F}_i applicate ai punti \underline{P}_i che subiscono gli spostamenti \underline{s}_{pi} , il lavoro assume l'espressione :

$$L = \sum_{i} \underline{F}_{i} \times \underline{s}_{pi}$$

In forma matriciale indicando con [F] il vettore forza e con [s] il vettore spostamento, i cui ele menti sono le componenti degli spostamenti dei punti P_i di applicazione delle forze nella direzione delle forze stesse, si ha :

$$L = [F]^{T} \cdot [s] = [F] \cdot [s]^{T}$$

Nel caso di corpo rigido e spostamenti piccoli potendo gli spostamenti assumere la forma :

$$\underline{s}_{pi} = \underline{s}_{c} + \underline{\phi} \Lambda (P_{i} - C)$$

con C centro di rotazione del corpo

P punti di applicazione delle forze \underline{F}_{i} s_ traslazione rigida del centro C

rotazione rigida del sistema attorno a C

il lavoro assume la forma :

applying the effect of the control of the second

$$L = \sum_{i} \underline{F}_{i} \times \underline{s}_{i} =$$

$$= \sum_{i} \underline{F}_{i} \times |\underline{s}_{c} + \underline{\phi} \wedge (\underline{P}_{i} - \underline{C})| =$$

$$= \sum_{i} \underline{F}_{i} \times \underline{s}_{c} + \sum_{i} \underline{F}_{i} \times \underline{\phi} \wedge (\underline{P}_{i} - \underline{C}) =$$

$$= \underline{R} \times \underline{s}_{c} + \sum_{i} (\underline{P}_{i} - \underline{C}) \wedge \underline{F}_{i} \times \underline{\phi} =$$

$$= \underline{R} \times \underline{s}_{c} + \underline{M}_{c} \times \underline{\phi}$$

Dunque il lavoro di un sistema di forze applicato ad un corpo rigido, nell'ipotesi di spostamenti piccoli, dipende solo dalla risultante R e dal mo mento risultante M del sistema di forze applicato, rispetto al centro di rotazione C.

territoria de la companya de la com

V - STATICA DEI SISTEMI MONODIMENSIONALI

V.1) - DEFINIZIONI

La STATICA ha per oggetto lo studio dell'equilibrio dei corpi; i corpi si definiscono:

tridimensionali se le tre dimensioni sono fra loro comparabili

bidimensionali se due delle dimensioni sono prevalenti rispetto alla terza

monodimensionali se una dimensione é prevalente ri spetto alle altre due. I corpi monodimensionali si dicono comunemente travi; una trave può considerar si generata da una figura piana detta sezione il

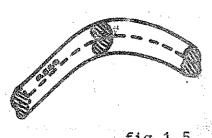


fig.1.5

cui baricentro percorre nello spazio una curva detta asse, in modo tale che la sezione si manten ga in ogni punto ortogo nale all'asse (vedi fig. 1.5). La trave, che usual mente viene schematizzata con il suo asse, può essere a sezione variabile

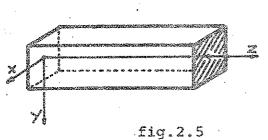
o costante a seconda che la sezione cambi o meno le proprie dimensioni, a debole o fonte curvatura; quan do l'asse é una retta la trave si definisce rettili nea.

TRAVI PIANE: una trave si definisce piana quando il suo asse \acute{e} contenuto in un piano α (piano della tra ve) e le sezioni sono ovunque simmetriche rispetto al piano a;

se essa é caricata simmetricamente gli spostamenti dell'asse sono contenuti anch'essi nel piano α . Nel seguito si tratteranno quasi esclusivamente si stemi monodimensionali piani che nella pratica tec nica rivestono notevole importanza in quanto bene schematizzano un gran numero di strutture reali.

(y.2) - RIFERIMENTI

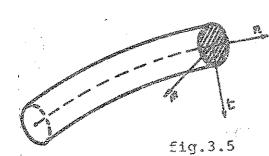
RIFERIMENTO FISSO: si assume una terna fissa levo



gira di assi cartesiani
xyz il cui piano yz coin
cide col piano della tra
ve ed il cui piano xy
coincide con quello del
la sezione; l'asse y si
assume verticale ed orien
tato verso il basso, lo
asse z si assume orizzon
tale, orientato verso de-

stra e coincidente, se la trave é rettilinea, con l'asse della trave (vedi fig.2.5).

RIFERIMENTO MOBILE: talvolta si assume una terna



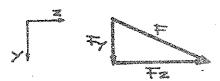
mobile levogira di assi cartesiani ortogonali m,n,t di cui l'origine si fa coincidere con il baricentro della sezione che di volta in volta si considera, il pia no mt si fa coincidere col piano della sezione, il piano nt col pia

no della trave, l'asse n tangente all'asse della trave e dunque ortogonale alla sezione nel baricentro. (vedi fig.3.5).

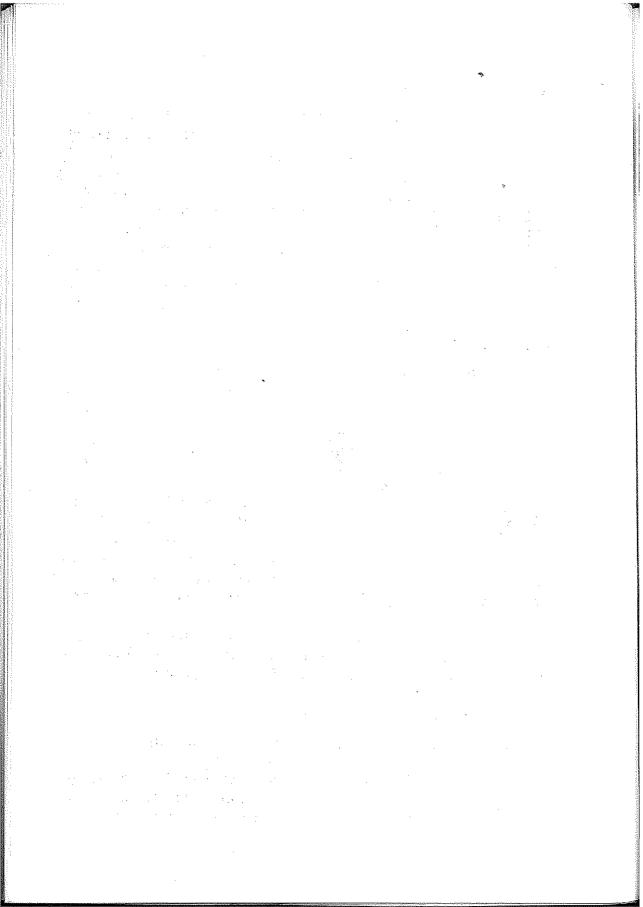
Spesso gli assi x ed y della terna fissa e gli assi m e t della terna mobile si assumono coincidenti con gli assi centrali d'inerzia della sezione.

V.3) - SOLLECITAZIONI ESTERNE

FORZE CONCENTRATE: sono vettori forza applicati in

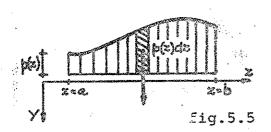


punti discreti della struttura; i loro modu li hanno le dimensioni fisiche di una forza F .



Ogni forza concentrata può essere definita dalle sue componenti secondo gli assi di una terna di riferimento: le componenti si assumono convenzionalmente positiva se sono equiverse gli assi di riferimento (vedi fig.4.5).

FORZE RIPARTITE : sono vettori forza applicati con



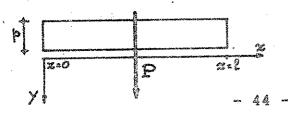
continuità su regioni della struttura, che siano linee, superfici o volumi. Nei sistemi monodimensionali piani le forze ripartite risultano applicate su linee che siano regio-

ni della curva d'asse delle strutture ed i loro moduli hanno pertanto le dimensioni fisiche di una for za divisa per una lunghezza $|FL^{-1}|$ (vedi fig.5.5). La legge di distribuzione del carico p(z) lungo lo asse z della struttura può essere qualsiasi e la sua risultante $P = \int_a^b p(z) dz$ é applicata all'asse centra

le; se, come accade nella quasi totalità dei casi, il carico ripartito è cotituito da forze tutte parallele fra loro, la risultante P è applicata in particolare al centro del sistema di vettori. Per la corrispondenza esistente fra sistemi di vettori paralleli e sistemi di masse concentrate in definitiva la risultante P coincide con l'area della siguna di carico ed il centro con il suo baricentro. Per quanto riguarda i versi positivi delle forze ripartite si assumono convenzioni del tutto analoghe a quelle adottate per le forze concentrate.

Si riportano nel seguito alcune delle leggi di carico p(z) più consuete, unitamente al valore delle loro risultanti P.

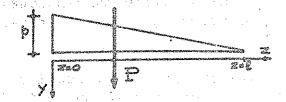
- legge di carico costante



$$p(z) = p$$

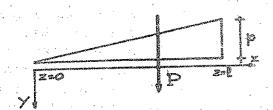
$$p = \int_{0}^{l} pdz = pl$$

- leggi di carico lineari



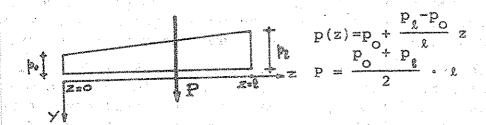
$$p(z) = \frac{p}{i}(l-z)$$

$$P = \int_{0}^{l} \frac{p}{i}(l-z) dz = \frac{pi}{2}$$



$$p(z) = \frac{1}{\ell}$$

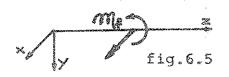
$$P = \int_{0}^{\ell} \frac{pz}{\ell} dz = \frac{pz}{2}$$



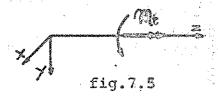
COPPIE CONCENTRATE sono vettori momento applicati in punti discreti della struttura; i loro moduli hanno le dimensioni fisiche di una forza per una lunghezza |FL|.

Le coppie si definiscono :

- FLETTENTI quando, con le convenzioni assunte, il



vettore momento é parallelo all'asse x: es so si assume positivo se equiverso all'asse x (vedi fig.6.5). - TORCENTI quando il vettore momento è parallelo al



l'asse z: esso si as sume convenzionalmente positivo se é equiverso a z (vedi fig.7.5).

COPPIE RIPARTITE sono vettori momento applicati con continuità su regioni della struttura che, nel caso di sistemi monodimensionali piani, sono parti dell'asse; i loro moduli hanno in tale caso dimensioni fisiche di una forza |F| (vedi fig.8.5). La

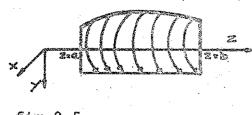


fig.8.5

legge di distribuzione m(z) delle coppie lungo l'asse della struttura può essere qualsiasi: il momento risultante vale

$$M = \int_{a}^{b} m(z) dz.$$

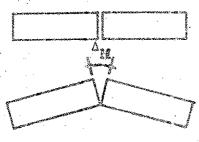
Le coppie ripartite si definiscono {lettenti o tor centi a seconda che i vettori momento che le costituiscono sono flettenti o torcenti.

Per quanto riguarda i versi positivi, le convenzioni che si adottano sono del tutto analoghe a quelle as sunte per le coppie concentrate.

CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE ESTERNA: assegnata una qualunque struttura costituita da una o più travi la condizione di carico più generale é quella costituita da forze concentrate e ripartite e da coppie, flettenti o torcenti, concentrate e ripartite ad essa applicate; dette rispettivamente Red Mala risultante ed il momento risultante di tali sollecitazioni si definiscono caratteristiche della sollecitazione esterna le componenti di Rae e di Mala econdo le direzioni degli assi di riferimento.

DISTORSIONI: sono anch'esse sollecitazioni esterne seppure non caratterizzate da vettori forza o momento, ma da spostamenti relativi. Si distinguono:

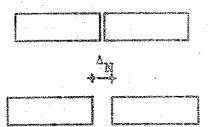
- distorsioni angolari: che consistono in una rotazio



ne relativa AM fra due sezioni adiacenti di una trave (vedi figura 9.5).

fig.9.5

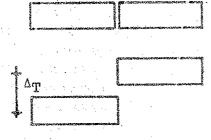
- distorsioni assiali : che determinano una trasla



zione relativa AN fra due sezioni adiacenti di una trave, nella direzione del suo asse (vedi fig.10. 5).

fig.10.5

- distorsioni taglianti: che determinano una traslazione relativa AT

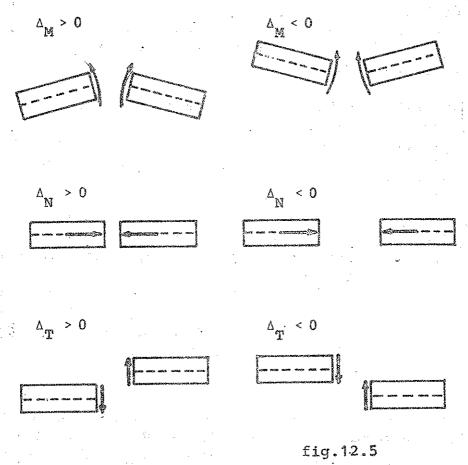


slazione relativa AT fra due sezioni adiacenti di una trave,nel la direzione normale all'asse (vedi fig.11. 5).

£iq.11.5

Per quanto riguarda le convenzioni sui segni, le di storsioni si assumono positive o negative a seconda che facciano compiere lavoro positivo o negativo al

le corrispondenti caratteristiche positive applica te alle sezioni della trave.



V.4) - EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

L'insieme delle travi che compongono una struttura sono collegate tra loro mediante vincoli interni e collegate all'esterno, ovvero al suolo, mediante vincoli esterni: entrambi questi tipi di vincolo ridu cono o eliminano i 6t gradi di libertà posseduti nello spazio o i 3t gradi di libertà posseduti nel piano dalle t travi costituenti la struttura. Ogni vincolo consente alcuni spostamenti mentre ne impedisce altri ed a questi si oppone esplicando forze o coppie dette appunto reazioni vincolari: in par

ticolare un vincolo capace di impedire una traslazione esplica una forza reattiva nella direzione della traslazione impedita, mentre un vincolo capace di impedire una rotazione esplica una coppia reattiva il cui vettore momento è parallelo all'asse della rotazione impedita.

POSTULATO FONDAMENTALE: é sempre possibile sostituire ogni víncolo applicato ad una struttura con la reazione vincolare da esso esplicata, senza che ciò alteri il regime statico o cinematico della struttura.

TEOREMA: Condizione necessaria e sufficiente perché un corpo rigido sia in equilibrio é che il si stema di sollecitazioni ad esso applicate sia equi valente a zero.

Se il corpo é *libero*, detti <u>R</u> ed <u>M</u> la risultante ed il momento risultante delle sollecitazioni ad esso applicate, per l'equilibrio nello spazio devo no essere soddisfatte le condizioni

$$\frac{R}{M} = 0$$

che prendono nome di equazioni cardinali della statica in forma vettoriale. Dette R,R,R,ed M,M,M, le componenti di R ed M secondo gli assi di una terna di riferimento x,y,z, le equazioni cardinali della statica in forma scalare assumono nello spazio a tre dimensioni la espressione:

$$R = 0$$

$$R^{Y} = 0$$

$$R^{Z} = 0$$

$$M = 0$$

$$M^{X} = 0$$

$$M^{Z} = 0$$

nel piano y,z l'espressione

1986年 - 100 日本 1986年 - 1986年 -

$$R = 0$$

$$R^{Y} = 0$$

$$M_{x} = 0$$

Le tre equazioni scalari che precedono, di uso comu ne per le strutture piane trattate nel presente cor so, esprimono rispettivamente le condizioni di equi librio alla traslazione nella direzione all'asse y, alla traslazione nella direzione dell'asse z, alla rotazione attorno alla direzione all'asse x, del corpo nel piano y,z.

Se il corpo é invece vincolato, dette R^a ed M^a la risultante ed il momento risultante delle sollecitazioni applicate al corpo e dette R^V ed M^V la risultante ed il momento risultante delle reazioni esplicate dai vincoli, le equazioni cardinali della statica assumono la forma vettoriale:

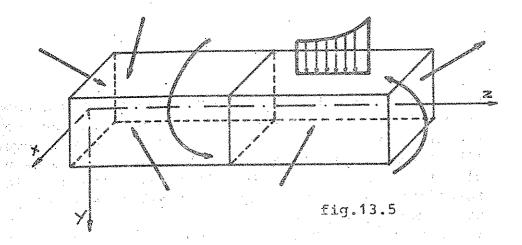
$$\underline{R}^{a} + \underline{R}^{v} = \underline{0}$$
ovvero
 $\underline{R}^{v} = -\underline{R}^{a}$

$$\underline{M}^{v} = -\underline{M}^{a}$$

La seconda forma esprime la condizione che per lo equilibrio di un corpo rigido il risultante ed il momento risultante delle reazioni vincolari debba no essere uguali ed opposti al risultante ed al momento risultante delle sollecitazioni esterne applicate al corpo.

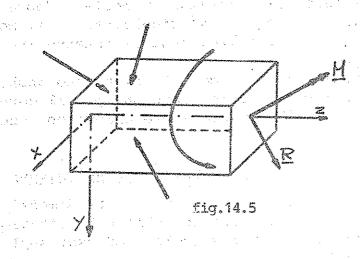
Del tutto analoghe alle precedenti risultano anche le espressioni scalari delle equazioni per il corpo vincolato sia nello spazio a tre dimensioni che nel piano.

V.5) CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE INTERNA Si consideri una trave nello spazio a tre dimensio ni in equilibrio sotto l'azione delle sollecitazio ni attive a delle reazioni vincolari ad essa applicate (vedi fig.13.5).



Se operiamo un taglio ed asportiamo una delle due parti in cui la trave é stata suddivisa, ad esempio quella di destra, la parte restante e cioé quel la di sinistra rimarrà ancora in equilibrio solo se applichiamo alla sezione gli sforzi che la parte di sinistra trasmetteva a quella di destra prima del taglio (vedi fig.14.5).

Per l'equilibrio cioé si dovranno applicare alla se zione la risultante \underline{R} ed il momento risultante \underline{M} di



tutte le solle citazioni ester ne attive e reat tive applicate al tronco di de stra. Le componenti di R (R, R, R, R) e di M (M, M, M, M) secondo gli assi x,y,z della ter na di riferimen to adottata pren dono nome di

caratteristiche della sollecitazione interna e si definiscono rispettivamente:

R sforzo di taglio secondo x ;

R sforzo di taglio secondo y;

R sforzo normale ;

M, momento flettente relativo ad x;

 M_{v} momento flettente relativo ad y;

M momento torcente .

Nel caso di travi piane, risultando $R_x = M_y = M_z = 0$ le caratteristiche della sollecitazione interna si riducono alle sole, R_y , R_z , M_x e si indicano rispettivamente con le lettere T,N,M:

R = T sforzo di taglio

R = N stonzo normale

M, = M momento flettente

Per le travi piane le caratteristiche della sollecitazione interna si definiscono pertanto come segue:

SFORZO DI TAGLIO in una sezione é la componente, se

fig.15.5

condo la normale all'asse della tra ve, della risultante di tutte le forze che precedono o seguono la sezione. Si indica con la lettera T e si assume

positivo quando é diretto nello stesso verso dello asse y sulla sezione di normale z positiva, ov vero come indicato in figura 15.5.

SFORZO NORMALE in una sezione é la componente secon

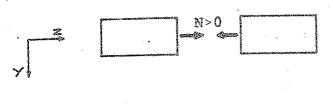
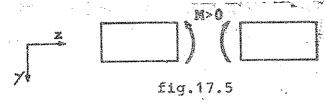


fig.16.5

do l'asse della trave della risultante di tut te le forze che precedono o seguono la sezione. Si indica con la lettera N

e si assume positivo se di trazione, ovvero se concorde all'asse z sulla sezione di normale positiva, ovvero come indicato in fig.16.5.

MOMENTO FLETTENTE in una sezione & il momento risul-



tante rispetto
al baricentro
della sezione di
tutte le forze
e/o coppie che
precedono o seguono la sezione.

Si assume positivo se il vettore momento risultante sulla sezione di normale positiva é equiverso allo asse x ovvero come indicato in fig.17.5.

V.6) VINCOLI

I vincoli, come si é già detto collegano gli elementi (travi) costituenti una struttura, fra loro e con il suolo.

Nel caso di strutture piane per le quali ogni elemento possiede tre gradi di libertà, i vincoli si definiscono:

semplici se impediscono un solo grado di libertà e ne consentono due

doppi se impediscono due gradi di libertà e ne consentono uno

tripli se impediscono tutti e tre i gradi di libertà, non consentendone alcuno. I vincoli si distinguono in :

VINCOLI ESTERNI

Vincolano parti della struttura con l'esterno, ovve ro con il suolo, limitando in tutto o in parte gli spostamenti assuluti che l'elemento vincolato può compiere; nel caso di travi piane, assegnato un riferimento x,y,z i vincoli esterni si oppongono agli spostamenti esplicando le seguenti reazioni:

- R (forza nella direzione y) se sono impedite le traslazioni secondo tale direzione
- R_z (forza nella direzione z) se sono impedite le traslazioni secondo tale direzione
- M (coppia il cui vettore momento é parallelo allo asse x) se sono impedite le rotazioni attorno ad assi paralleli ad x.

Si schematizzano nella tabella che segue i vincoli esterni con riferimento ai gradi di libertà impediti e consentiti ed alle reazioni vincolari esplicate, nell'ipotesi di piccoli spostamenti e di sistemi piani.

tipo	DENOMINAZIONE	en de recht militaint des entre concesses.	Carlotter to the carlot
SEMPLICE	PENDOLO SEMPLICE CARRELLO	$S_{y} = 0$ $S_{z} \neq 0$ $\phi_{x} \neq 0$	$R_{y} \neq 0$ $R_{z} = 0$ $M = 0$
SENPLICE	DOPPIO DOPPIO PENDOLO	$S_{y} \neq 0$ $S_{z} \neq 0$ $\phi_{x} = 0$	R = 0 y = 0 Z = 0 M ≠ 0
DOPPIO	FR ARECENIERA	S _y = 0 S _z = 0 \$ _z 0 \$	R _y ≠ 0 R _z ≠ 0 M _x = 0
DOPPIO	DOPPIO PENDOLO INCASTRO SCORREVOLE	S _y = 0 S _z ≠ 0 φ = 0	$R_{y} \neq 0$ $R_{z} = 0$ $M_{x} \neq 0$
TRIPLO	Mx Ry Mx Ry INCASTRO	S = 0 S = 0 \$ z = 0	R _y ≠ 0 R _z ≠ 0 M _x ≠ 0

and the state of the first of the control of the co

VINCOLI INTERNI

Vincolano parti della struttura fra loro, limitando in tutto o in parte gli spostamenti relativi fra le sezioni vincolate; nel caso di travi piane, assegna to un riferimento x,y,z i vincoli interni si oppongono agli spostamenti trasmettendo le seguenti caratteristiche della sollecitazione interna:

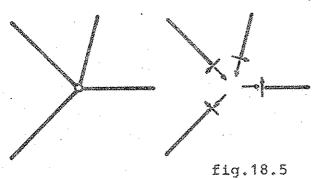
- T (sforzi di taglio) se fra le sezioni vincolate sono impedite le traslazioni relative nella direzione dell'asse y
- N (sforzi normali) se fra le sezioni vincolate so no impedite le traslazioni relative nella direzione dell'asse z
- M (momenti flettenti) se fra le sezioni vincolate sono impedite le rotazioni relative attorno ad assi paralleli ad x.

Si schematizzano nella tabella che segue i vincoli interni con riferimento ai gradi di libertà impediti e consentiti ed alle reazioni vincolari esplicate, nell'ipotesi di piccoli spostamenti e sistemi piani.

tipo	DENOMINAZIONE	er en	
<u>ا</u>	T	∆s _y = 0	T # 0
SEMPL ICE	T PENDOLO SEMPLICE	$\Delta s_z \neq 0$ $\Delta \phi_x \neq 0$	N = 0
		Δs _y ≠ 0	T = 0
SEMPL ICE	PENDOLO SEMPLICE	$\Delta s_{Z} = 0$ $\Delta \phi_{X} \neq 0$	N ≠ 0 M = 0
		Δs _y ≠ 0	Section Water Contract Contrac
SEMPL ICE	DOPPIO DOPPIO PENDOLO	$\Delta s_z \neq 0$ $\Delta \phi_x = 0$	N = 0
	DOPPIO PENDOLO	$\Delta s_y = 0$	
DOPPIO		$\Delta s_z \neq 0$ $\Delta \phi_x = 0$	N = 0
	r z N Hannett N	∆s _y ≠ 0	
D0PP10	DOPPIO PENDOLO	$\Delta s_{Z} = 0$ $\Delta \phi_{X} = 0$	N = 0
international desiration of the second		$\Delta s_y = 0$	
D0PP10	Y CERNIERA	$\Delta S_{Z} = 0$ $\Delta \phi \neq 0$	N ≠ 0

Esistono peraltro vincoli interni multipli che non collegano solo 2 ma t travi fra loro; i più comuni sono :

nodo cerníera che elimina s = 2(t-1) gradi di li-



berta ed esplica su ognuna delle t sezio ni vincolate una componente di sforzo tagliante ed una di sforzo normale (vedi fig. 18.5).

 $nodo\ incastro\ che\ elimina\ s=3(t-1)$ gradi di liber-

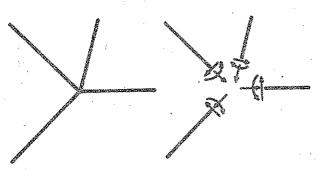


fig.19.5

tà ed esplica
su ognuna del
le t sezioni
vincolate una
componente di
sforzo taglian
te, una di sfor
zo normale ed
un momento (ve
di fig.19.5).

Meritano ancora una citazione a parte i vincoli misti che sono contemporaneamente interni ed esterni: sia nel computo dei gradi di libertà impediti che in quello delle reazioni vincolari esplicate si pos sono considerare come somma di un vincolo interno e di un vincolo esterno.

V.7) STRUTTURE LABILI, ISOSTATICHE, IPERSTATICHE DEFINIZIONI: una struttura si definisce:

LABILE se possiede un numero di gradi di libertà 1>0; l prende anche nome di ordine di labilità.

LABILE PER VINCOLI ESTERNI se questi, perché insufficienti o disposti male, non equivalgono almeno a seivincoli semplici esterni per le strutture spazia li e tre vincoli semplici esterni per le strutture piane.

LABILE PER VINCOLI INTERNI se, avendo soppresso i vincoli esterni, la struttura possiede ordine di la bilità 1>6 se spaziale, ovvero 1>3 se piana.

ISOSTATICA RISPETTO AD UNA COMPONENTE DI REAZIONE VINCOLARE se la soppressione del vincolo corrispondente conferisce alla struttura un grado di libertà; in tale caso la componente di reazione é ottenibile con le sole equazioni cardinali della statica.

ISOSTATICA se é non labile ed isostatica rispetto a tutte le componenti di reazioni vincolari.

ISOSTATICA PER VINCOLI INTERNI se, avendo soppresso i vincoli esterni, la struttura possiede soli sei gradi di libertà nello spazio, oppure tre nel piano ed é isostatica rispetto a tutte le reazioni vincolari interne.

ISOSTATICA PER VINCOLI ESTERNI se, considerando solidificati tutti i vincoli interni, la struttura r<u>i</u> sulta isostatica.

IPERSTATICA RISPETTO AD UNA COMPONENTE DI REAZIONE VINCOLARE se la soppressione del vincolo corrispondente non introduce nella struttura nuovi gradi di libertà.

IPERSTATICA se é iperstatica perlomeno rispetto ad una componente di reazione; si dice ordine o grado di iperstaticità i il numero di vincoli semplici che é necessario sopprimere perché la struttura divenga isostatica.

IPERSTATICA PER VINCOLI ESTERNI se considerando solidificati i vincoli la struttura risulta iperstat<u>i</u> ca. IPERSTATICA PER VINCOLI INTERNI se avendo soppresso i vincoli esterni la struttura risulta iperstatica almeno rispetto ad una reazione interna.

METODO ANALITICO

Si consideri una struttura costituita da t travi collegate tra loro e con il suolo mediante s vincoli semplici interni ed esterni.

Il metodo generale per classificare la struttura é quello di scrivere le equazioni cardinali della statica per ogni tronco nelle incognite reazioni vincolari e quindi discutere il sistema di equazio ni. Con riferimento a quanto detto nel paragrafo III.2) per il sistema scritto in forma matriciale si potranno verificare i seguenti casi :

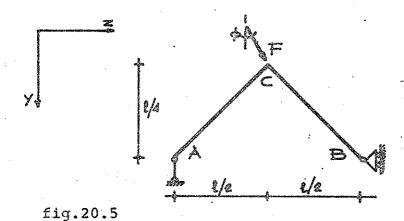
- p = m = n il sistema é compatibile ed ammette una sola soluzione: la struttura é in tal caso isostatica o labile ma in equilibrio sotto l'azione dei carichi esterni ed il valore delle reazioni incogni te é fornito dalla soluzione del sistema. In particolare se il sistema é compatibile per qualunque valore assunto dal vettore di carico |B| la struttura é isostatica, se cambiando il vettore |B| il sistema diviene incompatibile la struttura é labile ma in equilibrio.
- p = m < n il sistema é compatibile ed ammette control soluzioni : la struttura é in tal caso ipenstatica e per determinare la soluzione, ovvero il valore delle reazioni vincolari incognite, sarà necessario scrivere altre n-m equazioni di congruenza</pre>
 - p'= p < m eliminando m-p equazioni linearmente di pendenti si ottiene un sistema compati-

bile che rientra nei primi due casi esa minati: la struttura possiede cioé m-p vincoli supenflui (perché eliminano gra di di libertà già impediti da altri vin coli) ed é isostatica o labile ma in equilibrio se rientra nel primo caso ov vero iperstatica se rientra nel secondo caso.

p' > p < m il sistema é incompatibile : la struttu ra é labile.

A maggior chiarimento si riportano alcuni esempi per una struttura piana costituita da una sola tra ve.

I Esempio. Sia data la struttura vincolata e caricata come in figura 20.5.



Per il postulato fondamentale della Meccanica è possibile sostituire i vincoli con le reazioni vincola ri da essi esplicate, per cui si ottiene la struttura di fig.21.5 in tutto e pertutto equivalente alla precedente.

Perché la struttura libera sotto l'azione delle forze attive e vincolari sia in equilibrio devono essere soddisfatte le equazioni cardinali della statica:

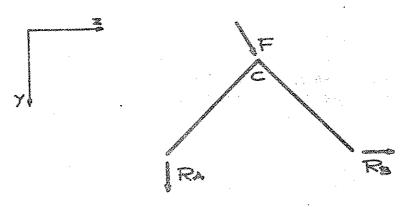


fig.21.5

equilibrio alla traslaz.orizzontale $R_B^+Fsen^{\varphi}=0$ equilibrio alla traslaz.verticale $R_A^+Fcos^{\varphi}=0$ equilibrio alla rotaz.attorno a C $R_A^{\frac{\ell}{2}}+R_B^{\frac{\ell}{4}}=0$

Tali equazioni, ordinate, si scrivono anche:

ed in forma matriciale :

$$\begin{bmatrix} O & 1 \\ 1 & O \\ \frac{\ell}{2} & \frac{\ell}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_A \\ R_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \operatorname{sen} \phi \\ -F \operatorname{cos} \phi \\ O \end{bmatrix}$$

Si osserva subito che il rango della matrice incom pleta p=2 é minore del numero di equazioni m=3; essendo il rango della matrice completa p'=3 mag giore di p, il sistema non ammette soluzioni : la struttura é labile ed infatti i vincoli ad essa ap plicati eliminano solo due dei tre gradi di libertà

posseduti dalla struttura.

II Esempio. Assegnata la struttura di fig.22.5 a) in tutto e per tutto equivalente alla b)

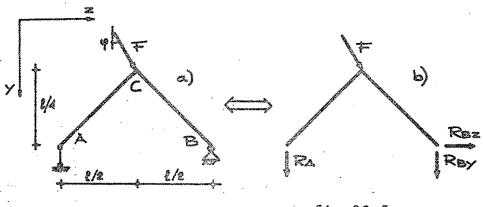
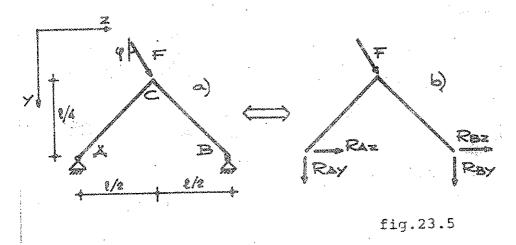


fig.22.5

il sistema di equazioni cardinali della statica che reggono il problema si scrive con notazione matriciale :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{2} & -\frac{2}{2} & \frac{2}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{A} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Fsen\phi \\ -Fcos\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice incompleta p=3 é pari al numero di equazioni m=3 e di incognite n=3: il sistema é dunque normale ed ammette una sola soluzione. Il sistema é dunque isostatico ed infatti i vincoli ad esso applicati sono in numero uguale ai gradi di libertà posseduti dalla struttura sup posta libera. La soluzione del sistema di equazioni fornisce i valori delle reazioni esplicate dai vincoli.

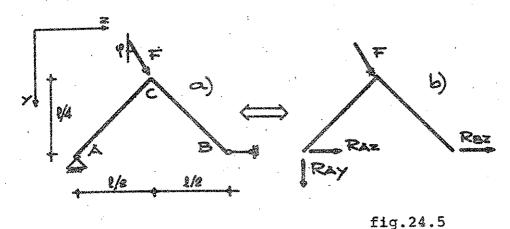


Le equazioni cardinali della statica per tale struttura con notazione matriciale, si scrivono :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\ell}{2} & \frac{\ell}{4} & -\frac{\ell}{2} & \frac{\ell}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{AY} \\ R_{AZ} \\ R_{BY} \\ R_{BZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Fsen\phi \\ -Fcos\phi \\ O \end{bmatrix}$$

In questo caso il rango della matrice incompleta é p=3 ed é uguale al numero di equazioni m=3, ma mi nore del numero di incognite n=4. Il sistema ammet te pertanto infinite soluzioni ed é dunque iperstatico: i vincoli applicati alla struttura sono sovrabbondanti rispetto ai gradi di libertà della struttura supposta libera. Perché la soluzione divenga determinata occorre scrivere un'altra equazione, questa volta di conghuenza.

IV Esempio.



Le equazioni cardinali della statica si scrivono in tal caso:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{4} & 0 & \frac{\lambda}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{AY} \\ R_{AZ} \\ R_{BZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \operatorname{sen} \phi \\ -F \operatorname{cos} \phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice incompleta p=2 é minore del numero di equazioni m=3 e minore anche del rango della matrice completa p'=3. La struttura é pertanto labile per cattiva disposizione dei vin coli pur essendo il numero di vincoli semplici uguale al numero di gradi di libertà della struttu ra libera.

V Esempio.

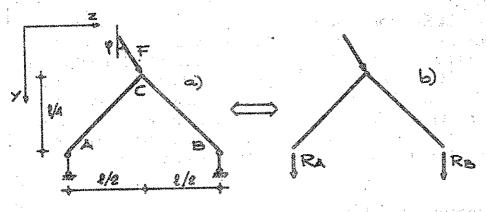


fig.25.5

Il sistema di equazioni che regge il problema si scrive, in forma matriciale :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ \frac{\ell}{2} & -\frac{\ell}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{A} \\ R_{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice incompleta p=2 é in effetti uguale al numero di equazioni m=2 ed al numero di incognite n=2 per cui il sistema ammette una sola soluzione. La trave dunque pur essendo labile (in quanto il numero di vincoli ad essa applicata é inferiore ai gradi di libertà della struttura supposta libera) risulta in equilibrio per la particolare condizione di carico ad essa applicata, ovvero risolubile mediante le tre equazioni cardina li della statica nel piano.

METODO CINEMATICO

Un metodo non analitico ma spesso più immediato per la classificazione delle strutture piane é quello di confrontare i 3½ gradi di libertà, pos seduti dalle ½ travi supposte libere che costitui scono la struttura, con gli ¼ vincoli semplici ad esse applicate: si ottiene in tale maniera la differenza fra i gradi di libertà L e gradi di iperstaticità ¿ posseduti dalla struttura

$$3t - s = l - i$$

Possono verificarsi i seguenti casi :

- 3t-5>0+l>i é condizione sufficiente ma non necessaria di labilità: la strut tura possiede cioé globalmente più gradi di labilità che di iperstati cità e si definisce perciò preva-lentemente labile; sotto l'azione di una sollecitazione esterna può assumere configurazioni diverse da quella iniziale.
- 3t-s<0+l<i é condizione sufficiente ma non ne cessaria di iperstaticità: la strut tura possiede cioé globalmente più gradi di iperstaticità che di labi lità e si definisce perciò prevalentemente iperstatica.
- $3\ell-\delta=0 \rightarrow \ell-\ell=0$ é condizione necessaria ma non sufficiente di isostaticità: la condizione é sufficiente solo se $\ell=i=0$, ché viceversa la struttura potrebbe possedere un egual numero di labilità e di iperstaticità senza essere però isostatica.

Le strutture che interessano il corso di STATICA sono solo quelle isostatiche o labili ma in equilibrio sotto l'azione dei carichi esterni.

Un metodo per sapere se una struttura possiede labilità é quella delle catene cinematiche.

V.8) - CATENE CINEMATICHE

Ogni vincolo, esterno od interno, come si é detto, consente alcuni spostamenti delle strutture colle gate e ne impedisce altri: gli spostamenti consentiti possono essere sempre riguardati come rotazioni intorno a centri di rotazione propri o impropri a secondo che si tratti di rotazioni propriamente dette o di traslazioni.

Si riportano di seguito i centri di rotazione ammes si dai più comuni vincoli esterni o interni:

pendolo semplice consente le rotazioni intorno ad un centro appartenente al la retta passante per il suo asse.

carrello consente le rotazioni intorno ad un cen

tro appartenente alla ret ta passante per la cernie ra e ortogonale al piano di scorrimento.

37 y m 1 78 -

doppio doppio pendolo consente le rotazioni intor no ad un centro all'infini to di qualunque direzione. cerniera consente le rotazioni intorno al proprio baricentro che é dunque il centro di rotazione.

<u>2</u>c

doppio pendolo consente le rotazioni intorno ad un centro all'infinito del la direzione dei pendoli.

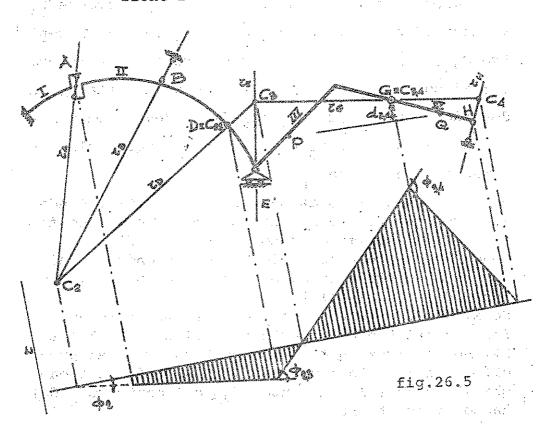
A secondo che i vincoli siano esterni od interni i centri sono centri di rotazioni assolute ovvero centri di rotazioni relative.

- Una struttura costituita da una sola trave vinco lata all'esterno é labile se tutti i vincoli ammet tono lo stesso centro di rotazione assoluta.
- Una struttura costituita da più travi vincolate all'esterno e fra loro é labile se tutti i centri di rotazione assoluti e relativi soddisfano le se guenti proprietà:
- 1) considerate due travi i e j, devono risultare allineati il centro $\mathcal{C}_{\hat{i}}$ di rotazione assoluto della trave i, il centro $\mathcal{C}_{\hat{j}}$ di rotazione assoluto della trave j ed il centro $\mathcal{C}_{\hat{i}\hat{j}}$ di rotazione relativa delle travi i e j,
- 2) considerate tre travi i,j,k devono risultare allineati il centro di rotazione relativa \mathcal{C}_{ij} delle travi i e j, il centro di rotazione relativa \mathcal{C}_{jk} delle travi j e k, ed il centro di rotazione relativa \mathcal{C}_{ki} delle travi k e i.

Una struttura labile costituita da travi rigide prende il nome di catena cinematica.

Le proprietà delle catene cinematiche dianzi enuncia te consentono non solo di sapere se una struttura é labile ma anche di determinare i centri di rotazione incogniti e poter così tracciare i diagrammi delle componenti degli spostamenti secondo un'assegnata direzione; per una struttura avente n gradi di liber tà, i diagrammi suddetti saranno definiti a meno di n parametri.

Esempio: si voglia determinare per la struttura la bile in fig.26.5 il diagramma delle componenti degli spostamenti secondo la direzione r



Si determinano innanzitutto i centri di rotazione assoluti e relativi dividendo la struttura nei tron chi I, II, III e IV. Il I tronco essendo vincolato al suolo con un vincolo triplo é fisso e dunque il cen tro assoluto C, ed il centro relativo C, non esistono; il centro C dovendo appartenere contempora neamente alle rette $r_{\rm A}$ ed $r_{\rm B}$ si trova sulla loro $i\underline{n}$ tersezione; il centro C2.3 coincide col baricentro della cerniera D; il centro C3 deve appartenere al la retta r_E ma dovendo essere C₂,C₂₃,C₃ allineati, deve appartenere altresì alla retta r e dunque C3 si troverà sulla intersezione di r_{p} ed r_{p} ; il cen tro C3,4 coincide con il baricentro della cerniera G ; il centro C_{A} deve appartenere alla retta r_{H} ma dovendo essere C3,C34,C4 allineati deve appartenere altresì alla retta r e si troverà dunque sulla in tersezione di r_c ed r_H.

Noti i centri di rotazione li si proietta secondo la direzione r su di una fondamentale ortogonale ad r. Il diagramma cercato é quello in figura dovendo avere ordinate nulle in corrispondenza dei centri assoluti e rotazioni relative in corrispondenza dei centri relativi.

Se si vuole conoscere poi lo spostamento relativo fra i punti P e Q, appartenenti ai tronchi III e IV, nella direzione \overline{PQ} , esso é fornito dal prodotto fra la rotazione relativa ϕ_3 , ϕ_4 fra i tronchi III e IV e la distanza ϕ_3 , ϕ_4 del centro ϕ_3 dal la congiungente \overline{PQ} .

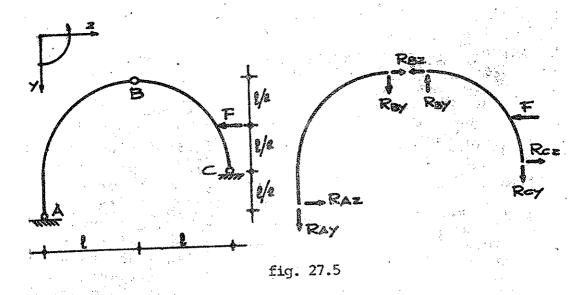
V.9) - RICERCA DELLE REAZIONI VINCOLARI

Si persegue imponendo l'equilibrio dell'intera struttura o di parti di essa sotto l'azione delle sollecitazioni esterne e delle reazioni vincolari.

DETERMINAZIONE ANALITICA DELLE REAZIONI VINCOLARI Nel caso più generale di struttura piana costituita da t travi, si possono scrivere 3t equazioni di equilibrio; se la struttura é isostatica si otterrà un sistema di 31 equazioni nelle 3t reazioni incognite. Con notazione matriciale il sistema si presenterà nella forma : [A] [X] = [F] in cui [A] é la matrice dei coefficienti che dipende dalla sola geometria della struttura ed é indipendente dalla condizione di carico; [X] é il vettore incognito, ovvero la matrice colonna delle reazioni vincolari incognite; [F] é il vettore di carico ovvero la ma trice colonna dei carichi applicati. E' importante osservare come, affrontando il calcolo in via matri ciale, sia possibile studiare la medesima struttura sotto l'azione di più condizioni di carico differen ti, e ciò invertendo una sola volta la matrice [A] e cambiando di volta in volta il solo vettore di ca rico [F]: infatti essendo la soluzione data nella forma [X] = [A] 1 [F] al variare delle condizioni di carico cambierà la sola [F] e la soluzione si otterrà operando il nuovo prodotto [A]-1[F] avendo inver tito una sola volta la [A].

Quando non si cerchino tutte le reazioni vincolari della struttura ovvero quando sia elevato il numero di equazioni del sistema è possibile in alcuni casi esprimere le condizioni di equilibrio in modo da ottenere più sistemi ognuno dei quali con ridotto numero di equazioni e di incognite.

Esempio: volendo determinare le reazioni vincolari



della struttura ad arco riportata in fig.27.5, fis sato un riferimento cartesiano, una convenzione po sitiva per i momenti, e sostituiti i vincoli con le reazioni vincolari incognite da essi esplicabili (cui sia stato attribuito un verso arbitrario), si può operare secondo due differenti metodi:

I) Si scrivono le equazioni di equilibrio alla tra slazione orizzontale e verticale ed alla rotazio ne attorno al punto B per i due tratti costituen ti la struttura

Se ne ottiene un sistema di sei equazioni nelle sei reazioni vincolari incognite che in forma matriciale

si scrive :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell & \frac{3}{2}\ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\ell & \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{AY} \\ R_{AZ} \\ R_{BY} \\ R_{BZ} \\ R_{CY} \\ R_{CZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ \frac{\ell}{2} \end{bmatrix}$$

II) Si scrivono le equazioni di equilibrio in modo tale da ottenere tre sistemi, ognuno di due e- quazioni in due incognite:

Equilibrio del tratto AB attorno a B
$$R_{AY}^{\ell+R}_{AZ} = 0$$
 Equilibrio del tratto AC attorno a C $R_{AY}^{\ell+R}_{AZ} = 0$ Equilibrio del tratto BC attorno a B $R_{CZ}^{\ell-R}_{CY}^{\ell-R}_{-F} = 0$ Equilibrio del tratto AC attorno a A $R_{BZ}^{\ell-R}_{-R} = 0$ Equilibrio del tratto AB attorno a A $R_{BZ}^{\ell-R}_{-R} = 0$ Equilibrio del tratto AB attorno a C $R_{BZ}^{\ell-R}_{-R} = 0$ Equilibrio del tratto BC attorno a C $R_{BZ}^{\ell-R}_{-R} = 0$

ed in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 2 \ell & \frac{\ell}{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} R_{AY} \\ R_{AZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{F\ell}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ell & -\ell \\ \frac{\ell}{2} & -2\ell \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} R_{CZ} \\ R_{CY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F\ell}{2} \\ -F\ell \end{bmatrix}$$

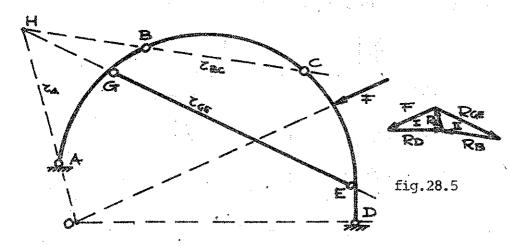
$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\ell & -\ell \\ \ell & -\ell \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} R_{BZ} \\ R_{BY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{F\ell}{2} \end{bmatrix}$$

Come si vede mentre nel primo caso é necessario operare su matrici di ordine 6x6 e 6x1 nel secondo caso ci si limita ad operare su matrici di ordine 2x2 e 2x1. Tale semplificazione dipende dalla scelta delle equazioni di equilibrio ma non è sempre possibile. In ogni caso la risoluzione dei sistemi fornisce le reazioni incognite in modulo e verso: in particolare per ogni reazione il verso arbitrariamente prefissato è quello giusto se il risultato è un numero positivo, l'opposto se il risultato è un numero negativo.

DETERMINAZIONE GRAFICA DELLE REAZIONI VINCOLARI.

Si persegue imponendo che le sollecitazioni esterne e le reazioni vincolari dell'intera struttura o di parti di essa, costituiscono un sistema di vettori avente poligono dei vettori e poligono funicolare chiuso.

A titolo di esempio si riportano alcune strutture risolte graficamente: I Esempio.



Per l'equilibrio del tronco BC le reazioni R ed R devono costituire un sistema di vettori equivalente a zero e cioé una coppia di braccio nullo; la retta di applicazione dei due vettori, supposti non nulli, deve essere perciò congiungente BC; per l'equilibrio del tronco AB, nota la direzione di R_p e quella di R_G, la retta di applicazione della R_A dovrà necessa riamente passare, oltre che per A per il punto H in tersezione di $R_{\overline{B}}$ ed $R_{\overline{G}}$ e ciò perché dovendo avere momento risultante nullo i vettori R, R, R, devono passare per lo stesso punto. Per l'equilibrio del tronco CD le forze R_C, F, R_E, R_n devono costituire un sistema di vettori equivalenti a zero; la R_{C} ha retta di applicazione r_{RC} , la R ha retta di applicazione r la loro risultante ha come retta di applicazione la r ; essendo nota al tresì la direzione di F, la R dovrà essere applicata alla retta passante per D e per il punto O di intersezione di r_{A} e della retta di applicazione di F. Note le direzioni di tutte le reazioni si determina no moduli e versi dei vettori incogniti costruendo i poligono di equilibrio: portando le parallele a $\mathbf{r}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{r}}$ ed $\mathbf{r}_{\mathbf{D}}^{\mathbf{r}}$ per gli estremi del vettore F si individua no RA e RD: tracciando per gli estremi di RA le pa rallele ad r_{GE} e ad r_{BC} si ottengono la R_{G} e la rea zione che il vincolo B esercita sul tronco AB. Il I poligono esprime l'equilibrio dell'intera strut tura, il II poligono esprime l'equilibrio del tratto

AB.

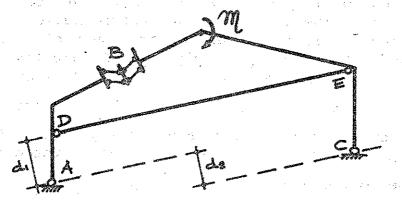
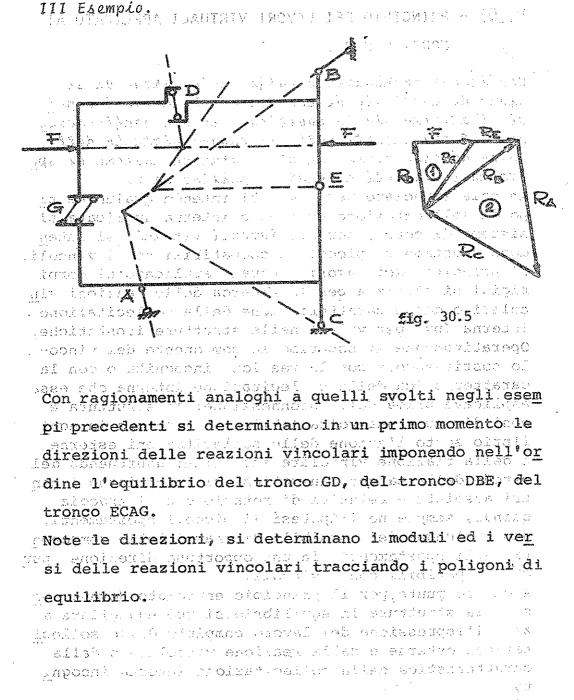


fig. 29.5

Per l'equilibrio del tronco AB la R_A e la R_D devono costituire una coppia uguale e contraria alla M_B esplicata dal vincolo B: la R_A ha perciò direzione parallela a DE passante per A; per l'equilibrio del l'intera struttura anche R_C avrà direzione parallela ad R_A , passante per C: dovendo R_A ed R_C costituire una coppia uguale e opposta ad M esse avranno modulo $R_A = -R_C = \frac{M}{d_2}$ e versi tali da opporsi ad M. Per l'equilibrio alla traslazione del tronco AB sarrà $R_D = -R_A$, per l'equilibrio alla rotazione dello stesso tronco $M_B = -R_A \cdot d_1 = -\frac{M}{d_2} \cdot d_1$.



odnogyoti ó

Lovidsý

boni alca el enusimos estade reus attribuitole infrialments

on o oviduand alk orgen la esp with the S

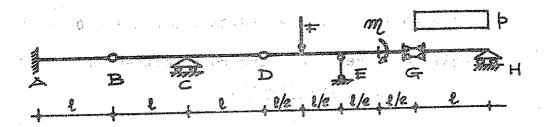
V.10) - PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI APPLICATO AI CORPI RIGIDI.

Condizione necessaria e sufficiente perché un sistema di corpi rigidi con vincoli bilaterali e pri vi di attrito sia in equilibrio in una configurazio ne C, è che risulti nullo il lavoro virtuale delle horze ad esso applicate per qualunque insieme di spo stamenti virtuali compiuto a partire da C. In tale enunciato per forze si intende qualunque ti po di sollecitazione esterna o interna applicata al sistema di corpi, per spostamenti virtuali si inten dono spostamenti piccoli e compatibili con i vincoli. Il principio dei lavori virtuali applicato ai corpi rigidi si utilizza per la ricerca delle reazioni vin colari o delle caratteristiche della sollecitazione interna (una per volta) nelle strutture isostatiche. Operativamente si sopprime la componente del vincolo sostituendola con la reazione incognita o con la caratteristica della sollecitazione interna che essa esplicava prima della sconnessione: la struttura é così divenuta una volta labile, ma é ancora in equi librio sotto l'azione delle sollecitazioni esterne e della reazione vincolare incognita; usufruendo del metodo delle catene cinematiche si determinano i cen tri assoluti e relativi di rotazione e si traccia quindi, sempre nell'ipotesi di piccoli spostamenti, uno qualunque dei possibili diagrammi delle componen ti degli spostamenti, in una opportuna direzione, pur ché compatibili con i vincoli.

A questo punto per il principio enunciato, dovendo es sere la struttura in equilibrio, si può eguagliare a zero l'espressione del lavoro compiuto dalle solleci tazioni esterne e dalla reazione vincolare o dalla caratteristica della sollecitazione interna incognita.

L'equazione che così si scrive contiene la sola incognita cercata con il verso attribuitole inizialmente o l'opposto a seconda che il segno sia positivo o negativo.

I Esempio: si voglia determinare, per la struttura in fig.31.5 supposta costituita da travi rigide e vincoli bilaterali e privi di attrito, la reazione R col principio dei lavori virtuali



majore for each foreign and life in the government of the companies of the

Essendo il carrello in C un vincolo semplice, si so stituisce con la reazione incognita da esso esplica ta assegnandone arbitrariamente il verso; per la struttura divenuta così labile si determinano i cen tri di rotazione e si traccia, un possibile diagram ma di spostamenti virtuali (vedi fig.32.5)

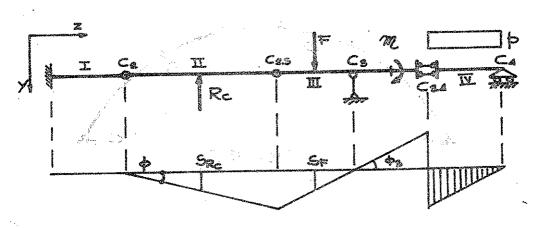


fig. 32.5

Il lavoro compiuto dalle sollecitazioni esterne e dalla reazione incognita si scrive :

$$L = -R_{C} \cdot S_{RC} + F \cdot S_{F} - m_{\phi_3} + \int_{\ell} p \ s(z) dz$$

e nell'ipotesi di piccoli spostamenti :

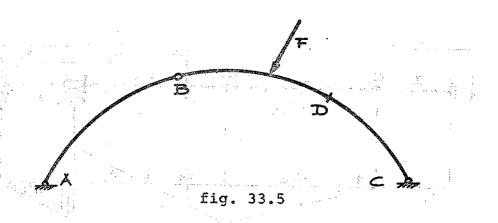
$$L = -R_C \cdot \phi \cdot \ell + F \cdot \phi \cdot \ell - M \cdot 2\phi + p \cdot \phi \cdot \ell \cdot \ell = 0$$

uguagliando a zero tale lavoro si ottiene :

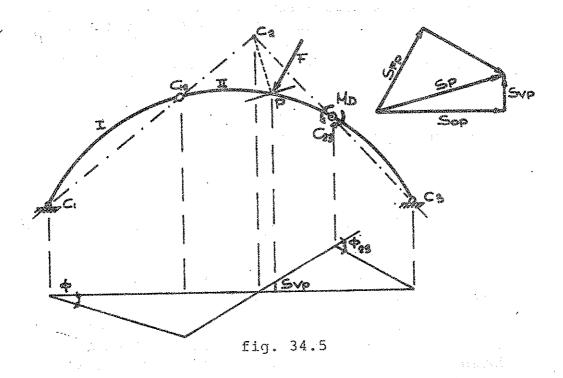
$$R_{C} = \frac{-2m[+Fl+pl^{2}]}{l}$$

Come si nota il risultato é indipendente dall'angolo ϕ scelto per tracciare il diagramma di spostamenti virtuali.

II Esempio: ancora nelle ipotesi precedenti si voglia calcolare per la struttura in figura 33.5 il momento flettente nella
sezione b.



Si introduce in tale sezione una sconnessione ovvero un vincolo interno doppio tale che non trasmetta il momento flettente, cioé una cerniera propria ed applichiamo alle sezioni sconnesse la caratteristica momento M che si trasmetteva prima della sconnessione: la struttura é divenuta così labile ma avendo supposto di applicare in D proprio i momenti flettenti che si trasmettevano prima della sconnessione la struttura é ancora in equilibrio. Con l'ausilio del metodo delle catene cinematiche si traccia quindi un possibile diagramma di spostamenti virtuali ad esempio quello delle componenti verticali degli spostamenti (vedi fig.34.5)



Si scrive quindi l'espressione del lavoro compiuto dalle coppie M_D per la rotazione relativa ϕ_2 , 3

dalla forza F per la componente $S_{\overline{FP}}$ dello spostamento di P nella direzione di F

$$L = -F \cdot S_{FP} + M_D \cdot \phi_{2,3}$$

Uno dei modi di operare per ottenere $^{S}_{\mathrm{FP}}$ é quello di ricavare prima $^{S}_{\mathrm{P}}$, effettivo spostamento di P, che nelle ipotesi fatte avviene in direzione ortogonale alla congiungente il centro C, con il punto P: si portano dunque per gli estremi del vettore $^{S}_{\mathrm{VP}}$, componente verticale di $^{S}_{\mathrm{P}}$, le parallele alla direzione di $^{S}_{\mathrm{P}}$ ed alla direzione orizzontale. Noto $^{S}_{\mathrm{P}}$, le parallele condotte per i suoi estremi alla direzione di F ed alla direzione ortogonale ad F fornisce $^{S}_{\mathrm{FP}}$.

L'espressione del lavoro eguagliata a zero forze :

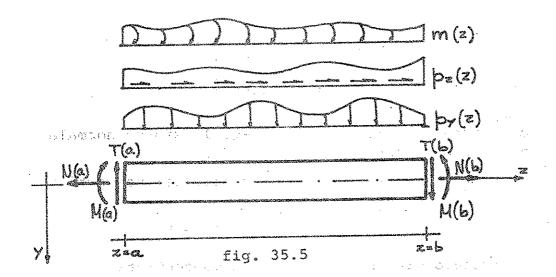
$$M_{D} = \frac{F \cdot S_{FP}}{\phi_{2,3}}$$

nella quale vanno esplicitati $S_{FP} = \phi_{2,3}$ in funzione di ϕ .

V.11) - DIAGRAMMI DELLE CARATTERISTICHE DELLA SOLLE-CITAZIONE INTERNA.

RELAZIONI FRA CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE INTERNA E SOLLECITAZIONI ESTERNE.

Si consideri una qualunque struttura caricata nel modo più generale possibile, forze orizzontali p_z(z), forze verticali p_z(z) e coppie flettenti m_f(z) ripartite con legge qualunque lungo l'asse z della trave, e si pensi di isolare un tronco di trave di lunghezza (b-a): le sollecitazioni ad esso applicate sono allora le sollecitazioni esterne e le caratteristiche della sollecitazione interna che si trasmettevano prima di operare i tagli nelle sezioni a e b (vedi fig.35.5.).



Dovendo essere il tronco di trave in equilibrio, do vranno essere soddisfatte le equazioni cardinali del la statica:

- Equazione di equilibrio alla traslazione orizzonta le:

$$N(b) - N(a) + \int_{a}^{b} p_{z}(z) dz = 0$$

ma essendo, in assenza di forze concentrate

$$N(b)-N(a) = \int_{a}^{b} \frac{dN(z)}{dz} dz$$

si può scrivere

$$\int_{a}^{b} \left(\frac{dN(z)}{dz} + p_{z}(z) \right) dz = 0$$

e dovendo essere tale equazione soddisfatta per qua lunque valore dell'intervallo (a,b), ovvero per qua lunque tronco di trave, dovrà essere:

$$\frac{dN(z)}{dz} + p_z(z) = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$\frac{\mathrm{dN}(z)}{\mathrm{d}z} = -p_{z}(z)$$

equazione differenziale che lega lo sforzo normale al carico ripartito assiale $p_z(z)$

- Equazione di equilibrio alla traslazione vertica le:

$$T(b) - T(a) + \int_{a}^{b} p_{y}(z) dz = 0$$

ed essendo, in assenza di forze concentrate

$$T(b) - T(a) = \int_a^b \frac{dT(z)}{dz} dz$$

si può scrivere

$$\int_{a}^{b} \left(\frac{dT(z)}{dz} + p_{y}(z) \right) dz = 0$$

e con ragionamenti analoghi al caso precedente

$$\frac{dT(z)}{dz} + p_{y}(z) = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$\frac{dT(z)}{dz} = -p_{y}(z)$$

equazione differenziale che lega il taglio al cari co ripartito tagliante $p_{v}(z)$.

 Equazione di equilibrio alla rotazione attorno al punto di ascissa z=a

$$M(b) - M(a) - (b-a)T(b) - \int_{a}^{b} m_{f}(z) dz - \int_{a}^{b} p_{y}(z) (z-a) dz = 0$$

ed essendo in assenza di forze concentrate

$$M(b) - M(a) = \int_{a}^{b} \frac{dM(z)}{dz} dz$$

nonché:

$$- \int_{a}^{b} p_{y}(z) (z-a) dz = \int_{a}^{b} \frac{dT(z)}{dz} (z-a) dz =$$

$$= - \int_{a}^{b} T(z) dz + \left[T(z) (z-a) \right]_{a}^{b} = - \int_{a}^{b} T(z) dz + T(b) (b-a)$$

e sostituendo nella prima equazione si ha:

$$\int_{a}^{b} \left[\frac{dM(z)}{dz} - m_{f}(z) - T(z) \right] dz + T(b) (b-a) - T(b) (b-a) = 0$$

da cui :
$$\frac{dM(z)}{dz} = m_f(z) = T(z)$$

Quando, come in genere accade $m_f(z)=0$ si ha:

$$\frac{\mathrm{dM}(z)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{T}(z)$$

equazione differenziale che lega le caratteristiche interne flettente e tagliante. Dalle relazioni :

$$\frac{dM(z)}{dz} = T(z)$$
 e $\frac{dT(z)}{dz} = -p_y(z)$

si ricava altresì l'equazione differenziale che lega il momento flettente al carico ripartito taglian te p $_{y}(z)$ size in the distribution of the

$$\frac{d^2M(z)}{dz^2} = -p_V(z)$$

DETERMINAZIONE ANALITICA DEI DIAGRAMMI

Consiste nel determinare la funzione che esprime la legge di variabilità della caratteristica cercata. In particolare, fissato un sistema di riferimento, si determinano le reazioni vincolari e si sostituiscono ai vincoli applicati; per la trave libera in equilibrio sotto l'azione delle sollecitazioni estene e delle reazioni vincolari si può scrivere la espressione della caratteristica cercata in corrispondenza della generica ascissa z: il diagramma cercato sarà rappresentato da una funzione continua per ogni tratto di trave compreso fra due sollecitazioni concentrate, in corrispondenza delle quali si verifi cheranno le discontinuità.

Esempío: per la trave in fig.36.5 si vogliano le funzioni momento flettente e taglio

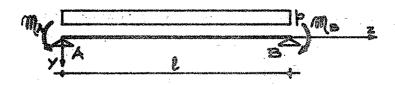


fig. 35.5

Le equazioni cardinali della statica porgono:

$$R_{A} = \frac{p!}{2} + \frac{M_{A} - M_{B}}{2}$$

$$R_{B} = \frac{p!}{2} - \frac{M_{A} - M_{B}}{2}$$

La trave sottoposta alle sollecitazioni esterne ed alle reazioni vincolari è ancora in equilibrio (ve di fig.37.5)

Walls all passing

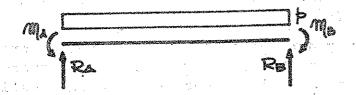


fig. 37.5

Il momento flettente nella generica sezione di ascis sa z vale:

sa z vale:

$$M(z) = R_A z - M_A - \frac{pz^2}{2} = -\frac{pz^2}{2} + (\frac{p\ell}{2} + \frac{M_A - M_B}{\ell})z - M_A$$

Il taglio nella generica sezione di ascissa za va-

le: $T(z) = R_A - pz = -pz + \frac{p\ell}{2} + \frac{m_A - m_B}{\ell}$

Le espressioni testé scritte si dicono anche espres sioni conrenti del momento e del taglio all'ascissa z.

Qualche considerazione :

military

- la funzione momento é quadratica e ciò si poteva desumere direttamente dalla relazione

$$\frac{d^2M(z)}{dz^2} = -p_y(z) ;$$

- la funzione taglio é lineare come si poteva già desumere dalla relazione $\frac{dT(z)}{dz} = -p_y(z)$ e poteva

essere determinata anzicché in via diretta, derivando la funzione momento, e ciò in base alla relazione $\frac{dM(z)}{dz} = T(z)$.

- ancora in base a quest'ultima relazione la funzio ne M(z) presenterà un massimo all'ascissa z in cui attinge valore nullo la funzione T(z):

$$T(z) = 0 \rightarrow z_0 = \frac{R_A}{p} \rightarrow M_{max} = \frac{R_A}{2p} - \frac{M_A}{p}$$

TRACCIAMENTO GRAFICO DEI DIAGRAMMI PER TRAVI AD ASSE RETTILINEO

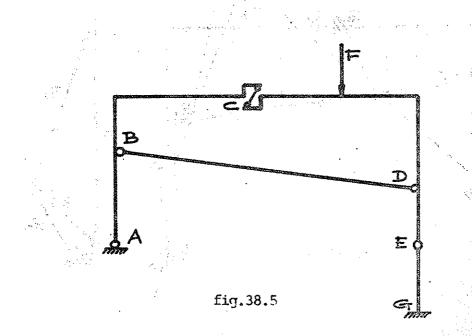
Si assume in genere come fondamentale del diagramma l'asse della struttura, le ordinate si riportano nor malmente ad essa e si leggono tutte nella medesima scala. Convenzionalmente le ordinate del momento flettente si riportano dal lato delle fibbre tese della trave, mentre le ordinate del taglio e dello sforzo normale si riportano al disopra o al disotto della fondamentale a seconda del segno positivo o negativo; in ogni caso i diagrammi devono essere sempre contraddistinti dal proprio segno.

Il tracciamento grafico dei diagrammi può essere e seguito in due modi :

- diagrammando le funzioni M(z), T(z), N(z) quando queste siano state già determinate analiticamente
- tracciando i diagrammi a maniera ossia qualitati vamente e ciò con considerazioni sulle relazioni differenziali esistenti fra caratteristiche della sollecitazione interna e sollecitazioni ester ne; in particolare:
 - l'inclinazione del diagramma del momento in una sezione é data dal taglio in quella sezione;
 - l'inclinazione del diagramma del taglio in una sezione é data dal carico tagliante nella sezione;
 - l'inclinazione del diagramma dello sforzo norma le in una sezione é dato dal carico assiale nel la sezione;
 - in corrispondenza di una coppia concentrata si riscontra un salto pari alla coppia nel diagram ma dei momenti mentre nel diagramma del taglio nulla varia;
 - in corrispondenza di una forza tagliante concen trata si riscontra una discontinuità angolare nel diagramma dei momenti ed un salto nel diagramma dei tagli, entrambi di valore pari alla forza applicata;

- quando alla trave é applicato un carico taglian te ripartito rappresentato da una funzione di or dine n il diagramma dei momenti é una curva di ordine n+2 e il diagramma del taglio é una cur va di ordine n+1;
 - in corrispondenza di una forza assiale concentrata si riscontra un salto nel diagramma dello sforzo normale;
 - quando alla trave é applicato un carico assiale ripartito rappresentato da una funzione di ordine n il diagramma degli sforzi normali é una curva di ordine n+1.

Esempio: per la struttura piana in fig.38.5 si traccino i diagrammi delle tre caratteri stiche della sollecitazione interna



La determinazione delle reazioni vincolari si può effettuare ad esempio graficamente e si possono sostituire i vincoli con le reazioni da essi esplica te (vedi fig.39.5. ove il poligono delle forze é riportato nella scala 4:1).

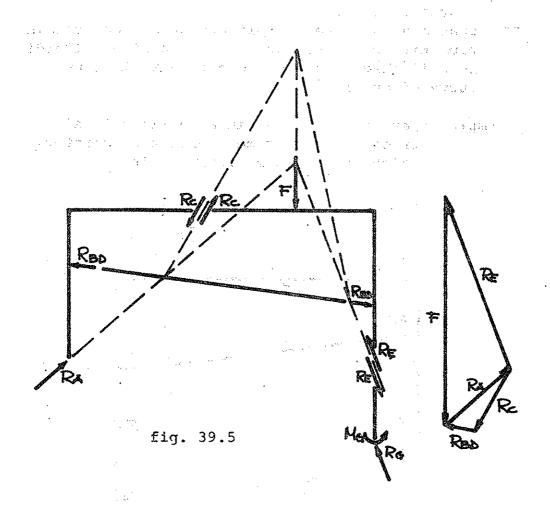
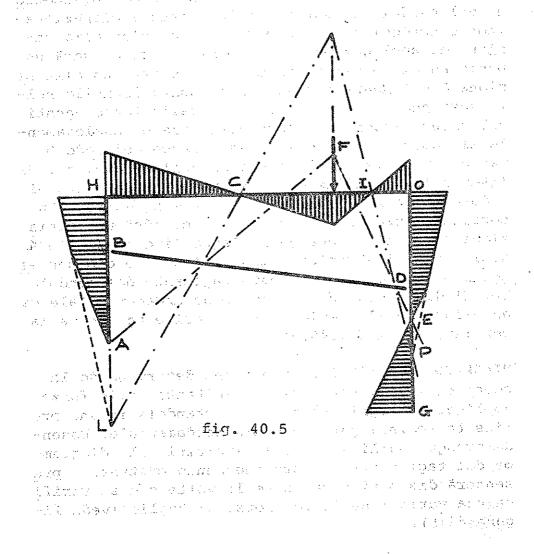


DIAGRAMMA DEI MOMENTI FLETTENTI: si può in questo caso tracciare prescindendo dalla scala che potrà essere fissata alla fine. Essendo ovunque nulli i carichi ripartiti, le leggi di variazione del momento saranno ovunque lineari. Iniziando il tracciamento dalla sezione A in cui il momento é nullo, si prosegue con la stessa legge fino a B dove la



presenza della reazione R_{BA} induce un punto angoloso

nel diagramma pari alla variazione di taglio. La legge di variazione del momento nel tronco BH é ta le da annullarsi nel punto L dove la risultante di R_{A} ed R_{BA} incontra l'asse della trave. Il momento, uquale sulle due facce del nodo H per l'equilibrio alla rotazione, prosegue con legge lineare lungo il tronco HC, annullandosi nella sezione di applicazio ne del pendolo e mantenendo la stessa inclinazione (non essendoci variazione di taglio) fino alla sezione di applicazione della forza F ove ci sarà un punto angoloso del diagramma. La legge fino alla se zione O é lineare e presenta un punto di nullo nella sezione in cui la risultante delle forze agenti sul tronco incontra l'asse della trave. Analogamente il momento, uguale sulle due facce del nodo O, varia con legge il cui punto di nullo è quello P di intersezione dell'asse della trave con la retta di azione della risultante delle forze R ed F. In corrispondenza della sezione D si avrà una varia zione di inclinazione della legge lineare uguale a quella che si verifica della sezione B e ciò per es sere lo stesso il contributo tagliante del pendolo BD. Il diagramma nel tratto DG ha andamento tale da annullarsi nella sezione in cui é applicata la E cerniera (vedi fig.40.5).

DIAGRAMMA DEI TAGLI: si ottiene determinando la componente tagliante della risultante delle forze applicate ad ogni tronco e riportandola in una prefissata scala a partire dalla fondamentale. Essendo ovunque nulli i carichi ripartiti, il diagramma del taglio avrà sempre andamento costante e presenterà discontinuità tutte le volte che si verifica una variazione dello sforzo di taglio (vedi figura 41.5).

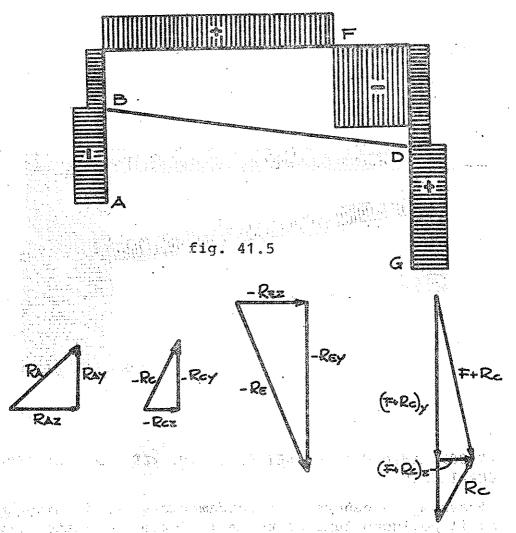
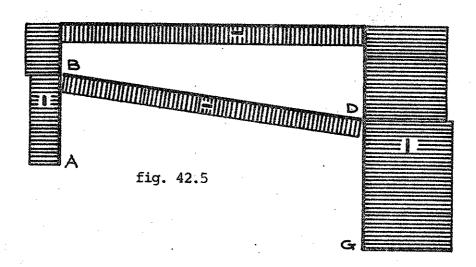


DIAGRAMMA DEGLI SFORZI NORMALI: si traccia determinando le componenti normali delle successive risultanti delle forze applicate ai singoli tronchi e riportandole in una prefissata scala a partire dalla fondamentale. Anche su questo caso il diagram ma avrà per tutti i tronchi andamento costante, es sendo nullo il carico ripartito applicato, e presenterà discontinuità tutte le volte che si verificheranno variazioni di sforzo normale (vedi fig.42.5).

人名英国西西加州美国克兰西部南南

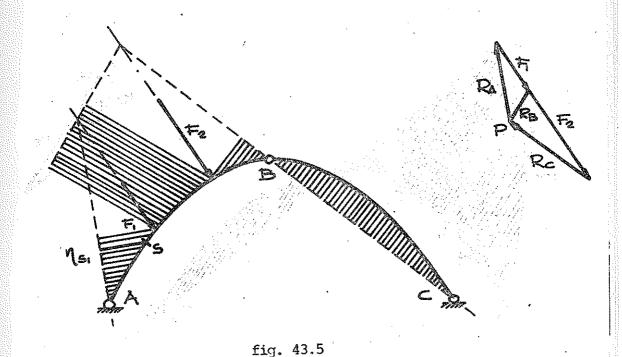
tual a la misjohama obelga kontikotok odala



TRACCIAMENTO GRAFICO DEI DIAGRAMMI PER TRAVI AD ASSE CURVILINEO.

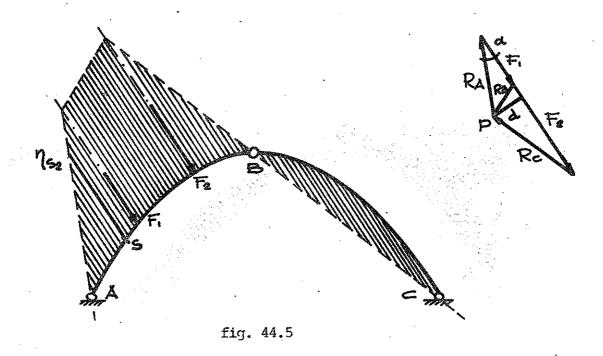
Si assume in genere come fondamentale per il diagram ma il poligono funicolare delle forze applicate alla struttura: le ordinate si riportano nonmalmente ai lati del poligono funicolare e si leggono in una sca la differente per ogni tratto. Solo nel caso in cui tutte le forze abbiano la stessa direzione é possibile adottare una scala unica, leggendo le ordinate parallelamente alla direzione delle forze. Nel segui to, per una struttura ad arco caricata con forze parallele, si tracciano i diagrammi dei momenti flettenti con i due metodi sopra descritti, avendo premesso il tracciamento del poligono funicolare e del poligono dei vettori:

I metodo :



Le ordinate del diagramma (vedi fig.43.5), riporta te ortogonalmente ai lati del poligono funicolare rappresentano, sezione per sezione, la distanza del la risultante delle forze che precedono o seguono la sezione, dalla sezione stessa. Tratto per tratto, dunque, le ordinate vanno moltiplicate per la risultante delle forze che precedono o seguono la sezione e lette nella scala delle lunghezze per la scala delle forze.

sinessore, a crostante de la compania del compania del compania de la compania del la compania de la compania del la comp



Dette η_{s1} ed η_{s2} rispettivamente le ordinate , nel primo diagramma (vedi fig. 43.5) e nel secondo diagramma (vedi fig.44.5), corrispondenti alla medesima sezione S risulta :

$$M = R_{A} \cdot \eta_{S1} \cdot S_{F} \cdot S_{L} = R_{A} \cdot \eta_{S2} \cdot \text{sen}\alpha \cdot S_{F} \cdot S_{L} =$$

$$= (R_{A} \text{sen}\alpha) \eta_{S2} \cdot S_{F} S_{L}$$

ma $R_{A} \sin \alpha$ é una quantità costante che rappresenta la distanza polare d. Le ordinate del diagramma dei momenti, tracciate parallelamente alla dire-

zione delle forze, si leggono tutte nella stessa scala ottenuta moltiplicando la distanza polare per la scala delle forze per la scala delle lun-

Per quanto riguarda i diagrammi dei tagli e degli sforzi normali essi possono costruirsi solamente per punti calcolandone i valori sezione per sezio

3.3

V.12) TRAVATURE RETICOLARI PIANE.

Sono particolari strutture piane costituite da tra vi generalmente rettilinee disposte secondo un reticolo e mutuamente vincolate da cerniere cilindriche il cui asse é ortogonale al piano della strut tura; le travi prendono nome di aste, le cerniere, che si suppongono prive di attrito, si dicono nodi. Quando tali strutture sono sollecitate esclusivamente in corrispondenza dei nodi (sollecitazione puramente nodale), se le aste sono rettilinee, es se risultano, per l'equilibrio, sollecitate dalla sola caratteristica sforzo normale : in questo ca so se lo sforzo esercitato dai nodi sulla asta é

di trazione, l'asta si definisce tirante, se invece lo sforzo eser •••• citato dai nodi sull'asta é di PUNTONE compressione, l'asta si defini--scerpuntone action of a second of manage of the director

Nel caso in cui la sollecitazione sia puramente nodale ma le aste non siano rettilinee, oppure nel caso in cui de aste siano rettilinee e le solleci tazioni non siano applicate solo in corrispondenza dei nodi ma anche lungo le aste, queste ultime non sono più sollecitate a solo sforzo normale ma anche a taglio ed a momento flettente; la stessa co sa si verifica altresì quando i vincoli interni non sono nodi cerniera ma nodi incastro. Benche lo studio delle travature reticolari piane possa essere affrontato con gli strumenti di calcolo generale validi per qualunque tipo di struttura, nel caso di travature con sollecitazione pu ramente nodale e nodi cerniera risulta conveniente adottare le metodologie di seguito esposte, par ticolarmente indicate per tali sistemi di travi.

METODO DEI NODI : consiste nell'imporre l'equilibrio di ogni nodo.

Analiticamente tale metodo si traduce nello scrivere, per ogni nodo sottoposto alle sollecitazioni esterne attive e reattive ed alle sollecitazio ni interne indotte dalle aste, le due equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale. Volendo risolvere la struttura globalmente, de terminando cioé contemporaneamente tutti gli sfor zi nelle aste e le reazioni vincolari esterne, é sufficiente scrivere le due equazioni di equilibrio per ogni nodo : se n sono i nodi della tra vatura si otterrà così un sistema di 2n equazioni nei 2n sforzi incogniti. Viceversa, scegliendo successivamente nodi nei quali non convergano più di due aste i cui sforzi siano incogniti, é possi bile, più semplicemente, risolvere n sistemi di 2 equazioni in 2 incognite.

Graficamente tale metodo consiste nell'imporre che il poligono delle forze agenti su ogni nodo sia chiuso, ovvero a risultante nulla. Essendo graficamente determinata la sola operazione di scomposizione di un vettore secondo due direzioni, il metodo é applicabile solo purché esista di volta in volta almeno un nodo nel quale non convergano più di due aste i cui sforzi siano incogniti.

Esempio: per la travatura reticolare (capriata semplice) in fig.45.5, una volta determinate le reazioni vincolari esterne R_A ed R_B, si é proce ceduto alla determinazione grafica degli sforzi nelle aste con il metodo dei nodi tracciando nel

l'ordine i poligoni di equilibrio dei nodi A ,

D , C , E . Ricordando che nelle ipotesi fatte
gli sforzi sulle cerniere hanno la direzione delle
aste, si può iniziare dal nodo A nel quale convergono solo due aste i cui sforzi sono incogniti:
il poligono di equilibrio della cerniera A si ottiene semplicemente conducendo per gli estremi del
vettore R le parallele alle aste AB e AD ed assegnando i versi per modo che il poligono risulti

chiuso. Gli sforzi N. ed N. così determinati

ను క అంకాఖశృ ఉంచికే⊞హ్ NAB raid in booter evarr sile: a figu **Ka**odaka 20 cayay NDE up chosicaen slist caustica NED rollion 💘 -noble le -Bursh st NEB -may file e continuação og a edwameniang four fig. 45.5 otaditios 15 tros.

rappresentano l'azione delle aste sul nodo per cui l'asta AB risulta essere un puntone e l'asta AD un tirante.

nting per 1 - osortata semplice 11 fig. 45.5.

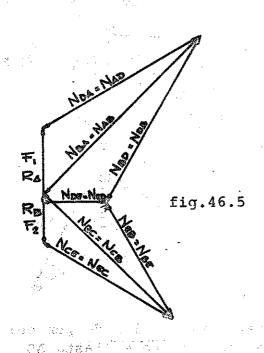
Si passa quindi al nodo D nel quale risultano in cogniti i soli sforzi nelle due aste DB e DE : co struito il poligono delle forze note NDA ed F1.

per l'origine e per l'ultimo estremo di esso si conducano le parallele alle aste DB e DE costruen do il poligono di equilibrio del nodo D : entrambe le aste DB e DE risultano essere tiranti.

In maniera analoga si procede per gli altri nodi. E' importante sottolineare che gli sforzi nelle aste determinati con tale metodo risultano esse-

METODO DI CREMONA: é un metodo grafico che consiste nel disegnare i poligoni di equilibrio di tut-

re sempre azioni delle aste sui nodi.



ti i nodi della trava tura in un'unica figu ra e ciò per ridurre gli errori grafici. Tale diagramma, che prende nome di cremo niano si costruisce fissando innanzitutto un verso di circolazione, tracciando quin di il poligono delle forze esterne nell'or dine in cui si incontrano lungo la struttura sequendo il verso di circolazione fissato, e costruendo successivamente i po ligoni di equilibrio dei nodi: s tos angasa Esemplo: in fig. 46:5 é riportato il cremo niano per la capriata semplice di fig.45.5.

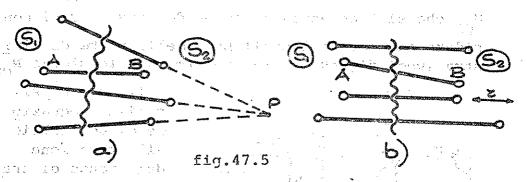
METODO DI RITTER: consente la determinazione ana litica degli sforzi, uno per volta. Data una travatura reticolare piana per determinare lo sforzo nella generica asta AB si procede come segue:

- si calcolano le reazioni dei vincoli esterni e si sostituiscono ad essi;
- si opera una sezione (sezione di Ritter) tale da dividere la travatura in due tronchi distinti S ed S tagliando un numero qualunque di aste in

modo tale però che tutte le aste sezionate, ad esclusione di quella nella quale si cerca lo sforzo, convergano in un punto proprio P (caso a) oppure in un punto improprio del piano (caso b);

 si applicano alle aste tagliate gli sforzi incogniti che esse trasmettevano prima di operare la sezione, fissandone arbitrariamente il verso;

 lo sforzo incognito N_{AB} si determina scrivendo per uno dei due tronchi in cui é stata suddivisa la struttura una equazione di equilibrio alla



rotazione intorno al polo P nel caso a) e una equazione di equilibrio alla traslazione nella direzione ortogonale ad r,nel caso b) (vedi fig. 47.5): in entrambi i casi si ottiene un'equazio ne di equilibrio in una sola incognita la NAB.

Esempio: assegnata la travatura reticolare in fig. 48.5 (trave Mohnie) si determinino con il metodo

di Ritter gli sforzi nelle aste CP e CD.

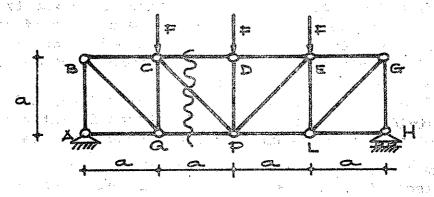
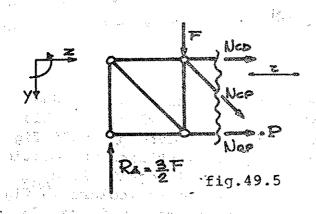


fig.48.5

Sostituiti i vincoli esterni con le reazioni che essi esplicano, si divide la travatura in due tron chi distinti mediante una sezione di Ritter che ta gli le aste CD, CP, QP, (si noti come in questo ca so particolare la medesima sezione consenta di determinare entrambi gli sforzi cercati). Si applica no quindi alle aste sezionate gli sforzi N_{CD}, N_{CP}, N_{CP} che si trasmettevano prima del taglio e si con sidera ad esempio l'equilibrio della parte di sini stra (vedi fig.49.5). Per determinare lo sforzo N_{CD}



nell'asta CD si scrive l'equazio ne di equilibrio alla rotazione del tronco di tra vatura, intorno al punto proprio P in cui concorro no le aste nelle quali non si desi derano conoscere gli sforzi

$$-\frac{3}{2} \cdot \mathbf{F} \cdot 2\mathbf{a} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{N}_{CD} \cdot \mathbf{a} = 0$$

La particolare scelta del polo consente come si ve de di fare comparire nell'equazione il solo sforzo cercato che vale:

$$N_{CD} = -2F$$

Il segno negativo indica che il verso dello sforzo trasmesso all'asta CD é opposto a quello arbitra-riamente assegnato inizialmente, dunque l'asta é compressa, cioé un puntone.

Per determinare lo sforzo normale NCP nell'asta CP

si scrive l'equazione di equilibrio alla traslazione ne nella direzione verticale, ortogonale cioé alla comune direzione delle aste nelle quali non interessano gli sforzi:

Since the contract of
$$\frac{3}{2} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} + \frac{\mathbf{N}_{CP}}{\sqrt{2}} = 0$$

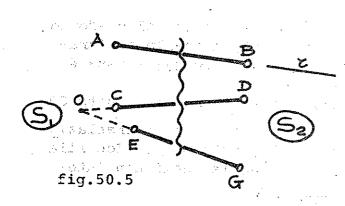
Anche in tale caso compare nell'equazione il solo sforzo cercato che vale :

. The equation of the plane is
$$N_{CP} = \frac{F}{(CP)^{-1}}$$
 is a second of the equation of the expression of the expression of the expression of the expression is a second of the expression in the expression is a second of the expression of the expression is a second of the expression of the expressi

Il segno positivo indica che il verso inizialmente adottato per lo sforzo è quello giusto e dunque la asta risulta essere un tirante.
Si noti come lo sforzo nell'asta CD si potesse de terminare anche con la sezione di Ritter secante le aste CD, DP, EP, PL.

METODO DI CULMANN: consente di determinare graficamente lo sforzo in tre aste contemporaneamente. Data una travatura reticolare piana, perché sia applicabile il metodo di Culmann é necessario che si possa operare una sezione (sezione di Culmann).

tale da dividere la struttura in due tronchi distinti tagliando solamente tre aste, ad esempio AB, CD, EG di fig.50.5. Detto O il punto proprio in cui concorrono due delle aste ed r la direzione del la terza asta, il metodo consiste nel ridurre gra



ma di forze attive e vincolari applicate ad uno dei due tronchi S, o S, ad una forza R, applicata al punto O ed una forza R, applicata alla retta r. La R, rappresenta lo sforzo N, nelliasta AB mentre la R, rappresenta la risultante de-

gli sforzi nelle altre due aste: per ottenere N_{CD} ed N_{EG} si dovrà scomporre la R_O nelle direzioni CD ed EG.

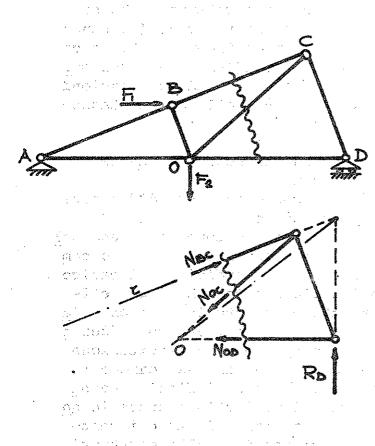
Esempio: per la travatura (shed) di fig.51.5 sono stati determinati gli sforzi nelle aste BC, OC, OD con il metodo di Culmann.

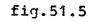
Determinate le reazioni R ed R e sostituite ai vincoli esterni si é divisa la struttura in due tronchi distinti con una sezione di Culmann tagliando le tre aste nelle quali si desiderano conoscere gli sforzi. Si é quindi ridotta l'unica sollecitazione esterna R al vettore N ed al

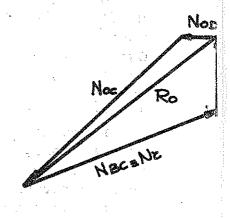
vettore R applicato nel punto O comune alle di rezioni degli altri due sforzi incogniti; il vet-

tore R , scomposto secondo le direzioni delle aste

OC e OD fornisce anche gli sforzi in tali travi.







in a service of the s

na de de la Francia de la Companya La Caractería de la Caractería d

in special property of the second second

 $+ (\lambda_{i_1}, \frac{1}{2}) (\lambda_{i_1}, \frac{1}{2})$

VI) - LINEE D'INFLUENZA

VI.1) DEFINIZIONI.

I carichi che sollecitano una struttura, come si é già detto al cap.V, possono essere fonze (in senso generalizzato e cioé forze propriamente dette o cop pie) oppure distonsioni: gli effetti che essi producono sono, in generale, spostamenti (traslazioni o rotazioni) e canattenistiche della sollecitazione interna.

I carichi a loro volta si dicono: {issi se sono applicati in una posizione unica e ben definita della struttura;

mobili o viaggianti se possono assumere differenti posizioni al variare del tempo.

Ogni sezione di una struttura sottoposta ad una sol lecitazione esterna risulta soggetta nel tempo sem pre agli stessi effetti se la condizione di carico é fissa, mentre se i carichi sono mobili gli effet ti prodotti, spostamenti o caratteristiche che sia no, assumono, in ciascuna sezione, valore differen te al mutare della posizione della sollecitazione sulla struttura ovvero al viaggiare del carico : ciò comporta che mentre per carichi fissi é possi bile conoscere gli effetti prodotti in tutte le se zioni contemporaneamente mediante il tracciamento dei diagrammi degli spostamenti e delle caratteri stiche, per condizioni di carico mobile (o viaggian te) é possibile esaminare gli effetti cercati solamente in una sezione per volta, essendo questi, per la medesima sezione, variabili, in generale, al va riare della posizione assunta dal carico.

E' allora immediato osservare come, indicando con:

F forze generalizzate

CAUSE

- Δ distorsioni
- δ spostamenti

C caratteristiche della sollecitazione interna

EFFETTI

il diagramma di un effetto indotto da una causa fissa, permette di conoscere l'effetto in tutte le sezioni della struttura per una sola posizione della causa sollecitante, mentre la linea d'influen za di un effetto, per causa viaggiante consente di conoscere l'effetto, in una sola sezione, per tutte le possibili posizioni che la causa sollecitante può assumere sulla struttura.

Data una struttura sottoposta ad un carico mobile (o viaggiante), che possa cioè essere applicato in qualunque sezione $S_{\hat{\mathcal{L}}}$, si definisce linea d'influen za di un effetto nella sezione S, un diagramma la cui generica ordinata, letta in corrispondenza del la sezione Si, rappresenta l'effetto cercato, che si verifica nella sezione S quando il carico é ap plicato in corrispondenza della sezione $S_{\hat{I}}$: la $1\underline{i}$ nea d'influenza definisce cioé, con le sue ordina te, tutti i valori che assume in S l'effetto cerca to a mano a mano che il carico occupa tutte le dif ferenti posizioni sulla struttura. In particolare le linee d'influenza vengono tracciate per carichi viaggianti unitari e ciò perché siano utilizzabili per quantunque valore assunto dal carico. The other in the second of the second second

VI.2) TRACCIAMENTO PER PUNTI.

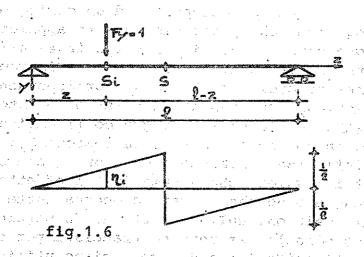
Sfruttando la definizione testé fornita é possibile determinare la linea d'influenza di un qualunque effetto nella sezione S di una struttura per carico viaggiante facendo assumere al carico diverse posizioni e determinando per ognuna di esse il valore dell'effetto cercato nella sezione S, valore che, assegnata una scala ed una fondamenta le, si riporta in corrispondenza della sezione di applicazione della forza: tale procedimento prende nome appunto di tracciamento per punti.

A titolo di esempio si voglia tracciare per la tra

A CHELLER CONTRACTOR OF CONTRACTOR CONTRACTOR OF THE CONTRACTOR

- 107 -

ve appoggiata di fig.1.6 la linea d'influenza del taglio nella sezione di mezzeria S per forza verticale viaggiante, ovvero si voglia conoscere il valore che la caratteristica della sollecitazione interna taglio assume nella sezione S quando una forza concentrata verticale F_y occupa tutte le possibili posizioni sulla trave.



Assunta la forza viaggiante F_y unitaria, e detta z l'ascissa della generica sezione S_i della tra ve, si calcolano i valori del taglio nella sezione S_i per alcune posizioni del carico; ad esempio

per
$$z=0$$
 risulta $T_s=0$
$$T_s=-\frac{1}{4}$$

$$T_{s=}-\frac{1}{4}$$

$$T_{s=}-\frac{1}{2}$$

$$T_{sd}=+\frac{1}{2}$$

$$T_{s}=-\frac{1}{4}$$

$$T_{s}=-\frac{1}{4}$$

Il diagramma che si ottiene riportando, in corrispondenza di ogni posizione Si assunta dalla for
za F_y=1 il valore del taglio nella sezione S per
tale posizione del carico, prende nome di linea
d'influenza del taglio in S per forza verticale

viaggiante: la generica ordinata ní, letta in corrispondenza della sezione Sí, rappresenta il valore del taglio nella sezione S quando la for za Fy=1 é applicata nella sezione Sí.
Più semplicemente, invece di calcolare il valore del taglio in S per un numero discreto di valori dell'ascissa z che definisce la posizione del carico si poteva determinare l'espressione corrente del taglio in funzione di z:

$$T(z) = \frac{1 \cdot z}{\ell}$$

che fornisce dunque analiticamente la linea d'influenza cercata.

Il tracciamento per punci, applicabile a strutture molto semplici, presenta però notevoli difficoltà di calcolo quando gli schemi non siano più elemen tari. Un procedimento facile e di uso comune per il tracciamento delle linee d'influenza é invece quello basato sull'applicazione del teorema di Betti generalizzato e prende nome di metodo di scambio.

VI.3) TEOREMA DI BETTI GENERALIZZATO.

Si consideri una struttura monodimensionale piana soggetta a due distinte condizioni di carico (vedi fig.2.6)

- condizione di carico 1) costituita dalla forza generalizzata $f_{\ell}^{(1)}$ e dalla distorsione $\Delta_{i}^{(1)}$ entrambe applicate nella sezione S_{ℓ} ;
- condizione di carico 2) costituita dalla forza generalizzata $f_j^{(2)}$ e dalla distorsione $\Delta_j^{(2)}$ entrambe applicate nella sezione S_j .

Il sistema di sollecitazioni 1) provocherà carat teristiche della sollecitazione interna e spostamenti in tutte le sezioni della struttura: indichiamo in particolare con $C_{j}^{(1)}$ e $\delta_{j}^{(1)}$ quelli indotti nella sezione S_{j} . Analogamente si possono

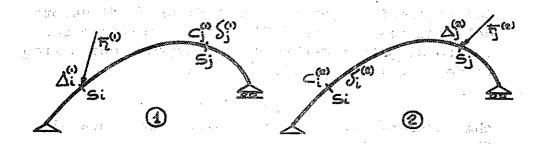


fig. 2.6

indicare con $C_{i}^{(2)}$ e $\delta_{i}^{(2)}$ le caratteristiche del la sollecitazione interna e gli spostamenti provocati nella sezione S_{i} dal sistema 2) di cause sollecitanti. Il teorema di Betti generalizzato afferma che : il lavoro che le forze $F_{i}^{(1)}$ e le caratteristiche della sollecitazione interna $C_{i}^{(1)}$ del primo sistema compiono rispettivamente per gli spostamenti $\delta_{i}^{(2)}$ e le distorsioni $\Delta_{i}^{(2)}$ del secondo, é uguale al lavoro che le forze $F_{i}^{(2)}$ e le caratteristiche $C_{i}^{(2)}$ del secondo sistema compiono per gli spostamenti $\delta_{i}^{(1)}$ e le distorsioni $\Delta_{i}^{(1)}$ del primo.

Tale teorema, la cui dimostrazione si persegue me diante l'applicazione del principio dei lavori vir tuali, con notazione analitica si può scrivere:

$$\sum_{i} F_{i}^{(1)} \delta_{i}^{(2)} + \sum_{j} c_{j}^{(1)} \Delta_{j}^{(2)} = \sum_{j} F_{j}^{(2)} \delta_{j}^{(1)} + \sum_{i} c_{i}^{(2)} \Delta_{i}^{(1)}$$

ove gli indici al piede indicano le sezioni nelle quali gli enti sono applicati e gli indici in testa indicano il sistema al quale si riferiscono,

ovvero, quando, come nella ricerca delle linee di influenza, esiste un solo ente per ogni tipo di causa e di effetto:

$$F_{i}^{(1)} \delta_{i}^{(2)} + C_{j}^{(1)} \Delta_{j}^{(2)} = F_{j}^{(2)} \delta_{j}^{(1)} + C_{i}^{(2)} \Delta_{i}^{(1)}$$

VI.4) METODO DI SCAMBIO.

with any of the second

Tale metodo consiste nel determinare le linee di influenza mediante l'applicazione del teorema di Betti generalizzato.

Si voglia ad esempio tracciare la linea d'influen za del taglio nella sezione di mezzeria di una tra ve appoggiata per forza verticale viaggiante, con il metodo di scambio anzicché, come fatto precedentemente, col metodo per punti.

La trave é caricata dunque dalla forza F=1 nella sezione generica S_i di ascissa z, e si cerca la



fig. 3.6

caratteristica taglio T nella sezione S, di mezze ria; assunto questo come sistema 1) e scritta la equazione generale del teorema di Betti omettendo le sommatorie:

$$F_{i}^{(1)} \delta_{i}^{(2)} + C_{j}^{(1)} \Delta_{j}^{(2)} = F_{j}^{(2)} \delta_{j}^{(1)} + C_{i}^{(2)} \Delta_{j}^{(1)}$$

si osserva che dei quattro termini F_{i} , C_{j} , C_{j} , δ_{j} , Δ_{i} con indice (1) (quelli del primo sictions) stema) risulta :

F_i ≠0 perché nel sistema 1) é applicata una for

 $c_{j}^{(1)} \neq 0$ perché nel sistema 1) si cerca una carator teristica; $c_{j}^{(1)} = 0$ perché nel sistema 1) non si cercano spo-

Grad stamenti; a product of product the second

A; =0 perché nel sistema 1) non é applicata al round distorsioner and a company per

In questo caso allora risultano nulli i due termi ni del lavoro al secondo membro e 1º equazione si riduce all'spressione : åkter kirki sommener begit e

$$F_{i}^{(1)} \delta_{i}^{(2)} + c_{j}^{(1)} \Delta_{j}^{(2)} = 0$$

 $\delta_{i}^{(2)} \in \Delta_{j}^{(2)}$ devono essere gli enti Particolarizzando i simboli al caso esaminato risulta:

F₁(1) F_{yi} forza verticale unitaria applicata nella sezione S, del sistema 1); caratteristica taglio cercata nella $c_{i}^{(1)} = \tau_{i}^{(1)}$ sezione S_{ij} del sistema 1);

 $\delta_{i}^{(2)} = V_{yi}^{(2)}$ spostamento verticale cercato nella sezione S, del sistema 2);

distorsione tagliante applicata nella sezione S del sistema 2).

aguaria, sa cagas de la compagnata de la cagas de la cagas aguadas Il sistema 2) risulta dunque costituito dalla stes sa trave del sistema 1) caricata però da una distorsione tagliante $\Delta_{Tj}^{(2)}$ nella sezione S_j e tale che si cerchi lo spostamento verticale della sezione S_i (vedi fig.3.6).

L'equazione del lavoro, particolarizzando la simbo logia all'esempio trattato, si scrive:

$$F_{yi}^{(1)} \cdot v_{yi}^{(2)} + T_{j}^{(1)} \cdot \Delta_{Tj}^{(2)} = 0$$

da cui: $T_{j}^{(1)} = -\frac{F_{yi}^{(1)} \cdot v_{yi}^{(2)}}{\sum_{\Delta T_{j}}^{\Delta}}$

ed essendo $F_{yi}^{(1)} = 1$ risulta $T_{j}^{(1)} = -\frac{v_{yi}^{(2)}}{v_{Tj}^{(2)}}$

Se allora nella sezione S. del sistema 2) si applica una distorsione $\Delta_{Tj}^{(2)} = -1$, unitaria e negativa risulta:

 $T_{i}^{(1)} = v_{yi}^{(2)}$

ovverossia il taglio nella sezione S_{i} della trave caricata, come il sistema 1), da una forza verticale unitaria applicata alla sezione S_{i} , é uguale alla componente verticale dello spostamento della sezione S_{i} che nella stessa trave produrrebbe una distorsione tagliante unitaria e negativa applicata nella sezione S_{i} , come nel sistema 2).

Di più, se si vogliono conoscere tutti i valori che il taglio assume nella sezione S_j a mano a mano che la forza F_j =1 occupa tutte le possibili posizioni S_j della trave (ovverossia, in breve, se si vuole conoscere la linea d'influenza del taglio in S_j per forza verticale viaggiante) basta cerca re su di una trave geometricamente identica, il

diagramma delle componenti verticali degli spostamenti di tutte le sezioni, provocati da una distor sione tagliante unitaria e negativa applicata nella sezione S_i.

In generale dunque, utilizzando il teorema di Betti generalizzato, la linea d'influenza di un ente A nella sezione S per l'ente 3 viaggiante (l.d.i. di

A in S per B viaggiante) si può ottenere come dia gramma dell'ente B' duale di B, provocato, nella stessa struttura, dall'ente A' duale di A, applica to in S, di valore unitario e di segno:

positivo se A e B sono rispettivamente caratteristiche e distorsioni o spostamenti e forze

negativo se A e B sono rispettivamente caratteristiche e forze o spostamenti e distorsioni.

In particolare le conoscenze acquisite nel corso di STATICA consentono solamente di tracciare i seguen ti tipi di linee d'influenza su strutture isostati che:

a) Linee d'influenza di caratteristiche della sollecitazione interna $\mathcal{C}^{(1)}$ (N,T,M) per forze viaggianti $F^{(1)}$ (F_{Y} , F_{z} , \mathcal{M}); in tale caso il teorema di Betti generalizzato porge :

$$\mathbf{\hat{f}}_{\mathbf{i}}^{(1)} \cdot \delta_{\mathbf{i}}^{(2)} + c_{\mathbf{j}}^{(1)} \cdot \Delta_{\mathbf{j}}^{(2)} = 0$$

$$\mathbf{\hat{d}}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{\hat{c}}_{\mathbf{i}}^{(2)} \cdot \mathbf{\hat{c}}_{\mathbf{j}}^{(2)} = 0$$

$$\mathbf{\hat{d}}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{\hat{c}}_{\mathbf{i}}^{(2)} \cdot \mathbf{\hat{c}}_{\mathbf{j}}^{(2)} \cdot \mathbf{\hat{c}}_{\mathbf{j}}^{(2)} = 0$$

$$\mathbf{\hat{d}}_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{\hat{c}}_{\mathbf{i}}^{(2)} \cdot \mathbf{\hat{c}}_{\mathbf{j}}^{(2)} \cdot \mathbf{\hat{c}}_{\mathbf{j}}^{(2)} \cdot \mathbf{\hat{c}}_{\mathbf{j}}^{(2)} \cdot \mathbf{\hat{c}}_{\mathbf{j}}^{(2)} = 0$$

 $c_{\mathbf{j}}^{(1)} = -F_{\mathbf{i}}^{(1)} \frac{\delta_{\mathbf{i}}^{(2)}}{\Delta_{\mathbf{j}}^{(2)}}$

ovvero applicando nella sezione S_j in cui si cer ca $C_j^{(1)}$ una distorsione $\Delta_j^{(2)} = -1$ (unitaria e negativa) duale di $C_j^{(1)}$, il diagramma degli spostamenti $\delta_j^{(2)}$ duali dell'ente viaggiante $F_j^{(1)}$ fornisce la l.d.i. cercata (corrispondente a valori unitari

della forza viaggiante $F_{c}^{(1)} = 1$).

b) - Linee d'influenza di spostamenti $\delta_{i}^{(1)}(\delta_{v},\delta_{z},\phi)$ per distorsioni viaggianti $\Delta_{i}^{(1)}$ $(\Delta_{N}^{J}, \Delta_{T}^{J}, \Delta_{M}^{J})$; in questo caso il teorema di Betti generalizzato

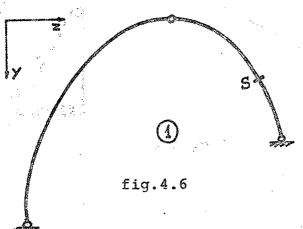
porge:
$$f(2) \delta_{j}^{(1)} + C_{i}^{(2)} \Delta_{i}^{(1)} = 0$$

all of da cui

$$\delta_{\mathbf{j}}^{(1)} = -\Delta_{\mathbf{i}}^{(1)} \frac{c_{\mathbf{i}}^{(2)}}{F_{\mathbf{j}}^{(2)}}$$

ovvero applicando nella sezione S; in cui si cerca $\delta_{1}^{(1)}$, una forza generalizzata $F_{1}^{(2)} = -1$ (unitaria e negativa) duale di $\delta_{i}^{(1)}$, il diagramma della caratteristica $C_{i}^{(2)}$ duale dello ente viaggiante $\Delta_i^{(1)}$ fornisce la l.d.i. cerca ta (corrispondente a valori unitari della di storsione viaggiante $\Delta_i^{(1)}=1$).

Esempio del caso a): determinare per la struttura



in fig.4.6 la 1.d.i. dello sforzo normale in S per forza oriz zontale vi aggiante. Il teorema di Betti in questo caso

si particolarizza nella forma :

$$F_{z}^{(1)} \delta_{z}^{(2)} + N^{(1)} \Delta_{N}^{(2)} = 0$$
da cui
$$N^{(1)} = -F_{z}^{(1)} \frac{\delta_{z}^{(2)}}{\Delta_{N}^{(2)}}$$

Per ottenere la l.d.i. cercata sarà cioé sufficiente caricare la struttura con una distorsione assia le $\Delta_N^-=-1$ in S e determinare il diagramma delle componenti orizzontali degli spostamenti.

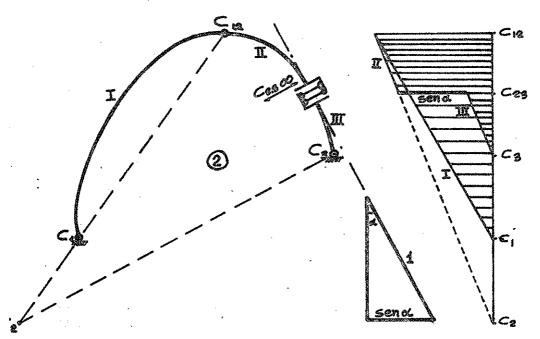


fig. 5.6

Si procede come segue : si sconnette la sezione S e si applica un vincolo che consenta il verificarsi della distorsione assiale A = -1; si traccia per la struttura divenuta una volta labile il diagramma delle componenti orizzontali degli spostamenti; dovendo essere uni tario lo spostamento relativo assiale fra le due sezioni collegate dal doppio pendolo, detta a la inclinazione sulla verticale della tangente alla sezione S, perché il diagramma tracciato sia la l.d.i. cercata lo spostamento relativo orizzontale fra i tronchi II e III dovrà valere sena, ed inoltre dovrà verificarsi che le due sezioni collegate dal doppio pendolo subiscano un allontana mento e cioé che la distorsione applicata sia di

Esempio del caso b) : determinare per la struttura di fig. 6.6 la l.d.i. della componente orizzon tale dello spostamento della sezione S per distor sione $\Delta\alpha$ viaggiante. Il teorema di Betti in tale

segno negativa (vedi fig.5.6).

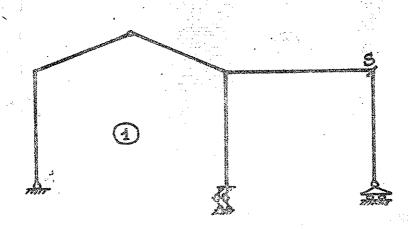


fig. 6.5

caso si particolarizza nella forma :

$$F_z^{(2)} w_z^{(1)} + M^{(2)} \Delta_M^{(1)} = 0$$

da cui

$$\tilde{w}_{z}^{(1)} = -\Delta_{M}^{(1)} \frac{M^{(2)}}{F_{z}^{(2)}}$$

per ottenere la l.d.i. cercata si dovrà dunque caricare la struttura con una forza $F^{(2)} = -1$ nella sezione S e determinare il diagramma dei momenti flettenti. (ved.fig.7.6.)

Production of the second of the second of the second of the

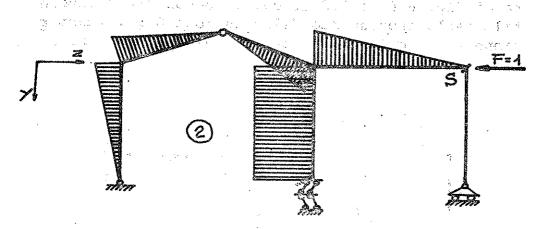


fig. 7.6

VII) - GEOMETRIA DELLE MASSE

VII.1) SISTEMI MATERIALI.

SISTEMA MATERIALE DISCRETO: é un insieme finito di masse $m_1, m_2, \dots, m_i, m_n$ concentrate nei punti $P_1, P_2, \dots, P_i, P_n$ dello spazio; la massa totale M, somma delle singole masse, vale: $M = \sum_{i=1}^{m} m_i$

SISTEMA MATERIALE CONTINUO: é un insieme infinito di masse elementari dm distribuite con continuità in tutti i punti dello spazio occupati dalla regio ne A: la legge di distribuzione delle masse nei punti di A (che sono poi regioni elementari dA) si dice densità e si indica con

$$\mu_{\mathcal{P}} = \frac{dm}{dA}$$

La massa totale M , somma delle singole masse ele mentari, vale :

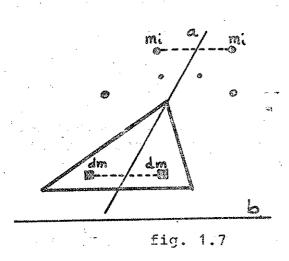
$$M = \int dm = \int_{A} \mu \ dA$$

Quando un sistema materiale continuo ha densità co stante in tutti i punti della regione occupata, si definisce omogeneo; in questo caso la massa tota le risulta prodotto della densità per il volume occupato dalla regione A.

$$M = \mu \int_{A} dA = \mu \cdot A$$

Nel seguito si tratteranno solo sistemi continui piani e dunque le regioni A saranno sempre super fici: inoltre tutte le definizioni saranno valide tanto per i sistemi discreti che per quelli continui purché nel passaggio dagli uni agli altri si sostituiscano alle sommatorie gli integrali, ed alle masse concentrate m_i le masse elementari dm.

RETTE DIAMETRALI: dato un sistema materiale piano discreto o continuo e le rette α e b non parallele



appartenenti allo stesso piano, si di ce che a é una retta diametrale coniugata alla direzione di b se tutte le masse (concentrate m, per i sistemi discreti ed elementari dm per i sistemi continui) non appartenenti al la retta a si posso no raggruppare in coppie aventi i se-

guenti requisiti : si trovano su rette parallele a b , da parti opposte di a , equidistanti da a , aventi masse uguali (ved. fig.1.7).

RETTE DI SIMMETRIA : una retta diametrale coniugata

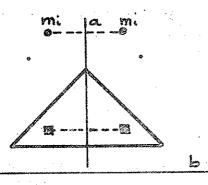
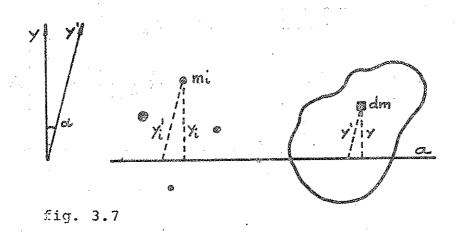


fig.2.7

ad una direzione ad essa ortogonale si definisce asse o ret ta di simmetria (ved. fig.2.7).

VII.2) MOMENTI STATICI.

Assegnato un sistema materiale discreto o continuo, una retta α ed una direzione orienta y secondo cui misurare le distanze, (ved.fig.3.7) si definisce



momento statico del sistema rispetto alla retta a lo scalare

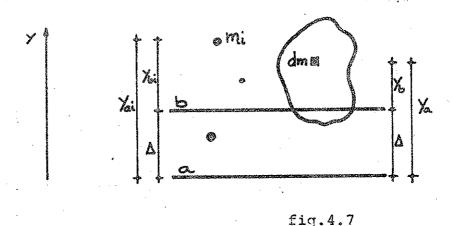
$$Sa = \sum_{i} y_{i}m_{i}$$
 per i sistemi discreti
 $Sa = \int_{M} y \, dm$ per i sistemi continui

somma dei prodotti delle masse per le loro distanze dalla retta a, ove le distanze si assumono positive o negative a seconda che le masse appartengano al semipiano positivo o negativo in cui a divide il piano del sistema.

Detto Sa il momento statico del sistema ottenuto misurando le distanze secondo la direzione y normale ad a e detto S_a il momento statico ottenuto misurando le distanze secondo la direzione y formante l'angolo α con la direzione y, risulta:

$$S\dot{a} = \frac{Sa}{\cos\alpha}$$

TEOREMA DEL TRASPORTO: dato un sistema materiale discreto o continuo ed assegnate due rette paralle le a e b distanti Δ ed una direzione orientata y



secondo cui misurare le distanze, (ved.fig.4.7), risulta (particolarizzando ai sistemi discreti ma lo stesso vale anche per quelli continui):

$$S_b = \sum y_{b,i}m_i = \sum (y_{ai}-\Delta)m_i = \sum y_{ai}m_i - \Delta \sum m_i$$

da cui :

$$S_b = S_a - \Delta \cdot M$$

Dalla precedente relazione si può osservare che fra tutte le rette parallele ad a ne esiste una sola, e si chiami g, rispetto alla quale risulta nullo il momento statico del sistema e la cui distanza Δ_G dalla retta a si ottiene imponendo $S_a=0$:

$$S_g = S_a - \Delta_G \cdot M = 0 \rightarrow \Delta_G = \frac{S_a}{M}$$

BARICENTRO di un sistema materiale é per definizione quel punto G avente la proprietà che i momenti statici rispetto a qualunque retta passante per esso sono nulli. Per determinare il baricentro di un sistema materiale piano é dunque suf ficiente determinare due rette, di differente direzione, rispetto alle quali risulti nullo il momento statico del sistema; il baricentro non dipende ovviamente dalla scelta delle rette ma solamente dalla distribuzione delle masse. In particolare le rette diametrali, ed a maggior ragione le rette di simmetria, essendo per defini zione rette rispetto alle quali il momento statico del sistema é nullo, sono sempre baricentriche: l'esistenza dunque per un sistema di due di tali rette individua immediatamente il baricentro. Se, dato un sistema materiale, si costruisce un si stema di vettori paralleli le cui intensità siano proporzionali alle masse discrete m, o elementari dm del sistema ed i cui punti di applicazione sia no quelli in cui sono concentrate le singole masse, il baricentro del sistema materiale risulta coincidere con il centro del sistema di vettori. Tale corrispondenza consente di estendere ai bari centri le proprietà dei centri di vettori ed in particolare:

- un sistema materiale é equivalente alla massa to tale concentrata nel baricentro; ciò consente ad esempio di calcolare il momento statico di un si stema come prodotto della massa totale $\,^{\rm M}\,$ per la distanza $\,^{\rm A}_{\rm G}$ del baricentro del sistema della retta $\,^{\rm A}$

 $S\alpha = M \cdot \Delta_G$

espressione, peraltro, ricavabile direttamente dal teorema del trasporto dei momenti statici.

- il baricentro di un sistema materiale si può de terminare graficamente come centro di un sistema di vettori paralleli applicati nei punti in cui sono concentrate le masse e di moduli proporzionali alle masse stesse.

VII.3) MOMENTI D'INERZIA.

Assegnato un sistema materiale discreto o continuo, una retta a, ed una direzione orientata y secondo cui misurare le distanze (ved.fig.3.7) si definisce momento d'inenzia del sistema nispetto alla retta a lo scalare:

$$Ia = \sum_{i} y_{i}^{2} m_{i}$$
 per i sistemi discreti
$$Ia = \int_{M} y^{2} dm$$
 per i sistemi continui

somma dei prodotti delle masse per il quadrato del le loro distanze dalla retta a; i momenti d'iner zia sono perciò sempre quantità positive.

Detto Ia il momento d'inerzia ottenuto misurando le distanze normalmente alla retta a e detto Ia il momento d'inerzia ottenuto misurando le distanze parallelamente alla direzione y' che forma lo angolo α con la direzione y, risulta:

$$I\dot{a} = \frac{Ia}{\cos^2\alpha}$$

CENTRO RELATIVO AD UNA RETTA.
Potendo le definizioni precedenti essere scritte
nella forma

$$1a = \sum y_{i}(y_{i}m_{i}) = \sum y_{i} S_{ai}$$

$$Ta = \int_{M} y \, y \, dm = \int_{Sa} y \, dS_a$$

si deduce che il momento d'inerzia di un sistema materiale rispetto ad una retta a può essere riguardato come momento statico delle masse momenti statici rispetto ad a e cioé: assegnato un si stema materiale, una retta a ed una direzione y si calcolano i momenti statici delle singole mas se rispetto ad a; si costruisce quindi un nuovo sistema materiale, fittizio, concentrando nei baricentri delle masse del sistema originario, masse

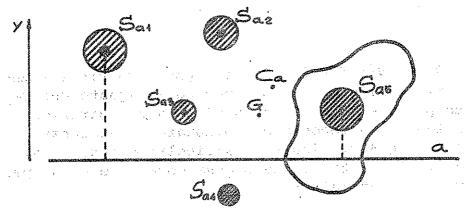


fig.5.7

fittizie di valore pari al momento statico delle singole masse rispetto alla retta a (ved.fig.5.7). Tale sistema fittizio prende nome di sistema di masse momenti statici ed il suo baricentro C_a si definisce centro relativo alla retta a.

Il procedimento testé esposto é dunque uno dei me todi per la determinazione del centro relativo ad una retta che, non dipende come il baricentro dal la sola distribuzione delle masse del sistema ma anche dalla posizione della retta. Per definizione inoltre il centro relativo alla retta a è il punto nel quale è lecito concentra re la massa momento statico totale Sa e dunque il momento d'inerzia Ia del sistema rispetto ad a è altresì ottenibile come prodotto della massa totale M per la distanza Δ_G del baricentro G da a per la distanza Δ_{Ca} del centro relativo ad a da a:

$$Ta = M \Delta_G \Delta_{Ca}$$

Dalla precedente equazione si può ricavare altre si la distanza del centro relativo Ca dalla ret la a come rapporto fra momento d'inerzia e momento statico del sistema rispetto alla retta a:

$$\Delta_{Ca} = \frac{Ia}{Sa}$$

TEOREMA DEL TRASPORTO: assegnato un sistema materiale discreto o continuo ed assegnate due ret te parallele a e b distanti A ed una direzione orientata y secondo cui misurare le distanze, (ved.fig.4.7) risulta (particolarizzando ai sistemi discreti, ma la stessa cosa vale anche per quelli continui):

$$I_{a} = \sum_{i} m_{i} y_{ai}^{2} = \sum_{i} m_{i} (y_{bi} + \Delta)^{2} = \sum_{i} m_{i} y_{bi}^{2} + \sum_{i} m_{i} \Delta^{2} + 2 \sum_{i} m_{i} y_{bi}^{2}$$

da cui

$$1a = 1b + M \Delta^2 - 2 S_b \Delta$$

TEOREMA DI HUYGHENS: nel caso in cui la retta b passi per il baricentro del sistema risulta $S_b=0$ e dunque l'espressione precedente si modifica nel la:

$$I_a = I_g + M \Delta_G^2$$

ovvero il momento d'inerzia di un sistema materia le rispetto ad una retta a é uguale alla somma del momento di inerzia rispetto alla retta baricentri ca parallela ad a e del prodotto della massa tota le per il quadrato della distanza fra le due rette.

Da tale teorema si evince in particolare che, dato un sistema materiale:

- fra tutte le rette parallele, la retta baricentri ca é quella rispetto alla quale il momento d'inerzia é il minore;
- per il calcolo del momento d'inerzia non é leci to sostituire all'effettiva distribuzione di mas se del sistema la massa totale applicata nel ba ricentro.

VII.4) RAGGI D'INERZIA.

Si definisce raggio d'inerzia lo scalare radice quadrata del rapporto fra il momento d'inerzia e la massa totale del sistema:

$$\rho_{\alpha} = \sqrt{\frac{I\alpha}{M}}$$

e potendosi scrivere $I_a = \rho_a^2 M$, il raggio d'inerzia rispetto alla retta α rappresenta la distanza da α alla quale si dovrebbe concentrare la massa totale del sistema per ottenere il medesimo momento d'inerzia I_α della reale distribuzione del sistema materiale rispetto ad α .

Dividendo per la massa totale M i due termini della equazione di Huyghens si ha :

$$\rho_{\alpha}^2 = \rho_{g}^2 + \Delta_{G}$$

Dividendo per la massa totale M l'espressione $I_a = M \Delta_G \Delta_{Ca}$ precedentemente dimostrata si ha :

$$\rho_a^2 = \Lambda_G \Lambda_{Ca}$$

Eguagliando i secondi termini delle due equazioni precedenti si ha :

$$^{\Delta}ca^{-\Delta}G = \frac{^{\circ}\frac{^{2}}{g}}{^{\Delta}G}$$

da tale espressione si evince che dato un sistema materiale ed una retta a:

- quando la retta a passa per il baricentro 6 del sistema il centro Ca relativo ad a stà al l'infinito;
- quando la retta a si allontana dal baricentro G , il centro Ca si avvicina ad esso;
- quando la retta a é all'infinito il centro Ca coincide con il baricentro G.

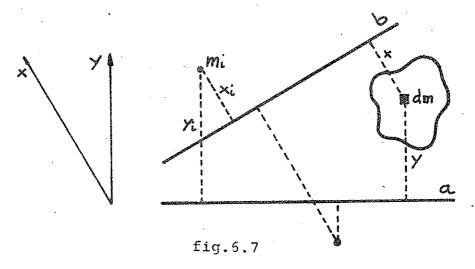
VII.5) MOMENTI CENTRIFUGHI.

Assegnato un sistema materiale discreto o continuo, due rette a e b, e due direzioni orientate x e y secondo cui misurare le distanze (ved.fig. 6.7), si definisce momento centrifugo del sistema rispetto alle rette a e b lo scalare :

$$I_{ab} = \sum_{i} m_{i} x_{i} y_{i}$$
 per i sistemi discreti
$$I_{ab} = \int_{M} x y dm$$
 per i sistemi continui

somma dei prodotti delle masse per le loro distanze dalle rette a e b; esso può anche riguardarsi

come momento statico rispetto alla retta a (o b) delle masse momenti statici rispetto alla retta b (o a).



E' immediato anche per i momenti centrifughi il teorema di trasporto analogo a quello di Huyghens per i momenti d'inerzia:

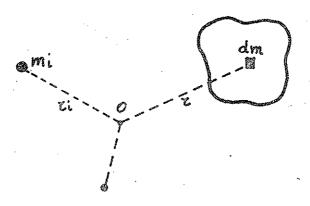
$$I_{ab} = I_{gab} + M \Delta_{Ga} \Delta_{Gb}$$

ovvero il momento centrifugo di un sistema materiale rispetto alle rette a e b \acute{e} somma del momento centrifugo del sistema rispetto alle rette baricentriche parallele ad a e b e del prodotto della massa totale per le distanze del baricentro dalle rette a e b.

VII.6) MOMENTI POLARI.

Assegnato un sistema materiale discreto o continuo ed un polo 0 si definisce momento polare del sistema rispetto ad polo 0 lo scalare:

$$T_o = \sum_{i} n_i^2 m_i$$
 per i sistemi discreti
$$T_o = \int_{M} n^2 dm$$
 per i sistemi continui



somma dei prodotti delle masse per i quadrati delle loro distanze dal polo 0.

Poiché assegnata una coppia di assi xy ortogonali di origine 0 é sempre possibile scrivere $x^2 = x^2 + y^2$ risulta: (particolarizzando ai sistemi discreti, ma lo stesso vale anche per i sistemi continui):

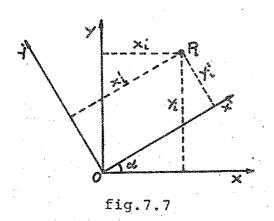
$$I_{0} = \sum (x_{i}^{2} + y_{i}^{2}) m_{i} = \sum x_{i}^{2} m_{i} + \sum y_{i}^{2} m_{i} = I_{x} + I_{y}$$

ovvero il momento polare rispetto al polo 0 può ottenersi come somma dei momenti d'inerzia rispetto a due qualunque rette passanti per 0 purché ortogonali fra loro.

I momenti statici vengono detti momenti del pri mo ordine, mentre i momenti d'inerzia, i momenti centrifughi ed i momenti polari vengono detti mo menti del second'ordine.

VII.7) MOMENTI DEL SECONDO ORDINE RISPETTO AD ASSI DI DIREZIONE VARIABILE.

Dato il punto P e date due coppie di assi carte



siani ortogonali aventi la stessa origine, le coordinate del punto P nel riferimento x'y' in funzione del le coordinate nel riferimento xy valgo no (ved.fig.7.7):

$$x_{i}^{s} = x_{i}\cos\alpha + y_{i}\sin\alpha$$

 $y_{i}^{s} = -x_{i}\sin\alpha + y_{i}\cos\alpha$

Se dunque per un sistema materiale discreto di masse m, si vogliono esprimere i momenti del se cond'ordine rispetto al riferimento x'y' in fun zione di quelli relativi al riferimento xy, si avrà:

$$I_{x}' = \sum_{i} m_{i} y_{i}^{2} = \sum_{i} m_{i} (y_{i} \cos \alpha - x_{i} \sin \alpha)^{2} =$$

$$= I_{x} \cos^{2} \alpha + I_{y} \sin^{2} \alpha - 2 I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$I_{y}^{*} = \sum_{i} m_{i} x_{i}^{*2} = \sum_{i} m_{i} (x_{i} \cos \alpha + y_{i} \sin \alpha)^{2} =$$

$$= I_{y} \cos^{2} \alpha + I_{x} \sin^{2} \alpha + 2 I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$I'_{xy} = \sum_{i=1}^{m} x_{i}^{x} y_{i}^{x} = \sum_{i=1}^{m} (x_{i} \cos \alpha + y_{i} \sin \alpha) \quad (y_{i} \cos \alpha - x_{i} \sin \alpha) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[x_{i} y_{i} (\cos^{2} \alpha - \sin^{2} \alpha) + (y_{i}^{2} - x_{i}^{2}) \sin \alpha \cos \alpha \right] =$$

$$= (I_{x} - I_{y}) \sin \alpha \cos \alpha + I_{xy} (\cos^{2} \alpha - \sin^{2} \alpha) =$$

$$= \frac{I_{x} - I_{y}}{2} \sin^{2} \alpha + I_{xy} \cos^{2} \alpha$$

Si verifica facilmente, come del resto già dimostrato, che la somma dei momenti d'inerzia rispet to a qualsiasi coppia di rette ortogonali passanti per lo stesso punto, è invariante : I'+I'=I+I = cost.

Le leggi di variazione sopra ricavate si possono esprimere sinteticamente in forma matriciale

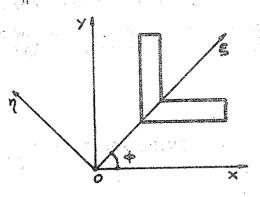
$$[I,] = [K] [I] [K]^T$$

avendo posto :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{t}_{\mathbf{X}} & -\mathbf{I}^{t}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} \\ -\mathbf{I}^{t}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} & \mathbf{I}^{t}_{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathbf{X}} & -\mathbf{I}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} \\ -\mathbf{I}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} & \mathbf{I}_{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ASSI PRINCIPALI D'INERZIA: assegnato un sistema materiale ed un punto θ , fra le infinite coppie di assi ortogonali xy di origine θ ne esiste una ξ , η rispetto a cui il momento centrifugo del sistema risulta nullo $I_{\xi,\eta}=\theta$ ed i momenti d'inerzia I_{ξ} e

In risultano uno massimo e l'altro minimo : tali



assi si definiscono assi principali d'inerzia. Dato il riferimento generico di assi ortogonali xy di origine 0, la coppia di assi \$,n \u03e9 individuata dalla condizione:

fig.8.7

$$I_{\xi,\eta} = \frac{I_x - I_y}{2} \operatorname{sen} 2\phi + I_{xy} \cos 2\phi = 0$$

da cui risulta $tg2\phi = \frac{2I_{xy}}{I_{x}-I_{y}}$

ovvero l'angolo ϕ di cui gli assi ξ , η sono ruotati rispetto ad χ ,y(ved. fig.8.7) in funzione dei momenti centrifugo e d'inerzia del sistema rispetto a χ ed y.

ASSI CENTRALI D'INERZIA sono assi principali di inerzia aventi origine nel baricentro del siste ma materiale.

In particolare gli assi di simmetria sono sempre assi principali d'inerzia.

Assegnato dunque un sistema materiale e determinato il baricentro G si sceglie una qualunque coppia di assi ortogonali x,y di origine G; calcolati I, I, I si calcola l'angolo ¢; la

coppia di assi ortogonali ξ,η di origine G, ruotati dell'angolo ϕ rispetto ad x,y rappresen

ta gli assi centrali d'inerzia del sistema : i mo menti d'inerzia I_{ξ} , I_{η} calcolati rispetto agli assi centrali si dicono momenti centrali d'inerzia, i raggi d'inerzia ρ_{ξ} e ρ_{η} , raggi centrali di inerzia.

VII.8) CORRISPONDENZA FRA CENTRI RELATIVI E RETTE DEL PIANO.

ELLISSE CENTRALE D'INERZIA: assegnato un sistema materiale discreto o continuo si é visto che ad ogni retta a corrisponde un punto Ca centro relativo ad a, che rappresenta il baricentro delle masse momenti statici del sistema rispetto al la retta a.

Si può dimostrare che le rette a del piano ed i centri relativi ad esse Ca si corrispondono in una antipolarità la cui conica fondamentale \acute{e} la ellisse di equazione :

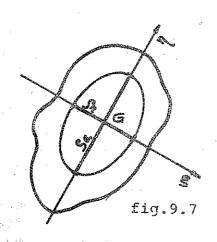
$$\frac{\xi^2}{\rho_{\eta}^2} + \frac{\eta^2}{\rho_{\xi}^2} = 1$$

detta ellisse centrale d'inerzia di Culmann aven te il centro nel baricentro G del sistema, come assi, gli assi centrali d'inerzia, come semiassi i raggi centrali d'inerzia ρ_{ξ} e ρ_{η} distesi rispet tivamente sugli assi η e ξ (ved.fig.9.7).

Le rette del piano a ed i centri ad esse relativi Ca si corrispondono dunque nella detta antipolarità come nette e antipoli o viceversa come

The state of the s

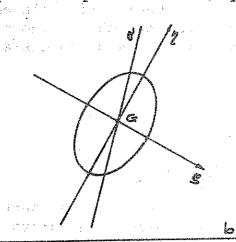
poli e antipolari : assegnata cioé una retta a, il centro Ca é il suo antipolo, ovvero assegna-



to il punto $C\alpha$, la retta di cui esso é centro relativo é la antipolare di Ca ri spetto all'ellisse centrale d'inerzia. Come d'altronde si é qià visto parlando dei centri relativi, se la retta a si tro va all'infinito, il suo antipolo Ca coin cide con il baricentro G del sistema; se la retta α si av vicina al baricentro il suo antipolo Ca se ne allontana; se

la retta a passa per il baricentro il suo antipo lo Ca si trova all'infinito.

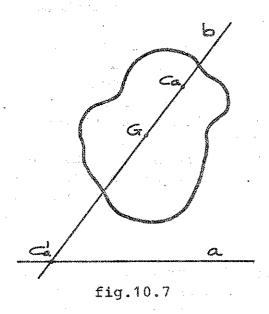
DIAMETRI E PUNTI CONIUGATI: un diametro (retta passante per il centro) qualunque a della ellis



se centrale d'inerzia si dice DIAMETRO a CONTUGATO ALLA DIRE-ZIONE DELLA RETTA b se la retta a é il luogo degli antipoli delle rette paralle-le alla direzione di b ovvero se tutti i centri relativi alle rette parallele a b giacciono sulla retta a.

Due diametri qualunque dell'ellisse centrale di inerzia si dicono *DIAMETRI CONTUGATI* se ognuno é coniugato alla direzione dell'altro, ovvero se ognuno é il luogo degli antipoli delle rette parallele all'altro; gli assi centrali d'inerzia in particolare sono diametri coniugati.

Assegnato un sistema materiale di cui sia nota la ellisse centrale d'inerzia ed assegnata una direzione a, é immediato trovare il diametro b a cui



essa é coniugata:
si determina l'anti
polo Ca della retta
a; la retta passan
te per Ca e per il
baricentro G é, come
si può facilmente ve
rificare, il diametro b coniugato alla
direzione di a (vedi
fig.10.7).
Il punto Ca ed il
punto C'a, interse

Il punto C_{α} ed il punto C_{α} , interse zione della retta α con il diametro b, si definiscono PUNTI CONIUGATI nella anti

polarità e godono della proprietà che ognuno giace sull'antipolare dell'altro; essi soddisfano la condizione:

$$^{\Delta}G^{\circ} ^{\Delta}Ca^{=} ^{\rho}a^{2}$$

ovvero nel caso specifico

$$\overline{C_{\alpha}G} \cdot \overline{GC_{\alpha}'} = \rho_{\alpha}^2$$

e cioé il prodotto delle distanze dei due punti coniugati dal baricentro è uguale al quadrato del raggio d'inerzia del sistema rispetto alla retta α .

Se in particolare la retta a é parallela ad un asse centrale d'inerzia, sia ¿ l'antipolo Ca di a ed il suo coniugato giacciono sull'altro as se n e la precedente relazione si particolarizza mella:

$$\overline{C_{\alpha}G} \cdot \overline{GC_{\alpha}^{\dagger}} = \rho_{\xi}^{2}$$

Utilizzando la precedente relazione, data l'ellis se centrale d'inerzia ed un punto $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}$ su un asse centrale, sia ad es. n, é possibile determinare il

coniugato C_a con una semplice costruzione:

- si riporta il se miasse ρ sullo asse ξ e sia \overline{GP} =
- si congiunge il punto P con Ca;
- si conduce per P

 la normale al seg

 mento PC; individuando Ca sul
 l'asse n (vedi
 fig.11.7);

 Il punto Ca é il co
 niugato di Ca ed

niugato di Ca ed infatti, per il secondo teorema di

Euclide applicato al triangolo ${^Ca^{PC}a^{'}}$, soddisfa la relazione :

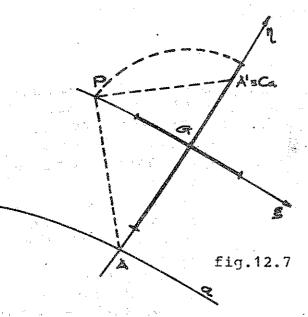
$$\overline{C_{\alpha}G} \cdot \overline{GC_{\alpha}^{\perp}} = \rho_{\xi}^{2}$$

DETERMINAZIONE DELL'ANTIPOLO DI UNA RETTA NOTA LA ELLISSE CENTRALE D'INERZIA: assegnato un sistema materiale di cui sia nota l'ellisse centrale d'inerzia, per determinare il centro relativo Ca, antipolo di una retta assegnata a, si distinguono due



casi :

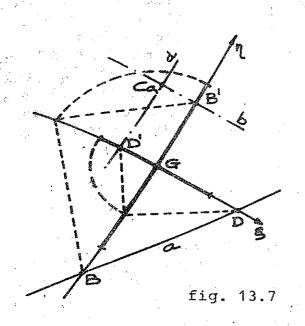
I caso : retta α parallela ad uno degli assi cen-



trali d'inerzia sia ad es. E.

In questo caso individuato il punto \overline{A} d'intersezione del la retta α con l'as se η , se ne determina il coniugato A' che rappresenta lo antipolo cercato. (vedi fig.12.7).

II caso: retta a non parallela ad alcun asse centrale. In tale caso individuati i punti di interse

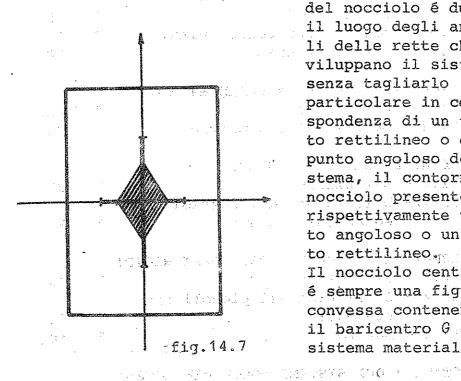


zione \mathcal{B} e \mathcal{D} della retta a con gli as si centrali d'iner zia se ne determina no i coniugati B' e D'; la retta b parallela per B' allo asse ξ rappresenta l'antipolare del punto B mentre la retta d parallela per D' all'asse n rappresenta l'antipolare del punto \mathcal{D} : il punto C_a interse zione delle rette b e d come centro del fascio di rette an

tipolari dei punti della retta α , rappresenta l'an tipolo di a (vedi fig.13.7.).

VII.9) NOCCIOLO CENTRALE D'INERZIA.

Si definisce nocciolo centrale d'inerzia si un sistema materiale piano il luogo degli antipoli delle rette che non tagliano il sistema; il contorno



del nocciolo é dunque il luogo degli antipo li delle rette che in viluppano il sistema senza tagliarlo : in particolare in corrispondenza di un tratto rettilineo o di un punto angoloso del si stema, il contorno del nocciolo presenterà rispettivamente un pun to angoloso o un tratto rettilineo. Il nocciolo centrale é sempre una figura convessa contenente il baricentro G del sistema materiale.

STEP STORY Committee of the second

Leading States and Company 一种产品的 医人物定义 翻起。

34213812 1000

INDICE

I - RICHIAMI DI CALCOLO VETTORIALE		
	Paq.	1
I.2 - Operazioni fra vettori liberi		3
I.3 - Rappresentazione cartesiana		_
dei vettori	13	6
I.4 - Operazioni sui vettori in		Ŭ
componenti cartesiane	10	
Vettori applicati	11	9
I.6 - Poligoni funicolari piani	15	13
I.7 - Vettori numerici	11	20
They will be a second to the s		20
II - RICHIAMI DI ALGEBRA DELLE MATRICI		
II.1 - Definizioni	##	22
II.2 - Operazioni tra matrici	Ħ	26
		20
III- CENNI DI ALGEBRA LINEARE		
III.1- Definizioni	10	30
III.2- Discussione dei sistemi di		30
equazioni lineari	11	31
		٠,
IV - CENNI DI CINEMATICA DEI CORPI RIGIDI		
IV.1 - Generalità	n	33
IV.2 - Cinematica dei piccoli spo		-
stamenti		36
IV.3 - Lavoro	ri .	40
ing the second of the second o		
- STATICA DEI SISTEMI MONODIMENSIONALI		
V.1 - Definizioni	18	42
V.2 - Riferimenti	tt	43
V.3 - Sollecitazioni esterne	11	43
V.4 - Equazioni cardinali della		
statica	tt	48
V.5 - Caratteristiche della solle-		
citazione interna	11	50
V.6 - Vincoli	11	53
V.7 - Strutture labili, isostatiche,		
iperstatiche	17	58

	V.8 - Catene cinematiche	Pag.	68
	V.9 - Ricerca delle reazioni		
	vincolari	11	72
	V.10- Principio del lavori virtu-		
	ali applicato ai corpi rigidi	91	79
	V.11- Diagrammi delle caratteristi-		
	che della sollecitazione in-		
	terna	Ħ	83
	V.12- Travature reticolari piane	91	98
7I -	LINEE D'INFLUENZA		
	VI.1 - Definizioni		106
	VI.2 - Tracciamento per punti	93	107
	VI.3 - Teorema di Betti generaliz		
	zato	11	109
	VI.4 - Metodo di scambio	65	111
VII-	GEOMETRIA DELLE MASSE		
	VII.1- Sistemi materiali	11	119
	VII.2- Momenti statici	11	121
	VII.3- Momenti d'inerzia	##	124
	VII.4- Raggi d'inerzia	\$ \$	127
	VII.5- Momenti centrifughi	τι	128
	VII.6- Momenti polari	ŧs	129
	VII.7- Momenti del secondo ordine		
	rispetto ad assi di direzion		
	variabile	13	131
	VII.8- Corrispondenza fra centri re		
	lativi e rette del piano	ļ1	134
	VII.9- Nocciolo centrale d'inerzia	EĢ	139