

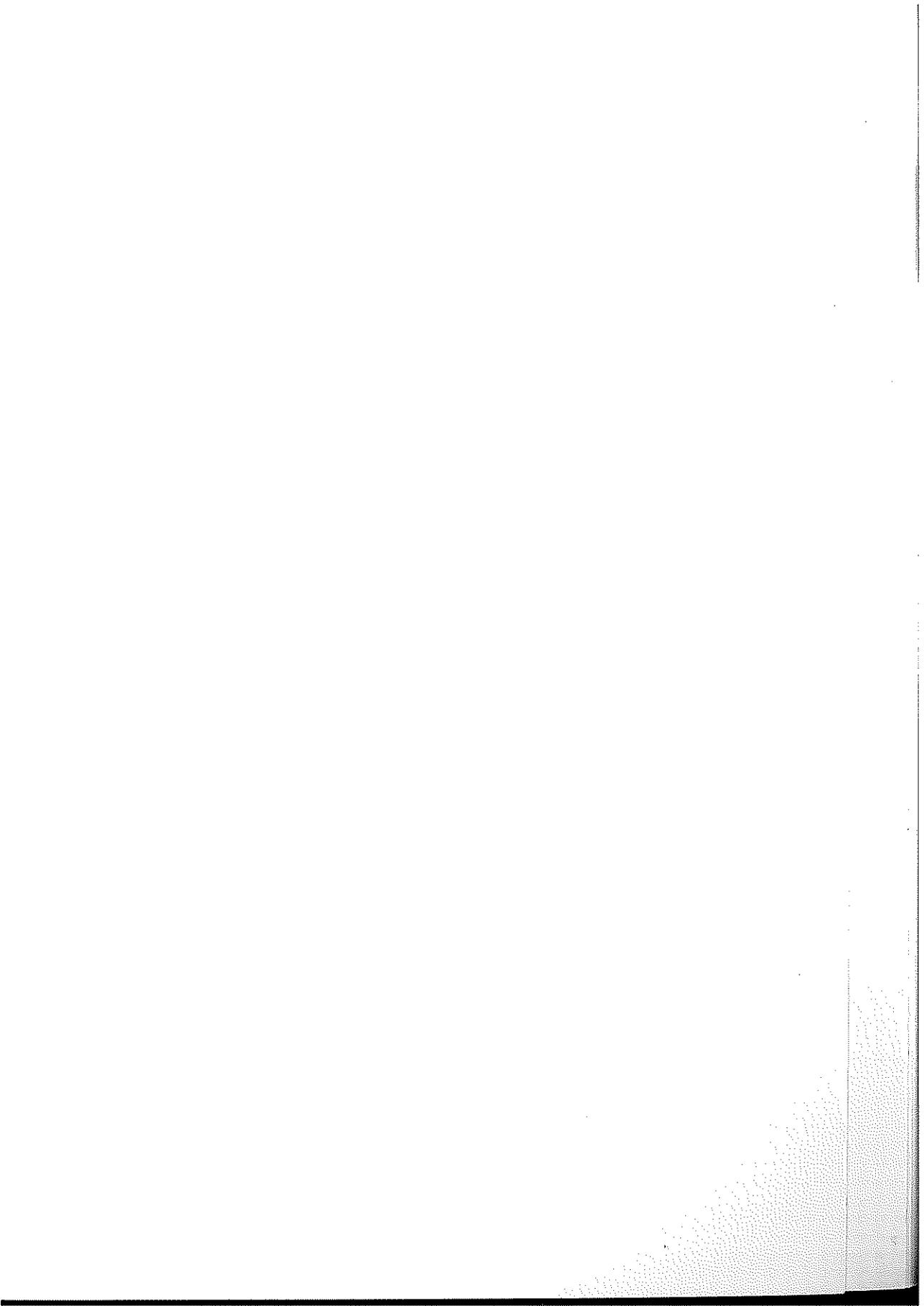
ISTITUTO UNIVERSITARIO STATALE
DI ARCHITETTURA - REGGIO CALABRIA

NICOLA AUGENTI

APPUNTI
DI
COSTRUZIONI IN ZONE SISMICHE



ISTITUTO DI TECNOLOGIA



ISTITUTO UNIVERSITARIO STATALE DI
ARCHITETTURA DI REGGIO CALABRIA

Nicola Augenti

Appunti dalle lezioni di
" COSTRUZIONI IN ZONE SISMICHE "

Anno Accademico 1979-'80

Gli appunti raccolti nelle pagine che seguono tragono la loro origine da una duplice esigenza : quella di consegnare agli allievi una traccia delle lezioni di "COSTRUZIONI IN ZONE SISMICHE" da me tenute durante gli Anni Accademici 1978-'79 e 1979-'80 e quella di mettere, contemporaneamente, ordine fra le mie idee sullo argomento.

Come già disse in un proprio lavoro un più autorevole Studioso, di originale, nelle pagine che seguono, il lettore troverà i soli errori essendo i singoli argomenti già stati trattati in maniera più approfondita nei testi indicati in bibliografia : l'unico contributo che spero di aver fornito è quello di una trattazione sintetica ma organica degli argomenti, ed in particolare dell'oscillatore semplice, per gli allievi della Facoltà di Architettura.

Nicola Augenti

Reggio Calabria, maggio 1980.

I) - CENNI DI SISMOLOGIA.

La sismologia é la scienza che studia i terremoti ed i fenomeni ad essi connessi.

Dalle indagini piú recenti é emerso che ogni anno si verificano sul nostro pianeta oltre 30.000 sismi di varia intensità; ricordiamo qui di seguito le località piú colpite negli ultimi lustri unitamente al numero di vittime presunto :

20.2.1960	ad Agadir (Marocco)	circa 10.000	morti
28.5.1960	in Cile	" 4.000	"
26.7.1963	a Skopje (Iugoslavia)	" 1.100	"
28.3.1964	ad Anchorage (Alaska)	" 1.000	"
marzo 1966	nella Cina settentrion.	" 700.000	"
agosto 1968	nell'Iran nordorientale	" 30.000	"
31.5.1970	in Perù	" 50.000	"
4.10.1972	a Teheran (Iran)	" 50.000	"
4.2.1975	ad Anshan (Cina)	" 700.000	"
6.9.1975	a Lice (Turchia)	" 3.000	"
4.02.1976	in Guatemala	" 25.000	"
28.7.1976	in Cina	" 700.000	"
24.11.1976	a Vanvi (Turchia)	" 5.000	"

I terremoti piú importanti che hanno colpito il nostro paese dall'inizio del secolo si sono verificati :

- a Reggio Calabria e Messina il 28.12.1908
- nella Sicilia Occidentale il 15.1.1968
- nel Friuli il 6.5.1976
- in Campania e Basilicata il 23.11.1980

I.1) - STRUTTURA DEL GLOBO TERRESTRE.

Le teorie più accreditate circa la genesi del globo terrestre affermano che il nostro sistema solare ebbe origine circa cinque miliardi di anni fa dalla disintegrazione di una nebulosa: gli elementi centrali dettero luogo al sole, quelli periferici si aggregarono formando i pianeti. La Terra fu presumibilmente costituita in origine da una massa omogenea di materia fusa avente forma sferoidale con raggio medio di circa 4000 km.; col trascorrere dei millenni, in seguito all'azione di più cause concomitanti quali principalmente le forze di gravitazione e centrifughe, le variazioni di temperatura e di pressione, la Terra subì successive modificazioni che culminarono essenzialmente in una espansione, con un aumento del raggio terrestre equatoriale che ha raggiunto attualmente circa 6378 km (aumento medio di quasi 65 cm. per ogni millennio) ed in una stratificazione della massa fusa con la formazione di un nucleo centrale costituito dagli elementi più pesanti e caldi, una zona intermedia di elementi più leggeri e meno caldi detta mantello ed una crosta esterna, fredda, che costituisce la nostra superficie terrestre.

Con maggiore dettaglio la struttura interna del Globo può dunque oggi considerarsi così formata :

- un *nucleo interno* avente raggio di circa 1500 km e costituito fondamentalmente da leghe di ferro e nichel allo stato solido in presenza di temperature e pressioni dell'ordine rispettivamente di circa 3600°C e $3400\text{ t/cmq.}=340\text{ GP}_a$;
- un *nucleo esterno* avente spessore di circa 2000 km e costituito dagli stessi materiali del nucleo interno ma allo stato liquido;

- un *mantello inferiore* dello spessore di circa 2450 km. costituito da ba salti e peridotiti allo sta to plastico, in presenza di temperature e pressioni inferiori.
- un *mantello superiore* dello spessore di circa 390 km costituito da rocce a base di silicio e magnesio, allo stato vetroso.
- una *crosta* di spessore variabile fra i 10 ed i 40 km che rappresenta la superficie terrestre e risulta costituita da rocce granitiche e sedimentarie allo stato solido i cui com ponenti principali sono si licio e alluminio.

La superficie di separazione fra nucleo e mantello viene denominata *discontinuità di Gutenberg*, mentre la superficie che separa il mantello dalla cro sta si definisce *discontinuità di Mohorovicic* o *Moho*.

I.2) - GENESI DEI TERREMOTI.

Da quanto detto risulta, dunque, che la crosta terrestre con le sue terre emerse (continenti) e immerse (oceani) costituisce una sottile superficie solida *galleggiante* sui materiali del mantello allo stato plastico che, seppure con ridottissime velocità (dell'ordine di 1 cm./anno) dovute alla notevole viscosità, risultano in continuo movimento essendo soggetti a moti convettivi determinati dalle variazioni di temperatura e di pressione, nonché dalle forze gravitazionali e dai movimenti che la Terra compie nello spazio.

Al riguardo H.Hess, studioso dell'Università di Princeton, formulò negli anni sessanta del nostro secolo la *Ipotesi dell'espansione dei fondi oceanici* secondo cui le dorsali oceaniche rappresenterebbero la traccia dei rami ascendenti delle correnti convettive; la crosta oceanica galleggiando sul mantello si muoverebbe dunque lateralmente allontanandosi dalle dorsali medio-oceaniche verso le placche continentali fino ad essere riassorbita dal mantello sotto la crosta continentale in corrispondenza delle fosse oceaniche, mentre in corrispondenza delle dorsali medio-oceaniche il materiale del mantello salirebbe verso la superficie per colmare, con la formazione di nuova crosta, i vuoti creatisi.

Nei primi decenni di questo secolo un geofisico tedesco, Alfred Wegener, enunciò la teoria di *deriva dei continenti* che bene spiega la genesi dei terremoti: Wegener, basandosi su ricerche scientifiche, affermò che nell'Era Mesozoica la crosta terrestre costituiva un unico continente detto *Pangea* il quale, con l'espandersi della Terra, si era fratturato in tante zolle che, allontanandosi reciprocamente e spostandosi lentamente nel tempo, avevano dato luogo alle placche continentali ed oceaniche che oggi osserviamo. L'esistenza di movimenti di deriva dei continenti bene spiega la esistenza di zone della crosta terrestre in corrispondenza delle quali il contatto fra i bordi delle diverse zolle continentali determina l'accumulo di enormi quantità di energia; allorché le tensioni di contatto fra le rocce superano il limite di rottura si verifica ivi una perturbazione energetica in conseguenza della quale grosse quantità di energia potenziale si liberano trasformandosi in energia cinetica di enormi masse rocciose che, fratturandosi e scorrendo reciprocamente con grandi spostamenti ed accelerazioni, danno luogo al fenomeno sismico: sono questi i cosiddetti terremoti di origine *tettonica*. Quando invece, in corrispondenza delle stesse zone.

o comunque di regioni particolarmente deboli, la massa fusa del mantello sfonda la crosta terrestre dando luogo ad esplosioni vulcaniche seguite spesso dalla eruzione di magma, i movimenti sismici indotti da tale evento prendono nome di terremoti di origine vulcanica.*

I.3) - ZONE SISMICHE.

Le regioni della terra caratterizzate da maggiore sismicità e, non a caso, dalla presenza della maggior parte dei vulcani, rappresentano dunque linee di particolare debolezza della crosta terrestre lungo le quali, almeno ai nostri giorni, si verificano i movimenti ed i contatti fra le varie zolle continentali ed oceaniche. Riportando schematicamente su di una carta della Terra le zone nelle quali si sono verificati la maggior parte dei terremoti di origine tettonica o vulcanica (ved.fig. 1.1) si possono individuare tre zone sismiche principali :

- *zona circumpacifica* che comprende le regioni della costa pacifica dal Cile , al Perù, al Messico, alla California, lungo l'Alaska ed il Giappone fino alle Filippine e all'Indonesia, ed include peraltro la maggior parte dei vulcani attivi oggi esistenti;
- *zona mediterranea-transasiatica* che dalla penisola Iberica attraverso Italia , Jugoslavia, Grecia, Turchia, Iran, Cina , Arcipelaghi Australiani si congiunge alla cintura circumpacifica.

* Un esempio di sisma dovuto all'attività vulcanica, peraltro poco frequente nelle nostre regioni, è quello di Ischia del 28 luglio 1883 durante il quale persero la vita circa 2300 persone pari a quasi il 10% della popolazione dell'isola.

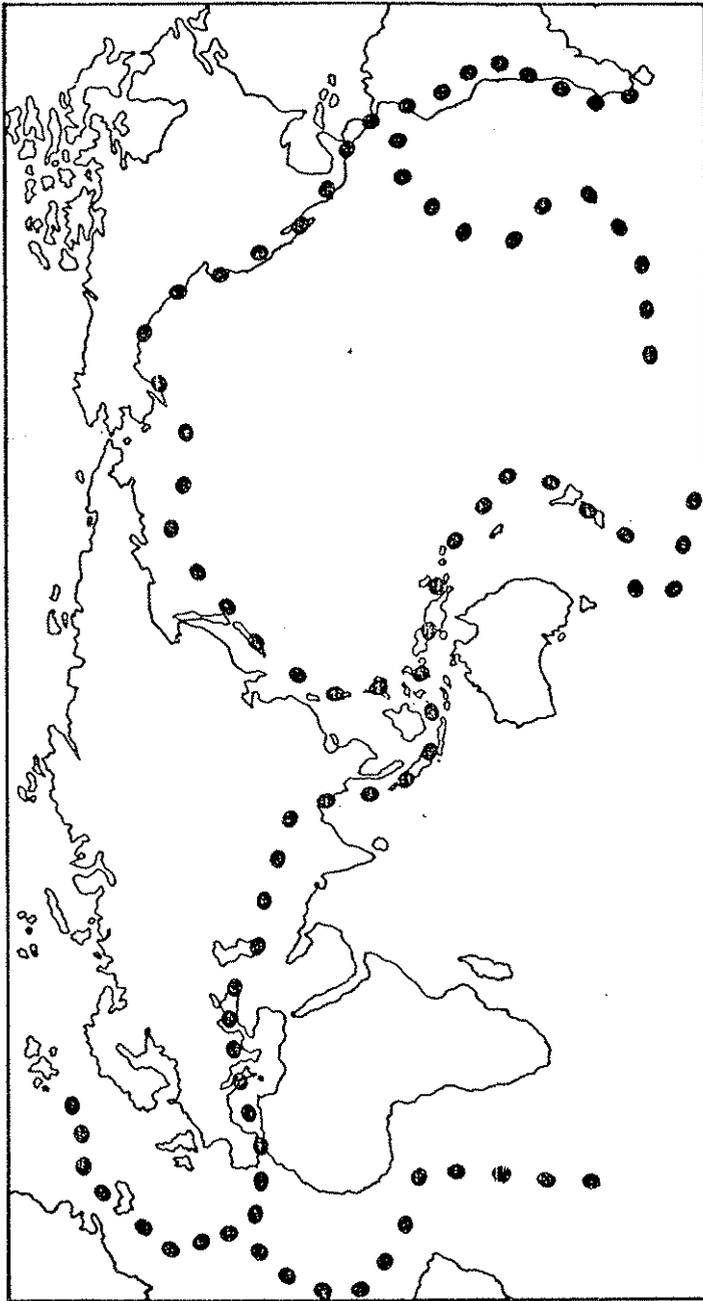


Fig.1.1 - Zone della superficie terrestre caratterizzate da elevata sismicità.

- *zona delle dorsali oceaniche* comprendente essenzialmente la dorsale atlantica (che si innesta nella zona mediterranea all'altezza della penisola Iberica), la dorsale indiana e le dorsali del pacifico orientale e meridionale.

Per quanto riguarda l'attività sismica si può dire che dell'intera energia sviluppata in tutto il mondo dai terremoti, circa l'85% di essa viene liberata nella prima zona, il 10% nella seconda e solo il 5% nella terza.

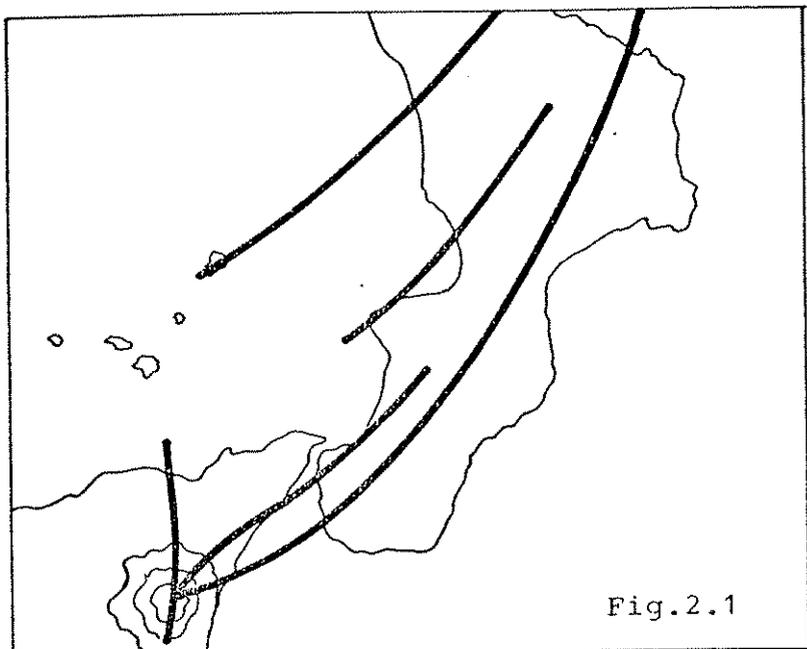
Le fratture geologiche della crosta terrestre che si sono prodotte e si producono per effetto del movimento di deriva delle varie zolle prendono nome di *faglie* e, rappresentando zone di debolezza della crosta terrestre, costituiscono le sedi più probabili di terremoti; per quanto detto si intuisce immediatamente come le regioni attraversate da faglie risultino particolarmente pericolose e dunque sconsigliabili per insediamenti abitativi. Fra le faglie più significative sono da citare quella di S. Andreas, in California, lunga quasi 900 km, ed una faglia nello Stato del Nevada che presenta uno scorrimento fra i due bordi di ben 5 m. circa.

Nella nostra zona sono note le faglie che interessano la Sicilia e la Calabria attraverso lo stretto di Messina e le isole Eolie. (ved.fig.2.1).

I.4) - ONDE SISMICHE.

La zona interna del Globo terrestre nella quale ha origine la perturbazione energetica che da luogo al terremoto si definisce *ipocentro* del sisma: contrariamente a come si definiva per il passato, esso non rappresenta un "punto" ma una "regione" più o meno estesa a seconda della dimensione del fenomeno iniziale di frattura. La proiezione dell'ipocentro sul

la superficie terrestre, ovvero l'intersezione di questa con il raggio della Terra passante per l'ipocentro, si definisce *epicentro*; la distanza fra



epicentro ed ipocentro è detta *profondità ipocentrale*.

I terremoti si definiscono :

superficiali se la profondità ipocentrale è minore di 60 km.

intermedi se la profondità ipocentrale è maggiore di 60 km. ma inferiore ai 300 km.

profondi se la profondità ipocentrale supera i 300 km.

La maggior parte dei terremoti attuali ha origine nella crosta terrestre a profondità variabili fra i 5 e i 10 km e comunque al disopra della discontinuità di Mohorovicic. Un qualunque punto di osservazione sulla superficie terrestre viene detto *stazione*; le sue distanze dall'ipocentro e dall'epocentro si definiscono rispettivamente : *distanza*

ipocentrale e distanza epicentrale.

La improvvisa liberazione di energia all'ipocentro di un terremoto genera una serie di onde elastiche che si propagano attraverso la terra fino a raggiungere la superficie, provocando movimenti del suolo che vengono detti scosse. Fra le *onde di volume*, che si trasmettono all'interno della massa del Globo, ne distinguiamo essenzialmente due tipi :

Onde principali o longitudinali che si indicano con la lettera "P"; sono onde di compressione-rarefazione che determinano vibrazioni in direzione radiale ovvero vibrazioni longitudinali rispetto alla direzione di propagazione delle onde stesse; la deformazione da esse indotta é una compressione o una dilatazione; la velocità di propagazione vale * :

$$V_P = \sqrt{\frac{(1-m)E}{(1-m-2m^2)\mu}}$$

Onde secondarie o trasversali che si indicano con la lettera "S"; sono onde che possono esistere solo nei corpi solidi e determinano vibrazioni trasversali rispetto alla direzione di propagazione delle onde stesse; la deformazione ad esse dovuta é uno scorrimento, senza variazioni di volume. La velocità di propagazione vale*:

$$V_S = \sqrt{\frac{G}{\mu}}$$

* Indicando con : m modulo di Poisson
E modulo di elasticità normale
G modulo di elasticità trasversale
μ densità del mezzo

L'incidenza delle onde di volume sulla superficie terrestre origina un altro tipo di onde che si propagano invece lungo la superficie terrestre e per tale motivo prendono nome di *onde superficiali*; tali onde, la cui importanza aumenta con la distanza dall'epicentro, sono contrassegnate con la lettera "L".

Assegnando dei valori ai parametri che figurano nelle espressioni di V_p e V_s si può osservare che la velocità di propagazione delle onde principali è molto superiore a quella delle onde secondarie: dalla misura del ritardo con cui le seconde giungono rispetto alle prime nelle stazioni di rilevamento è possibile ubicare la posizione dell'ipocentro del sisma.

Nell'ipotesi che il Globo terrestre fosse costituito tutto da uno stesso materiale omogeneo ed isotropo le onde di volume sarebbero sferiche con centro nell'ipocentro e le traiettorie sarebbero rettilinee, ovvero radiali; poiché invece le caratteristiche interne ed esterne degli strati rocciosi costituenti la Terra variano con la profondità, la velocità di propagazione muta da uno strato all'altro diminuendo dall'interno verso l'esterno, il che comporta che le traiettorie non risultino rettilinee ma curvilinee con la convessità rivolta verso il centro della Terra ed angolo di incidenza con la superficie terrestre quasi retto.

Le scosse provocate dalle onde sismiche possono essere distinte in :

scosse premonitrici che precedono la scossa principale;

scosse principali

scosse di replica

che seguono la scossa principale ed il cui numero è proporzionale all'intensità di quest'ultima;

tremiti

che sono scosse di vario tipo senza però una scossa principale.

Gli effetti prodotti dalle scosse si definiscono:

microsismici se possono essere rilevati solo mediante l'ausilio di strumenti, perché molto piccoli,

macrosismici se possono essere rilevati su grande scala mediante la sola osservazione.

I.5) - LA MISURA DELL'EVENTO SISMICO.

Le unità di misura attualmente adottate sono la *intensità* e la *magnitudo*.

Intensità è basata esclusivamente sulla osservazione di dati macrosismici ovvero dei danni prodotti dal terremoto; non si tratta dunque di una grandezza fisica legata all'energia del sisma o di un dato strumentale ma costituisce esclusivamente il risultato di valutazioni soggettive dell'osservatore dipendenti dalle condizioni ambientali, dalla qualità edilizia, dalle caratteristiche geologiche del luogo, ecc.

Con riferimento ad un evento tellurico le linee che congiungono tutti i punti di una regione nei quali si è verificata la stessa intensità si definiscono *isossime*.

Fra le scale di intensità sismica quella oggi usata è la *Scala Mercalli Modificata* (riportata alle pagine 12, 13, 14 e 15) pubblicata da C.F. Richter nel 1956 e suddivisa in 12 gradi, che coincide peraltro con la scala MKS introdotta dall'UNESCO. La scala Mercalli è ancor oggi largamente diffusa in quanto consente di interpretare tutti i fenomeni sismici, soprattutto antichi, di cui abbiamo notizia tramite la sola descrizione, senza alcuna misura strumentale.

SCALA MERCALLI MODIFICATA (1956) DELL'INTENSITA' SISMICA (Richter C.F.)

Grado	Denominazione del terremoto	Corrispondenti valori della accelerazione (mm/sec ²)	Fenomeni osservati
I	Strumentale	< 2,5	Non percepito dalle persone, ma dai soli strumenti sismici.
II	Leggerissimo	2,5-5	Percepito da persone in riposo, nei piani superiori dalle case o in posizione favorevole.
III	Leggero	5-10	Percepito nelle case. Oscillazione di oggetti appesi. Vibrazioni come al passaggio di autocarri leggeri. Stime della durata. Talora non riconosciuto come terremoto.
IV	Sensibile o mediocre	10-25	Oscillazione di oggetti appesi. Vibrazioni come al passaggio di autocarri pesanti o scossa come di una pesante palla che colpisce le pareti. Oscillazione di auto-mezzi fermi. Movimenti di porte e finestre. Tintinnio di vetri. Vibrazioni di vasettami. Nello stadio superiore al IV, scricchiolio di pareti e di strutture in legname.
V	Forte	25-50	Risentito all'esterno; stima della dire-

<p>zione. Sveglia di persone dormienti. Movimento della superficie dei liquidi, versamento di taluni dai recipienti. Spostamento o rovesciamento di piccoli oggetti instabili. Oscillazione di porte che si aprono e si chiudono. Movimento di imposte e quadri. Arresto, messa in moto, cambiamento del passo di orologi a pendolo.</p>	<p>Sentito da tutti. Spavento e fughe all' esterno. Barcollare di persone in moto. Rottura di vetrine, piatti, vetrerie. Caduta dagli scaffali di ninnoi, libri ecc e di quadri dalle pareti. Spostamento o rotazione di mobili. Screpolature di intonaci deboli e di murature tipo D(°). Suono di campanelli (Chiese, scuole). Stomire di alberi e cespugli.</p>	<p>Difficile stare in piedi. Risentito dai guidatori di automezzi. Tremolio di oggetti sospesi. Rottura di mobili. Danni alle murature tipo D(°), incluse fenditure. Rotture di comignoli deboli situati sul colmo dei tetti. Caduta di intonaci, mattoni, pietre, tegole, cornicioni (anche di parapetti isolati e ornamenti architettonici). Qualche lesione alle murature tipo C(°). Formazione di onde sugli specchi di acqua; intorbidamento di acque. Piccoli smottamenti e scavamenti in depositi di sabbia e ghiaia. Forte suono di campani. Danni ai canali di irrigazione rivestiti.</p>
<p>VI</p>	<p>Molto forte</p> <p>50-100</p>	<p>VII</p> <p>Fortissimo</p> <p>100-250</p>

VIII	Rovinoso	250-500	<p>Risentito nella guida di automezzi. Danni alle murature tipo C(°), crolli parziali. Alcuni danni a murature tipo B(°), non tipo A(°). Caduta di stucchi e di alcune pareti in muratura. Rotazione e caduta di camini, monumenti, torri, serbatoi elevati. Costruzioni con strutture in legname smosse dalle fondazioni se non imbullonate; pannelli delle pareti lanciati fuori. Rottura di palizzate deteriorate. Rotture di rami di alberi. Variazioni di portata o di temperatura di sorgenti e pozzi. Crepacchi nel terreno e sui pendii ripidi.</p>
IX	Disastroso	500-1000	<p>Panico generale. Distruzione di murature tipo D(°) gravi danni a murature tipo C(°) talvolta con crollo completo; seri danni a murature B(°) (danni generali alle fondazioni). Gravi danni ai serbatoi. Rottura di tubazioni sotterranee. Rilevanti crepacci nel terreno. Nelle aree alluvionali espulsione di sabbie e fango, formazione di crateri di sabbia.</p>
X	Disastrosissimo	1000-2500	<p>Distruzione di gran parte delle murature e delle strutture in legname, con le loro fondazioni. Distruzione di alcune robuste strutture in legname e di ponti. Gravi danni a dighe, briglie, argini. Grandi frane. Disalveamento delle acque di canali, fiumi laghi ecc. Traslazione orizzontale di sabbie e argille sulle spiege e su regioni piane. Rotaie debolmente deviate.</p>

XI	Catastrofico	2500-5000	Rotaie fortemente deviate. Tubazioni sotterranee completamente fuori servizio.
XII	Molto catastrofico	5000-10000	Distruzione pressochè totale. Spostamento di grandi masse rocciose. Linee di riferimento deformate. Oggetti lanciati in aria.

(°) A= Buon manufatto, con malta, costruito su progetto, rinforzato ai lati e legato insieme con ferri calcestruzzo ecc., progettato per resistere a forze laterali.

1 15

B= Buon manufatto con malta; rinforzato, ma non destinato in particolare a resistere a forze laterali.

C= Manufatto ordinario con malta; non eccessivamente debole come in mancanza di tiranti agli angoli, ma neppure rinforzato, nè destinato a resistere a forze orizzontali.

D= Materiali deboli, come mattoni cotti al sole; malte povere; manufatto di bassa qualità, debole orizzontalmente.

Rosenbluet ha proposto una formula che lega la in tensità sismica I alla velocità V del terreno :

$$I = \frac{\log 14 V}{\log 2}$$

La massima accelerazione a_{\max} in cm/sec^2 , raggiunta dal suolo in funzione della intensità I , si può ottenere dalla espressione :

$$\log a_{\max} = \frac{I}{3} - 0,5$$

Magnitudo tale unità di misura proposta da Richter nel 1934 è una grandezza legata alla energia liberata nel corso del sisma ed è basata sulla misura strumentale di da ti microsismici ed in particolare del massimo spostamento subito dal terreno.

Riportando per ogni terremoto su un diagramma, in ordinate i logaritmi decimali degli spostamenti mas simi del terreno misurati (in millesimi di millimetro) nelle diverse stazioni di rilevamento ed in ascisse le distanze epicentrali (esprese in chilometri), si ottengono tante curve, una per ogni terremo, che per una data regione risultano pressocché parallele fra loro (ved. fig. 3.1).

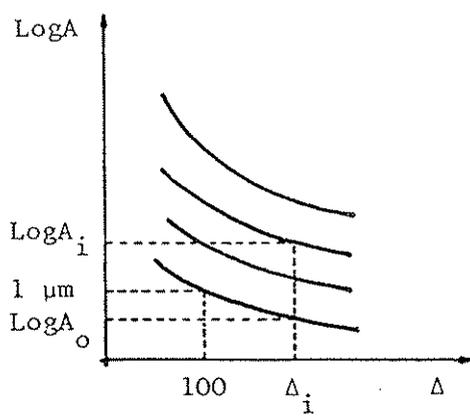


Fig. 3.1

Nota dunque l'andamento tipo (legge) dei sismi in una data zona si assume quale *terremoto campione* ovvero terremoto di magnitudo zero quello per il quale un sismografo standard* alla distanza di 100 km dall'epicentro del sisma, misura una ampiezza massima dello spostamento del suolo pari ad un millesimo di millimetro, ovvero la curva passante per il punto di coordinate : $\log A_0 = 0,001$ e $\Delta = 100$, definita la quale è possibile conoscere il valore di $\log A_0$ qualunque sia la distanza epicentrale Δ .

Costruita dunque la curva M_i del terremoto da misurare, si definisce magnitudoⁱ, la differenza fra i logaritmi decimali della massima ampiezza A misurata nella stazione alla distanza Δ_i dall'epicentro e l'ampiezza A_0 del terremoto di magnitudo zero misurato alla stessa distanza Δ_i :

$$M = \log A_i - \log A_0$$

Se le curve fossero effettivamente parallele tale differenza risulterebbe indipendente dal valore di Δ_i ma in considerazione del non perfetto parallelismo fra le curve la magnitudo sarà definita come media delle magnitudo calcolate nelle varie stazioni di rilevamento.

Tale unità, indipendente praticamente dal sito di rilevamento, può essere positiva o negativa anche se in quest'ultimo caso il sisma è talmente lieve da non rivestire alcun interesse pratico : sismi appena percepibili hanno magnitudo 2 mentre i più distruttivi hanno raggiunto anche valori di 8,6 (Cile 1960, Alaska 1964) o addirittura 9.

La relazione esistente fra l'energia E (in erg) liberata da un sisma e la sua magnitudo M può porsi nella forma :

* tipo Wood Anderson dotato di amplificazione pari a 2800, periodo proprio di 0,8 s e smorzamento pari all'80% di quello critico.

$$\log E = 11,8 + 1,5 M$$

Per terreni rigidi la massima accelerazione a_{\max} in cm/sec^2 del terreno in funzione della magnitudo M e della distanza epicentrale Δ in km, si può esprimere con la relazione :

$$a_{\max} = \frac{1230 e^{0,8M}}{(\Delta+25)^2}$$

mentre la massima velocità V_{\max} in cm/sec . può essere ricavata dalla espressione:

$$V_{\max} = \frac{15 e^M}{(\Delta+0,17 e^{0,59M})^{1,7}}$$

I.6) - REGISTRAZIONE DEI TERREMOTI.

Per ogni sisma vengono eseguite in ogni stazione due registrazioni delle scosse nel piano orizzontale ed una nel piano verticale.

Gli strumenti di rilevamento possono essere di due tipi:

Sismografi registrano, una per volta, le componenti degli spostamenti del suolo anche se piccolissimi, mediante un raggio luminoso amplificato, su carta sensibile. Il diagramma (*sismogramma*) così tracciato, uno per ogni direzione, può essere ad esempio scomposto mediante l'analisi armonica nella somma di tanti moti armonici di cui siano noti ampiezze, periodi, fasi.

Accelerografi registrano invece contemporaneamente le tre componenti della accelerazione di un punto in funzione del tempo

durante sismi violenti.

Tali registrazioni (accelerogrammi) forniscono immediatamente la durata e l'accelerazione massima del sisma; integrando l'accelerogramma una volta si può ottenere la velocità massima ed integrando successivamente il diagramma di velocità così ottenuto si ricava lo spostamento massimo del suolo.

In genere le accelerazioni massime relative alle due componenti orizzontali sono dello stesso ordine di grandezza e comunque maggiori delle massime accelerazioni verticali.

Poiché gli effetti dei terremoti non dipendono dalla sola accelerazione massima del suolo ma anche da altri fattori quali la durata del sisma e la successione delle scosse, risulta utile una classificazione dei terremoti in gruppi aventi le medesime caratteristiche. Si riporta di seguito la classificazione proposta da Newmark e Rosenblueth :

GRUPPO I : terremoti tipo Skopje 1963 ;
durata dell'ordine di alcuni secondi;
pochi picchi di accelerazione in breve tempo o addirittura una sola scossa o un singolo shock;
terreni compatti ed ipocentro poco profondo; con epicentro vicino e dunque con onde che non subiscono riflessioni;
direzione del sisma ben individuabile;
armoniche predominanti con periodi brevi (0,2 sec.)

GRUPPO II : terremoti di tipo Californiano;
durata dell'ordine di decine di secondi; terreni compatti; epicentro poco distante; movimenti molto irregolari

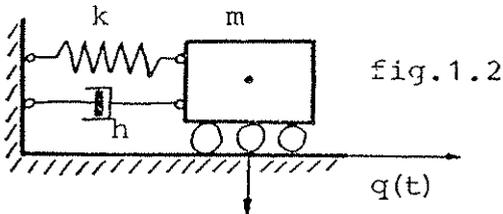
del terreno;
armoniche predominanti con periodi
compresi fra 0,05 e 6 secondi.

GRUPPO III : terremoti tipo messicano ;
durata dell'ordine di centinaia di
secondi; terreni soffici; armoniche
dominanti con periodo elevato.

GRUPPO IV : terremoti tipo Alaska e Nügata 1964;
violentissimi con deformazioni perma
nenti del terreno : slides e liquefa
zioni.

II) - DINAMICA LINEARE DEI SISTEMI DISCRETI AD UN GRADO DI LIBERTÀ'.

Il sistema più elementare ma completo per lo approccio allo studio della dinamica è quello costituito da una massa concentrata m dotata di un solo grado di libertà (ad es. scorrevole senza attrito su di un binario) vincolata da una molla (vincolo elastico) e da uno smorzatore (vincolo viscoso): tale sistema, rappresentabile come in fig. 1.2 prende nome di *oscillatore semplice smorzato*.



Detto $q(t)$ il parametro che definisce l'unico grado di libertà posseduto dal sistema* risultano necessarie alcune ipotesi sulla natura dei vincoli e

sulle reazioni da essi esplicitate.

- Vincolo elastico : si assume che esso espliciti nell'ambito dei piccoli spostamenti una reazione

$$F_e = - K \cdot q$$

proporzionale cioè alla prima potenza dello spostamento cui è sottoposto (elasticità lineare) tramite il fattore di proporzionalità K che prende nome di *rigidezza* del vincolo elastico o *costante di elasticità* e rappresenta la reazione esplicitata dal vincolo per effetto di uno spostamento unitario ($q=1$); la reazione elastica risul

* Nel seguito, per comodità di scrittura, si riporterà sempre la sola q in luogo di $q(t)$ sottintendendo la dipendenza di tale parametro dal tempo t ; inoltre per le derivate prima e seconda di $q(t)$ rispetto al tempo che rappresenta no velocità ed accelerazione si adotteranno le notazioni

ta inoltre sempre opposta al verso dello spostamento q impresso al vincolo.

- Vincolo viscoso : si formula l'ipotesi dovuta a Kelvin che esso espliciti una reazione

$$F_v = - h \dot{q}$$

proporzionale cioè alla prima potenza della velocità cui è sottoposto (viscosità lineare) tramite il fattore di proporzionalità h che prende nome di *coefficiente di smorzamento o costante di smorzamento* e rappresenta la reazione esplicita dal vincolo quando ad esso sia impressa una velocità $\dot{q}=1$; la reazione ha sempre verso opposto allo spostamento cui è soggetto*.

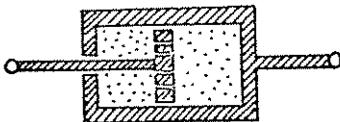
Indicando con $p(t)$ l'eccitazione esterna, variabile col tempo, eventualmente applicata all'oscillatore, possono verificarsi due casi distinti :

- I) la sollecitazione esterna $p(t)$ è applicata *staticamente* senza cioè imprimere accelerazioni alla massa : è questa l'ipotesi di carico che si formula in tutti i problemi di statica. In tale caso, detto q lo spostamento subito dalla massa m , le forze ad essa applicate sono, oltre la p , la sola reazione elastica $F_e = - K \cdot q$. L'equazione di equilibrio alla traslazione nella direzione dello spostamento si scri

di Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{dq(t)}{dt} = \dot{q}(t) = \dot{q} \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dt^2} q(t) = \ddot{q}(t) = \ddot{q}$$

- * Contrariamente a quanto avviene per il vincolo elastico, di certo più familiare, meno intuibile può apparire allo studente il comportamento ipotizzato per il vincolo viscoso. Un possibile smorzatore è ad esempio quello costituito da un cilindro pieno di olio a perfetta tenuta nel quale



scorre un pistone la cui base è fornita di tanti forellini. Quando il pistone si sposta, l'olio è costretto a passare da una camera all'altra

ve :

$$F_e + p = 0 \quad (\text{equazione di equilibrio statico})$$

ovvero

$$q \cdot K = p.$$

da cui nota la rigidezza K del vincolo e la sollecitazione esterna p applicata, si può ricavare lo spostamento subito dalla massa :

$$q = \frac{p}{K}$$

II) La sollecitazione esterna $p(t)$ varia rapidamente nel tempo imprimendo accelerazioni alla massa: in conseguenza di tali accelerazioni \ddot{q} per il secondo principio della Dinamica dovuto a Newton, l'oscillatore risulta soggetto alla forza d'inerzia $F_i = -m \ddot{q}$ di intensità pari al prodotto della massa per l'accelerazione e verso opposto a quello della accelerazione; per effetto della velocità \dot{q} impressa alla massa il vincolo viscoso esplica una reazione $F_v = -h \dot{q}$;

in conseguenza dello spostamento q il vincolo elastico reagirà con forza $F_e = -K q$.

Ma per il Principio di d'Alambert in ogni istante t devono farsi equilibrio tutte le forze, di inerzia, attive e vincolari, applicate all'oscillatore, per cui istante per istante dovrà essere verificata l'eguaglianza :

$$F_i + F_v + F_e + p(t) = 0 \quad (\text{equazione di equilibrio dinamico})$$

ovvero :

$$m \ddot{q} + h \dot{q} + K q = p(t) \quad (1)$$

attraverso i forellini e dunque impiegando un certo tempo. Si intuisce allora immediatamente come una maggiore velocità del pistone sia connessa con una maggiore resistenza offerta dall'olio e dunque dallo smorzatore.

La (1) che prende nome di *equazione delle oscillazioni forzate*, è una equazione differenziale del II ordine a coefficienti costanti nello spostamento incognito q e definisce il moto dell'oscillatore semplice smorzato.

Quando la sollecitazione esterna $p(t)$ è nulla la (1) assume la forma

$$m \ddot{q} + h \dot{q} + K q = 0 \quad (2)$$

che prende nome di *equazione delle oscillazioni libere*.

La soluzione della equazione differenziale (1) si può esprimere come somma di due addendi

$$q(t) = q_l(t) + q_p(t) \quad (3)$$

ove : $q_l(t)$ rappresenta l'integrale generale della equazione omogenea associata, coincidente con l'equazione delle oscillazioni libere (2) e costituisce il *moto transitorio*; ovvero il moto che l'oscillatore possiede dall'istante iniziale $t=0$ e fino alle condizioni di regime ;

$q_p(t)$ rappresenta un integrale particolare della equazione completa (1) e costituisce il *moto a regime*.

La soluzione della (1) si compone cioè di una parte $q_l(t)$ indipendente dal carico la quale dà luogo ad oscillazioni libere che si esauriscono in un tempo più o meno lungo in dipendenza delle azioni smorzanti, e di una parte $q_p(t)$ legata al carico esterno che dà luogo ad oscillazioni stazionarie.

II.1) - OSCILLAZIONI LIBERE.

L'equazione differenziale che regge tale problema, come già detto, è :

$$m \ddot{q} + h \dot{q} + K q = 0 \quad (2)$$

la cui equazione caratteristica si scrive :

$$m \kappa^2 + h \kappa + K = 0 \quad (2')$$

Dette κ_1 ed κ_2 le radici della (2'), la soluzione della equazione (2) delle oscillazioni libere si presenta nella forma

$$q_\ell(t) = A e^{\kappa_1 t} + B e^{\kappa_2 t} \quad \text{per } \kappa_1 \neq \kappa_2 \quad (4)$$

$$q_\ell(t) = e^{\kappa t} (A + Bt) \quad \text{per } \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa \quad (5)$$

essendo A e B due costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Con le posizioni

$$q_\ell(0) = q_0 \quad \text{spostamento posseduto dall'oscillatore all'istante iniziale } t=0 \text{ del moto,}$$

$$\dot{q}_\ell(0) = \dot{q}_0 \quad \text{velocità posseduta dall'oscillatore all'istante iniziale } t=0 \text{ del moto,}$$

è possibile determinare i valori che assumono le costanti A e B in funzione delle radici κ_1 ed κ_2 e delle condizioni iniziali del moto q_0 e \dot{q}_0 .

Nel caso di radici distinte $\kappa_1 \neq \kappa_2$:

ponendo $t=0$ nella (4) e nella sua derivata prima si ottiene il sistema :

$$q_0 = A + B$$

$$\dot{q}_0 = A\kappa_1 + B\kappa_2$$

la cui soluzione porge :

$$A = \frac{\dot{q}_0 - q_0 \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \quad (6)$$

$$B = -\frac{\dot{q}_0 - q_0 \kappa_1}{\kappa_1 - \kappa_2}$$

Negli sviluppi successivi tali costanti compariranno sempre come somma o differenza per cui riesce utile de terminare sin d'ora le relative espressioni :

$$\begin{aligned} A + B &= q_0 \\ A - B &= \frac{2\dot{q}_0 - q_0(\kappa_1 + \kappa_2)}{\kappa_1 - \kappa_2} \end{aligned} \quad (7)$$

Nel caso di radici coincidenti $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$:
ponendo $t=0$ nella (5) e nella sua derivata prima si ottiene il sistema :

$$\begin{aligned} q_0 &= A \\ \dot{q}_0 &= A \kappa + B \end{aligned}$$

la cui soluzione porge

$$\begin{aligned} A &= q_0 \\ B &= \dot{q}_0 - q_0 \kappa \end{aligned} \quad (7')$$

Le radici κ_1 ed κ_2 della equazione caratteristica (3) si scrivono :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{aligned} \right\} &= \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4mK}}{2m} = -\frac{h}{2m} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4m^2} - \frac{K}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{K}{m}} \cdot \left[-\frac{h}{2\sqrt{mK}} \pm \sqrt{\frac{h^2}{4mK} - 1} \right] \end{aligned}$$

Facendo le posizioni seguenti :

$$\frac{h}{2\sqrt{mK}} = \beta \quad \text{fattore di smorzamento}$$

$$\sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_0 \quad \text{frequenza angolare naturale non smorzata o pulsazione naturale non smorzata}$$

$$\beta \cdot \omega_0 = \varepsilon$$

le radici κ_1 ed κ_2 si possono scrivere :

$$\kappa_1 = \omega_0 (-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}) = -\varepsilon + \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1}$$

$$\kappa_2 = \omega_0 (-\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}) = -\varepsilon - \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1}$$

Ponendo

$$\omega = \begin{cases} \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} & \text{per } \beta < 1 \\ \omega_0 \sqrt{\beta^2 - 1} & \text{per } \beta > 1 \end{cases}$$

ove ω si definisce *frequenza angolare naturale smorzata o pulsazione naturale smorzata*, a seconda che il fattore di smorzamento risulti minore o maggiore dell'unità le radici κ_1 ed κ_2 assumono allora le espressioni :

$$\kappa_1 = -\varepsilon + i \cdot \omega \quad \text{nel caso } \beta < 1 \quad (8)$$

$$\kappa_2 = -\varepsilon - i \cdot \omega$$

$$\kappa_1 = -\varepsilon + \omega \quad \text{nel caso } \beta > 1 \quad (9)$$

$$\kappa_2 = -\varepsilon - \omega$$

E' immediato dunque osservare il ruolo fondamentale che assume il fattore di smorzamento β : a seconda che esso risulti maggiore o minore dell'unità il valore delle radici κ_1 ed κ_2 , e dunque delle soluzioni dell'equazione (2), subiscono variazioni notevoli dando luogo, come si vedrà nel seguito, ad oscillazioni libere del sistema completamente differenti nei due casi (moti periodici per $\beta < 1$, moti aperiodici per $\beta > 1$).

L'ambito di maggiore interesse per il progettista riguarda principalmente le oscillazioni che si verificano per $\beta < 1$ potendosi assumere per le strutture usuali, in cui le azioni dissipative sono di na

tura interna, fattori di smorzamento dell'ordine di qualche unità per cento; di contro, nei rari casi in cui i sistemi sono dotati di smorzatori esterni, assume interesse il comportamento dell'oscillatore per $\beta > 1$.

Il valore $\beta=1$ costituisce, in particolare, il limite di separazione fra i due tipi distinti di comportamento; in corrispondenza di esso la costante di smorzamento h assume il valore

$$h_c = 2 \sqrt{m K}$$

che prende il nome di *smorzamento critico*. Con tale definizione il fattore di smorzamento β assume pertanto il significato di rapporto fra lo smorzamento del sistema e lo smorzamento critico :

$$\beta = \frac{h}{2 \sqrt{mK}} = \frac{h}{h_c}$$

Il valore $\beta=0$ rappresenta invece il caso limite di *sistema conservativo* per il quale cioè risultano nulli gli effetti dissipativi ovvero le azioni smorzanti.

Tale caso ha significato puramente teorico non esistendo nella realtà sistemi conservativi; significativa al riguardo è la *legge di Routh* la quale afferma che "il moto di una lamina vibrante nel vuoto si smorza comunque per un effetto viscoso interno a livello molecolare".

Essendo dunque il comportamento dell'oscillatore essenzialmente legato al fattore di smorzamento β , lo studio delle oscillazioni libere dei sistemi dotati di un grado di libertà si condurrà facendo riferimento ai valori che tale parametro può assumere.

II.1.1) - SISTEMI CONSERVATIVI ($\beta=0$)

Non sussistendo nel sistema alcuna azione smorzante, ovvero alcuna dissipazione di energia, risulta $h=0$ per cui la (2) assume la forma :

$$m \ddot{q} + K q = 0$$

che prende in questo caso il nome di *equazione delle oscillazioni libere non smorzate*.

Essendo $\beta=0$ risulta :

$$\epsilon = \beta \omega_0 = 0$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2} = \omega_0$$

e dunque le (8) assumono le espressioni :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= + i \omega_0 \\ \kappa_2 &= - i \omega_0 \end{aligned} \quad (10)$$

che sostituite nella (4) porgono :

$$q_\ell(t) = A e^{+i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}$$

e ricordando le formule di trasformazione inverse di Eulero :

$$\begin{aligned} e^{ix} &= i \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x \\ e^{-ix} &= -i \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x \end{aligned} \quad (11)$$

si può scrivere :

$$q_\ell(t) = i(A-B) \operatorname{sen} \omega_0 t + (A+B) \operatorname{cos} \omega_0 t \quad (12)$$

Sostituendo le (10) nelle (7) si ottengono i valori delle costanti :

$$A-B = \frac{\dot{q}_0}{i \omega_0}$$

$$A+B = q_0$$

che poste nella equazione (12) forniscono la solu-

* In tale caso esiste solamente la pulsazione naturale non smorzata.

zione :

$$q_{\ell}(t) = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \text{sen} \omega_0 t + q_0 \text{cos} \omega_0 t \quad (13)$$

Il moto del sistema è in tal caso una oscillazione armonica indefinita intorno alla posizione di equilibrio statico $q=0$ e dunque un moto periodico.

La (13) derivata una volta rispetto al tempo fornisce l'espressione della velocità

$$\dot{q}_{\ell}(t) = \omega_0 \left[\frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \text{cos} \omega_0 t - q_0 \text{sen} \omega_0 t \right]$$

derivata una seconda volta rispetto al tempo fornisce l'espressione dell'accelerazione

$$\ddot{q}_{\ell}(t) = \omega_0^2 \left[-\frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \text{sen} \omega_0 t - q_0 \text{cos} \omega_0 t \right] = -\omega_0^2 q_{\ell}(t)$$

La velocità e l'accelerazione dell'oscillatore variano dunque anch'esse con legge armonica ed inoltre la forza di inerzia applicata alla massa m

$$F_i(t) = -m \cdot \ddot{q}_{\ell}(t) = m \cdot \omega_0^2 q_{\ell}(t)$$

risulta proporzionale agli spostamenti $q_{\ell}(t)$ della massa stessa: da ciò si evince che quanto più grandi sono gli spostamenti subiti dalle masse, tanto maggiori risultano le forze d'inerzia ad esse applicate (ad esempio in un edificio che oscilla, a parità di massa per piano, le forze d'inerzia più elevate sono quelle applicate ai piani più alti).

Ricordando che, data una funzione armonica del tipo:

$$f(x) = a \text{sen} x + b \text{cos} x$$

essa può porsi nella forma :

$$f(x) = c \text{sen} (x+\alpha)$$

essendo :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \alpha = \text{arctg} \frac{b}{a}$$

La soluzione (13) può anche essere scritta nella forma :

$$q_{\ell}(t) = c_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \alpha_0) \quad (13')$$

avendo posto :

$$c_0 = \sqrt{\left(\frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\right)^2 + q_0^2}$$

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{q_0 \omega_0}{\dot{q}_0}$$

La (13') esprime in forma elementare un moto armonico indefinito caratterizzato dagli elementi seguenti :

pulsazione $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

periodo proprio $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$

frequenza $f = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

ampiezza $c_0 = \sqrt{\left(\frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\right)^2 + q_0^2}$

fase $\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{q_0 \omega_0}{\dot{q}_0}$

Al riguardo risulta opportuna qualche osservazione:

- la pulsazione naturale ω_0 e la frequenza f a meno della costante 2π coincidono, rappresentando entrambe il numero di oscillazioni compiute dal sistema dell'unità di tempo; ciò spiega altresì la dizione di frequenza angolare attribuita ad ω_0 . Sia ω_0 che f aumentano con la rigidezza K del vincolo elastico e diminuiscono all'aumentare della massa m .
- il periodo proprio di oscillazione T_0 rappresenta l'intervallo di tempo nel quale si verifica una

oscillazione completa del sistema ovvero il tempo dopo il quale la funzione (13) o (13') assume gli stessi valori; esso aumenta all'aumentare della massa e della deformabilità $1/K$ del vincolo elastico ovvero al diminuire della sua rigidità K .

Dunque sistemi più rigidi o dotati di piccole masse posseggono frequenze elevate e bassi periodi, mentre sistemi più deformabili o dotati di grandi masse sono caratterizzati dal possedere basse frequenze e periodi elevati.

Si può inoltre notare che le costanti di integrazione A e B o le equivalenti c_0 e α_0 dipendono essenzialmente dalle condizioni iniziali q_0 e \dot{q}_0 il che significa che, mancando per le oscillazioni libere la eccitazione esterna, il moto della massa m si può verificare solo a patto di conferire energia al sistema oscillante; ciò può ottenersi :

- 1) col dotare inizialmente l'oscillatore di energia elastica, imprimendo alla massa al tempo $t=0$ uno spostamento q_0 : la risposta in tal caso è del tipo rappresentato in fig.2.2

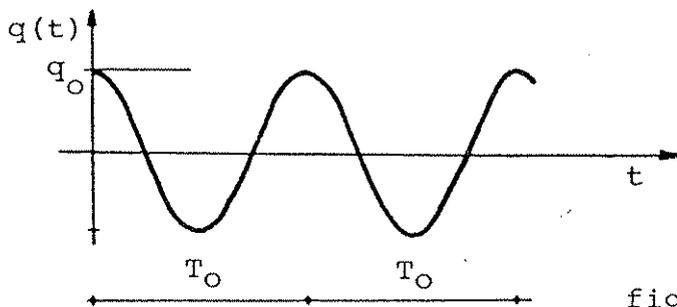


fig.2.2

- 2) con l'attribuire inizialmente all'oscillatore energia cinetica, imprimendo alla massa al tempo $t=0$ la velocità \dot{q}_0 : in questo caso la legge del moto si presenta come in fig.3.2
- 3) in entrambi i modi citati precedentemente; le oscillazioni del sistema avranno in tal caso una legge di variazione del tipo in fig.4.2

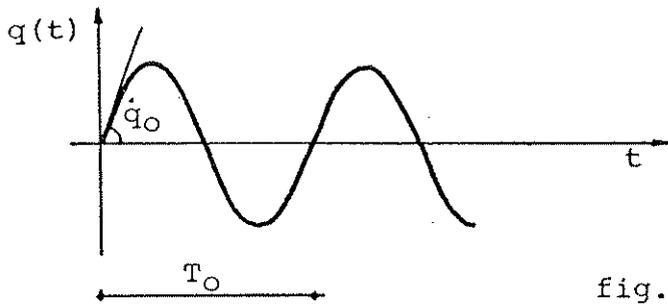


fig.3.2

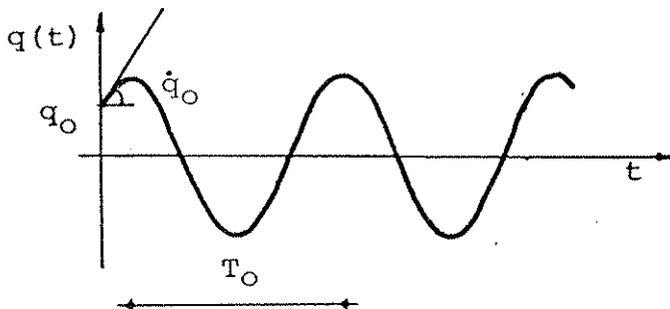


fig.4.2

II.1.2) - SISTEMI A BASSO SMORZAMENTO ($0 < \beta < 1$)

Le radici dell'equazione caratteristica assumono in tal caso le espressioni (8) e la soluzione (4) si scrive :

$$\begin{aligned}
 q_{\ell}(t) &= A e^{(-\epsilon + i\omega)t} + B e^{(-\epsilon - i\omega)t} = \\
 &= e^{-\epsilon t} \left[A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t} \right]
 \end{aligned}$$

e mediante le formule di trasformazione (11) :

$$q_{\ell}(t) = e^{-\epsilon t} [i(A-B)\text{sen}\omega t + (A+B)\text{cos}\omega t] \quad (14)$$

I valori (8) sostituiti nella (7) forniscono le costanti :

$$A-B = \frac{q_0 \epsilon + \dot{q}_0}{i \omega}$$

$$A+B = q_0$$

che sostituite nella (14) porgono la soluzione :

$$q_{\ell}(t) = e^{-\epsilon t} \left[\frac{q_0 \epsilon + \dot{q}_0}{\omega} \text{sen}\omega t + q_0 \text{cos}\omega t \right] \quad (15)$$

In questo caso il moto, ancora periodico, è una oscillazione armonica smorzata intorno alla posizione di equilibrio statico $q=0$: il termine in parentesi esprime infatti un moto armonico indefinito analogo a quello esaminato nel caso $\beta=0$, mentre il termine esponenziale rap-
presenta il decremento che tale moto subisce nel tempo. Si può dimostrare che il rapporto fra le ampiezze massime di due periodi successivi è costante e vale:

$$e^{-\epsilon T}$$

il parametro ϵT si definisce decremento logaritmico e rappresenta il decremento percentuale dell'ampiezza delle oscillazioni; esso consente la determi-
nazione sperimentale del fattore di smorzamento β .
Risulta interessante osservare come per $\beta=0$ risultando $\epsilon=0$ e $\omega=\omega_0$ si ritrovi immediatamente la solu-
zione (13) come caso particolare della (15).

L'equazione (15), analogamente a quanto si è fatto per il precedente caso $\beta=0$, si può esprimere nella forma

$$q_{\ell}(t) = C e^{-\epsilon t} \text{sen}(\omega t + \gamma) \quad (15')$$

avendo posto:

$$C = \sqrt{\left(\frac{\epsilon q_0 + \dot{q}_0}{\omega}\right)^2 + q_0^2} \quad e \quad \gamma = \text{arctg} \frac{q_0 \omega}{\epsilon q_0 + \dot{q}_0}$$

L'andamento del moto corrispondente alle condizioni iniziali $q_0 \neq 0$ e $\dot{q}_0 \neq 0$ è rappresentato in fig.5.2

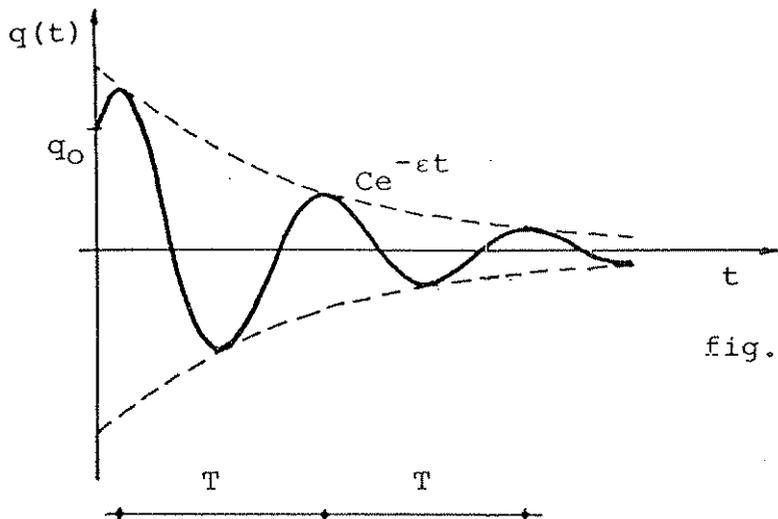


fig.5.2

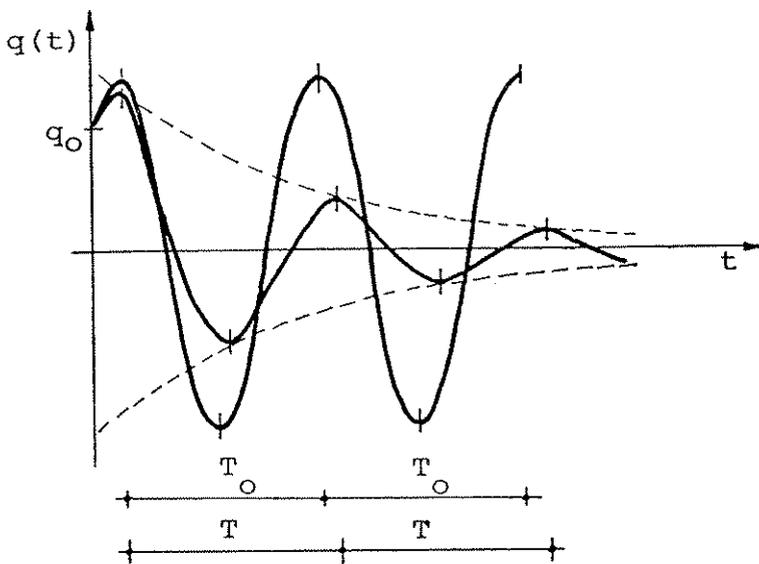
Confrontando le risposte (13) e (15) dell'oscillatore semplice ottenute rispettivamente per $\beta=0$ e per $\beta < 1$, ovvero in modo più immediato esaminando la relazione $\omega = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2}$ si evince che sistemi aventi basso smorzamento sono caratterizzati dal possedere frequenze più basse e dunque periodi più elevati dei sistemi conservativi; dunque allorché si trascuri lo smorzamento di un sistema, i periodi propri così determinati risultano lievemente minori di quelli reali.

In fig. 6.2 tale confronto è rappresentato graficamente con riferimento alle condizioni iniziali $q_0 \neq 0$ e $\dot{q}_0 \neq 0$.

II.1.3) - SISTEMI CON SMORZAMENTO CRITICO. ($\beta=1$)

Tale caso si verifica quando la costante di smorzamento assume il valore critico

$$h_c = 2 \cdot \sqrt{m K}$$



Risultando in tale caso limite

$$\omega = 0 \quad \varepsilon = \omega_0$$

l'equazione caratteristica (2') ammette due radici coincidenti

$$\kappa = -\omega_0$$

che poste nella (7') forniscono i valori delle costanti :

$$A = q_0$$

$$B = \dot{q}_0 + q_0 \omega_0$$

sostituendo i valori di A, B ed κ nella (5) si ottiene la soluzione

$$q_\ell(t) = e^{-\omega_0 t} \left[q_0 + (\omega_0 q_0 + \dot{q}_0) t \right] \quad (16)$$

La legge del moto è in questo caso asintotica ed il sistema tende alla quiete senza oscillare.

In fig. 7.2 è rappresentato il diagramma del moto corrispondente alle condizioni iniziali $q_0 \neq 0$ e $\dot{q}_0 \neq 0$.



fig.7.2

II.1.4) - SISTEMI AD ELEVATO SMORZAMENTO ($\beta > 1$)

Le radici dell'equazione caratteristica assumono in tale caso le espressioni (9) e la soluzione (4) si scrive :

$$q_e(t) = e^{-\epsilon t} (A e^{+\omega t} + B e^{-\omega t}) \quad (17)$$

e ricordando le formule di trasformazione

$$e^x = shenx + chosx$$

$$e^{-x} = -shenx + chosx$$

la (17) si scrive :

$$q_e(t) = e^{-\epsilon t} \left[(A-B) shen\omega t + (A+B) chos\omega t \right]$$

Sostituendo i valori delle radici (9) nelle (7) si ottengono i valori delle costanti :

$$A-B = \frac{q_0 \epsilon + \dot{q}_0}{\omega}$$

$$A+B = q_0$$

che introdotti nella equazione precedente forniscono la soluzione :

$$q_e(t) = e^{-\epsilon t} \left[\frac{q_0 \epsilon + \dot{q}_0}{\omega} shen\omega t + q_0 chos\omega t \right] \quad (18)$$

Anche in questo caso, come nel precedente, il moto è aperiodico : la massa m tende asintoticamente a zero tanto più rapidamente quanto più il fattore di smorzamento è prossimo all'unità; nel caso limite $\beta = \infty$ (viscosità infinita) il sistema rimarrebbe fisso nella posizione iniziale q_0 .

È interessante osservare la perfetta analogia fra la (15) e la (18) la cui unica differenza è costituita dalle funzioni seno e coseno periodiche nella prima ed aperiodiche nella seconda.

In fig.8.2 è rappresentata qualitativamente la legge del moto (18) corrispondente alle condizioni iniziali $q_0 \neq 0$ e $\dot{q}_0 = 0$ al variare del fattore di smorzamento β .

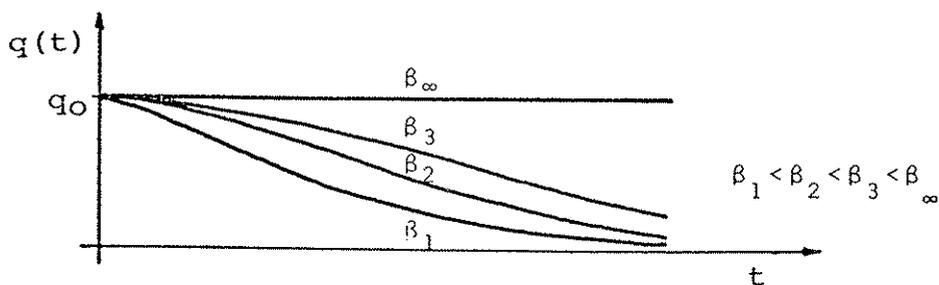


fig.8.2

II.2) - OSCILLAZIONI FORZATE.

Quando l'oscillatore di massa m è eccitato dalla generica forza esterna $p(t)$ variabile col tempo, la equazione che regge il problema assume la forma :

$$m \ddot{q} + h \dot{q} + K q = p(t) \quad (1)$$

e le oscillazioni della massa prendono nome di *oscillazioni forzate*.

La soluzione dell'equazione (1), come si è già detto, è esprimibile come somma di due termini

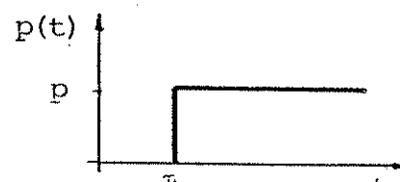
$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) \quad (3)$$

di cui il primo $q_\ell(t)$ rappresenta l'integrale generale dell'equazione omogenea associata alla (1), ovvero la soluzione dell'equazione (2) delle oscillazioni libere già determinata nei paragrafi precedenti per diversi valori di β , mentre $q_p(t)$ rappresenta un integrale particolare dell'equazione completa (1).

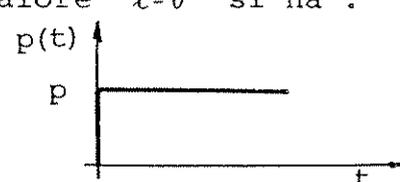
Nel prosieguo si approfondirà il comportamento dei soli sistemi dotati di basso smorzamento, essendo questi i più frequenti nello studio delle strutture in zone sismiche, mentre solo brevi cenni si forniranno per gli altri sistemi.

II.2.1) - SOLLECITAZIONE A GRADINO.

È quella costituita da una forza di valore nullo fino al tempo τ e valore costante negli istanti successivi

$$\begin{aligned}
 p(t) &= 0 && \text{per } t < \tau \\
 p(t) &= p = \text{cost.} && \text{per } t \geq \tau
 \end{aligned}$$


Se l'istante τ coincide col valore $t=0$ si ha :

$$\begin{aligned}
 p(t) &= 0 && \text{per } t < 0 \\
 p(t) &= p = \text{cost.} && \text{per } t \geq 0
 \end{aligned}$$


Per valori del fattore di smorzamento minori della unità, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata all'equazione del moto (1) assume la forma (14) già determinata :

$$q_\ell(t) = e^{-\epsilon t} \left[i(A-B) \text{sen} \omega t + (A+B) \text{cos} \omega t \right] \quad (14)$$

Un integrale particolare della (1) è certamente

$q_p = p/K = q_s$ (spostamento statico)
per cui dalla (3) si ottiene :

$$q_r = e^{-\epsilon t} \left[i(A-B) \text{sen} \omega t + (A+B) \text{cos} \omega t \right] + \frac{p}{K} \quad (19)$$

Assumendo che all'istante $t=0$ l'oscillatore si trovi in quiete e dunque con le condizioni iniziali :

$$q_{\Gamma}(0) = q_0 = 0 \quad \rightarrow \quad A + B + \frac{p}{K} = 0$$

$$\dot{q}_{\Gamma}(0) = \dot{q}_0 = 0 \quad \rightarrow \quad -\varepsilon(A+B) + \omega i(A-B) = 0$$

ponendo $t=0$ nella (19) e nella sua derivata prima:

$$\dot{q}_{\Gamma}(t) = -\varepsilon e^{-\varepsilon t} \left[i(A-B) \operatorname{sen} \omega t + (A+B) \operatorname{cos} \omega t \right] + e^{-\varepsilon t} \omega \left[i(A-B) \operatorname{cos} \omega t - (A+B) \operatorname{sen} \omega t \right]$$

si ottengono i valori delle costanti di integrazione:

$$A + B = -\frac{p}{K}$$

$$A - B = -\frac{\varepsilon}{i \omega} \frac{p}{K} = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{p}{i K}$$

Sostituendo tali valori nella (19) risulta

$$q_{\Gamma}(t) = \frac{p}{K} \left[1 - e^{-\varepsilon t} \left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{sen} \omega t + \operatorname{cos} \omega t \right) \right] \quad (20)$$

ovvero nella forma equivalente :

$$q_{\Gamma}(t) = \frac{p}{K} \left[1 - \frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \right] \quad (20')$$

avendo posto

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$$

Le (20) o (20') esprimono la risposta dell'oscillatore semplice smorzato alla sollecitazione a gradino : si può osservare che tale moto è una oscillazione armonica smorzata intorno alla configurazione di equilibrio statico :

$$q_s = \frac{p}{K}$$

cui l'oscillatore tende al tempo infinito (v. fig. 9.2).

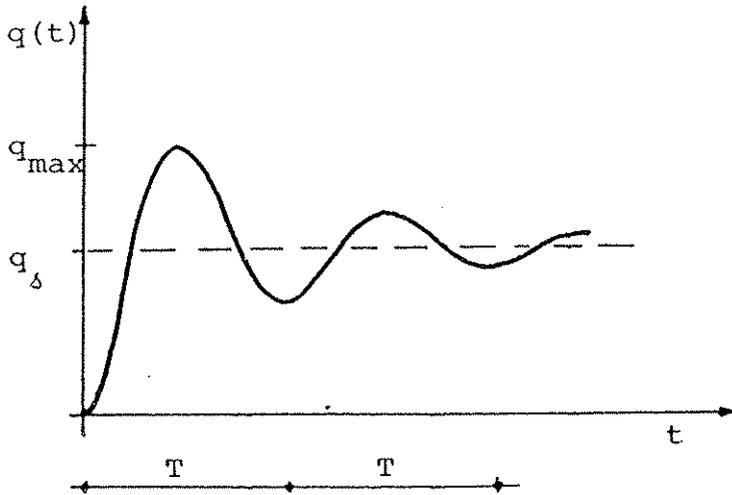


fig.9.2

Il rapporto q_{max}/q_{δ} fra lo spostamento massimo iniziale q_{max} e lo spostamento q_{δ} che si avrebbe se la sollecitazione p fosse applicata staticamente si definisce rapporto di *overshoot* (sovraccolpo).

Nel prosieguo, per comodità di esposizione, si assumerà la posizione :

$$\begin{aligned}
 G(t) &= 1 - e^{-\epsilon t} \left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{sen} \omega t + \cos \omega t \right) = \\
 &= 1 - \frac{e^{-\epsilon t}}{\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)
 \end{aligned} \tag{21}$$

per cui le (20) e (20') si potranno scrivere sinteticamente nella forma :

$$q_I(t) = \frac{p}{K} G(t) \tag{22}$$

La $G(t)$, come si può evincere facilmente dalla (22), rappresenta la risposta dell'oscillatore ad una sollecitazione a gradino di valore uguale alla rigidità della molla $p=K$.

La risposta alla sollecitazione a gradino unitaria $p=1$ vale allora :

$$q_{\Gamma}(t) = \frac{G(t)}{K}$$

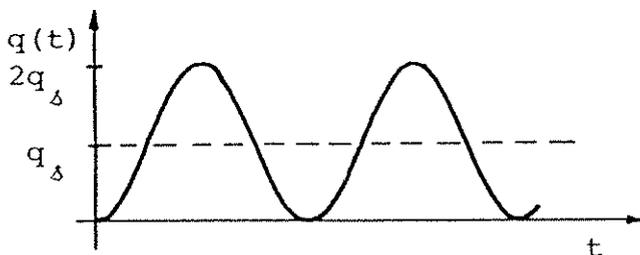
Nel caso limite $\beta=0$, di sistema conservativo, risultando $\epsilon=0$ e $\omega=\omega_0$, la (20) si scrive :

$$q_{\Gamma}(t) = \frac{p}{K} (1 - \cos \omega_0 t) \quad (23)$$

La risposta dell'oscillatore é in questo caso un moto armonico indefinito intorno alla configurazione statica q_{δ} caratterizzato da spostamenti massimi doppi dello spostamento statico q_{δ} e spostamenti minimi nulli :

$$q_{max} = 2q_{\delta} = \frac{2p}{K} \quad q_{min} = 0$$

Il diagramma della funzione (23) é del tipo riportato in fig.10.2



Il rapporto di overshoot é in questo caso uguale a due: dunque nel caso limite di sistema conservativo e condizioni iniziali $q_0=0$ e $\dot{q}_0=0$ l'applicazione di una forza eccitatrice a gradino provoca spostamenti della massa doppi di quelli indotti dall'applicazione statica della stessa forza.

Nel caso in cui il fattore di smorzamento risulti maggiore dell'unit  é possibile dimostrare (si evita la trattazione perch  di scarso interesse per il corso) che la risposta dell'oscillatore é un moto

aperiodico in cui la massa tende asintoticamente e senza oscillare, alla configurazione statica q_s

La conoscenza della risposta dell'oscillatore ad una sollecitazione a gradino pu  consentire lo studio del moto della stessa massa eccitata da una generica sollecitazione $p(t)$ e ci  potendo questa essere riprodotta come somma algebrica di n sollecitazioni a gradino di valori p_i .

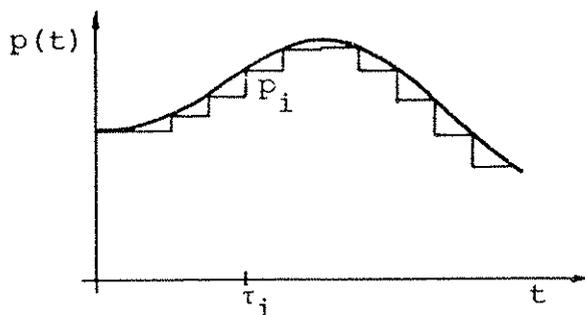


fig.11.2

Essendo la risposta dell'oscillatore alla sollecitazione a gradino di valore p_i ed applicata all'istante τ_i del tipo :

$$q_f(t) = 0 \quad \text{per } t < \tau_i$$

$$q_f(t) = \frac{p_i}{K} G(t - \tau_i) \quad \text{per } t \geq \tau_i$$

la legge del moto dell'oscillatore semplice smorzato eccitato dalla generica forza $p(t)$ si potr  ottenere come sommatoria delle risposte alle n sollecitazioni a gradino di valore p_i che approssimano la $p(t)$.

II.2.2) - SOLLECITAZIONE IMPULSIVA.

Si supponga di applicare all'oscillatore :

al tempo $t=\tau$ una sollecit. a gradino $p(t) = p$

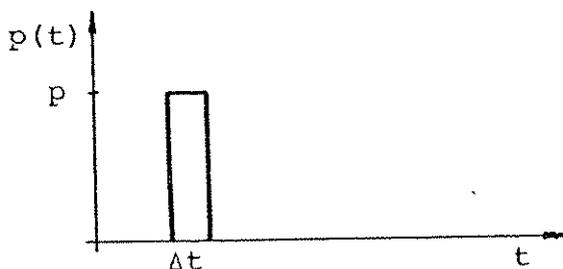
al tempo $t=\tau+\Delta t$ una sollecit. a gradino $p(t) = -p$,

ovvero se τ corrisponde all'istante iniziale $t=0$:

al tempo $t=0$ una sollecit. a gradino $p(t) = p$

al tempo $t=\Delta t$ una sollecit. a gradino $p(t) = -p$

In entrambi i casi la sollecitazione che si realizza viene definita *sollecitazione impulsiva* (funzione di Dirac) e l'impulso applicato all'oscillatore vale : $p\Delta t$.



Nel caso di sollecitazione impulsiva applicata al tempo $t=0$ la (22) consente di esprimere la risposta dell'oscillatore nella forma :

$$q_R(t) = \frac{p}{K} [G(t) - G(t+\Delta t)] = \frac{p\Delta t}{K} \left[\frac{G(t) - G(t+\Delta t)}{\Delta t} \right] \quad (24)$$

Al tendere a zero dell'intervallo di tempo Δt durante il quale la $p(t)$ sollecita l'oscillatore, l'impulso applicato vale

$$I = p dt$$

ed in tal caso il termine in parentesi della (24) assume il significato di derivata della funzione $G(t)$ rispetto al tempo e la risposta dell'oscillatore si scrive

$$q_R(t) = \frac{I}{K} \frac{dG}{dt} \quad (25)$$

(si osservi come la sollecitazione impulsiva rappresenta la derivata della sollecitazione a gradino). Derivando la (21) rispetto al tempo si ha :

$$\frac{dG}{dt} = \epsilon e^{-\epsilon t} \left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{sen} \omega t + \cos \omega t \right) - e^{-\epsilon t} \omega \left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos \omega t - \operatorname{sen} \omega t \right)$$

Sostituendo in essa i valori assunti da $\epsilon = \omega_0 \beta$ e $\omega = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2}$ e riducendo si ottiene :

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \omega_0 e^{-\epsilon t} \left(\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{sen} \omega t + \beta \cos \omega t - \beta \cos \omega t + \sqrt{1-\beta^2} \operatorname{sen} \omega t \right) = \\ &= \omega_0 e^{-\epsilon t} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \operatorname{sen} \omega t = \frac{\omega_0 \sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2} e^{-\epsilon t} \operatorname{sen} \omega t = \\ &= \frac{\omega}{1-\beta^2} e^{-\epsilon t} \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

Tramite la (25) la risposta dell'oscillatore si scrive in definitiva :

$$q_R(t) = \frac{I}{K} \frac{\omega}{1-\beta^2} e^{-\epsilon t} \operatorname{sen} \omega t \quad (26)$$

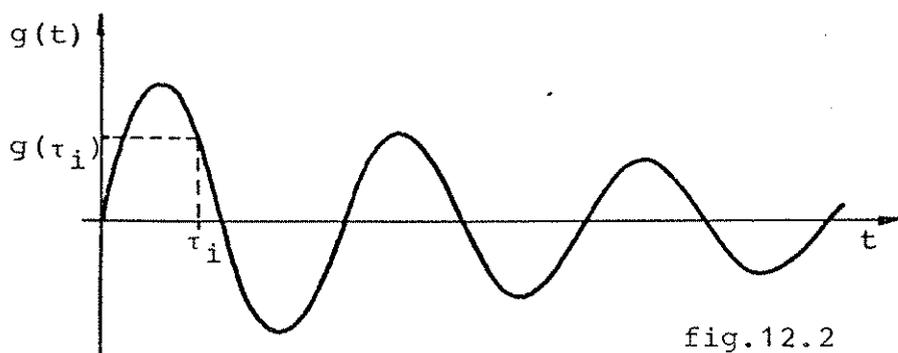
espressione legata alle ipotesi che sia $0 < \beta < 1$, $q_0 = \dot{q}_0 = 0$.
Con la posizione :

$$g(t) = \frac{1}{K} \frac{\omega}{1-\beta^2} e^{-\epsilon t} \operatorname{sen} \omega t$$

la (26) si può scrivere :

$$q_R(t) = I \cdot g(t)$$

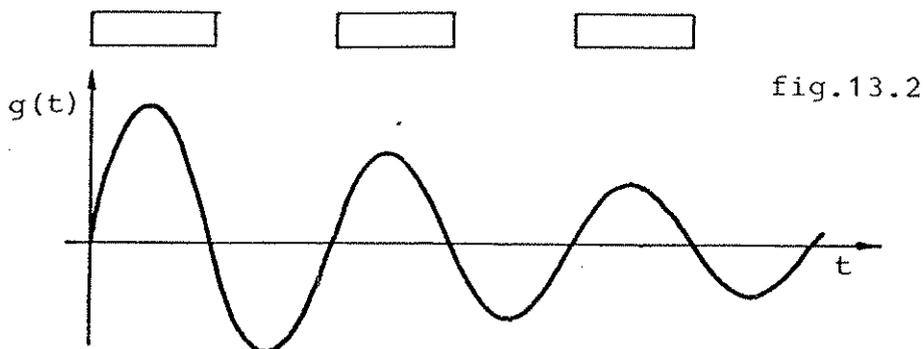
ove la funzione $g(t)$ assume il significato di risposta dell'oscillatore all'impulso elementare unitario e si presenta come in fig.12.2.



L'ordinata in corrispondenza della generica ascissa τ_i rappresenta la risposta dell'oscillatore al tempo $t = \tau_i$ per un impulso unitario applicato al tempo $t = 0$: ogni ordinata del diagramma rappresenta cioè lo spostamento che l'oscillatore subisce al variare del tempo per un impulso unitario impresso al sistema al tempo zero.

La funzione $g(t)$ può però riguardarsi anche come linea di influenza della risposta dell'oscillatore al tempo $t = 0$ per un impulso unitario viaggiante nel tempo; infatti considerando l'asse positivo delle ascisse come asse dei tempi *passati* la ordinata generica g_i rappresenta la risposta del sistema all'istante zero, dovuta ad un impulso unitario applicato all'oscillatore τ_i secondi prima. Sfruttando dunque la $g(t)$ come *linea d'influenza temporale* è possibile conoscere la risposta dello oscillatore indotta da un treno di impulsi appli-

cati al sistema, ovvero determinare la condizione più pericolosa indotta da una successione di impulsi che solleciti l'oscillatore e ciò caricando nel modo più gravoso la linea d'influenza (vedi fig.13.2). (Esempio di treno di impulsi é quello costituito da raffiche di vento o successioni di scosse sismiche di breve durata).



Nel caso particolare di sistema conservativo ($\beta=0$) la (26) assume la forma :

$$q_{fl}(t) = \frac{I}{K} \omega_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$$

e la massa oscilla indefinitamente intorno alla posizione $q=0$.

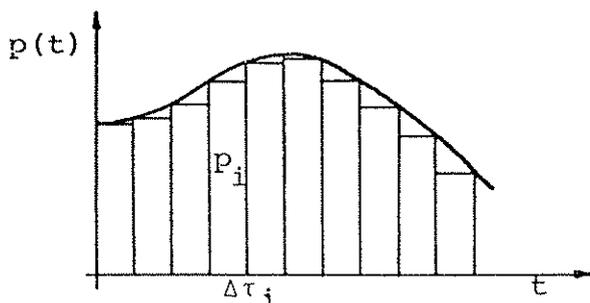
Analogamente a quanto detto per la sollecitazione a gradino, i risultati acquisiti per la sollecitazione impulsiva consentono anch'essi di studiare l'oscillatore semplice sottoposto alla generica sollecitazione $p(t)$ e ciò potendosi sempre riguardare quest'ultima come somma algebrica di sollecitazioni impulsive. Assumendo la risposta al generico impulso $I_i = p_i \Delta \tau_i$ applicato al tempo $t = \tau_i$ il valore :

$$q_{fl}(t) = 0 \quad t < \tau_i$$

$$q_{fl}(t) = p_i \Delta \tau_i g(t - \tau_i) \quad t \geq \tau_i$$

la risposta alla generica sollecitazione $p(t)$ sarà

somma delle risposte ai singoli impulsi in cui si immagina scomposta la $p(t)$.



Al limite assumendo intervalli di tempo infinitesimi $d\tau$ la sommatoria si trasforma in integrale e la risposta dell'oscillatore assume l'espressione*:

$$q(t) = \int_0^t g(t-\tau) p(\tau) d\tau$$

che si definisce *integrale di Duhamel* e rappresenta già la risposta completa dell'oscillatore alla generica sollecitazione $p(t)$, somma della parte dovuta al transitorio e di quella a regime, purché le condizioni iniziali siano $q_0=0$ e $\dot{q}_0=0$ (essendo state in tale ipotesi ricavate le costanti di integrazione) ed il sistema sia a basso smorzamento.

E' importante osservare che il poter considerare la sollecitazione generica come somma di impulsi o di sollecitazioni a gradino o di funzioni armoniche (come si vedrà nel seguito) presuppone la *sovrapponibilità degli effetti* e dunque è legata all'*ipotesi di linearità del moto* ovvero all'assunto che tutti i termini della equazione del moto siano lineari in \ddot{q} , \dot{q} , q .

II.2.3) - SOLLECITAZIONE ARMONICA.

Si consideri un carico variabile con legge armonica del tipo :

$$p(t) = c \operatorname{sen} \Omega t + d \operatorname{cos} \Omega t \quad (27)$$

* essendo τ l'istante generico e t l'istante nel quale viene calcolato lo spostamento $q(t)$.

essendo Ω la frequenza eccitatrice a meno di 2π ed essendo c e d due costanti che definiscono :

$$\text{l'ampiezza} \quad p_0 = \sqrt{c^2 + d^2}$$

$$\text{e la fase} \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{d}{c}$$

In tale caso un integrale particolare q_p della equazione (1) sarà del tipo :

$$q_p(t) = a \operatorname{sen} \Omega t + b \operatorname{cos} \Omega t \quad (28)$$

Per la determinazione delle costanti a e b basta introdurre la (27) e la (28) derivata nella equazione (1).

Essendo :

$$\dot{q}_p(t) = \Omega(a \operatorname{cos} \Omega t - b \operatorname{sen} \Omega t)$$

$$\ddot{q}_p(t) = \Omega^2(-a \operatorname{sen} \Omega t - b \operatorname{cos} \Omega t) = -\Omega^2 q_p$$

l'equazione (1) si scrive :

$$\begin{aligned} (K - m\Omega^2)(a \operatorname{sen} \Omega t + b \operatorname{cos} \Omega t) + h\Omega(a \operatorname{cos} \Omega t - b \operatorname{sen} \Omega t) = \\ = c \operatorname{sen} \Omega t + d \operatorname{cos} \Omega t \end{aligned}$$

e raggruppando i termini in seno e coseno :

$$\operatorname{sen} \Omega t \left[a(K - m\Omega^2) - b\Omega h - c \right] + \operatorname{cos} \Omega t \left[b(K - m\Omega^2) + a\Omega h - d \right] = 0$$

Perché sia soddisfatta tale equazione devono necessariamente risultare nulli i coefficienti di $\operatorname{sen} \Omega t$ e $\operatorname{cos} \Omega t$:

$$a(K - m\Omega^2) - b\Omega h - c = 0$$

$$b(K - m\Omega^2) + a\Omega h - d = 0$$

Dividendo per m e ordinando si ottiene

$$a \left(\frac{K}{m} - \Omega^2 \right) - b\Omega \frac{h}{m} = \frac{c}{m}$$

$$a\Omega \frac{h}{m} + b \left(\frac{K}{m} - \Omega^2 \right) = \frac{d}{m}$$

e ricordando che : $\sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_0 \rightarrow \frac{1}{m} = \frac{\omega_0^2}{K}$

e che

$$\frac{h}{2\sqrt{mK}} = \beta \rightarrow \frac{h}{m} = 2\beta\omega_0$$

sostituendo nel sistema precedente si ha :

$$a(\omega_0^2 - \Omega^2) - b(2\beta\omega_0) = c\left(\frac{\omega_0^2}{K}\right)$$

$$a(2\beta\omega_0) + b(\omega_0^2 - \Omega^2) = d\left(\frac{\omega_0^2}{K}\right)$$

Dividendo entrambe le equazioni per ω_0^2 e chiamando col simbolo $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_0$ il rapporto fra frequenza angolare eccitatrice e frequenza angolare naturale non smorzata del sistema si scrive :

$$a(1 - \bar{\Omega}^2) - b(2\beta\bar{\Omega}) = \frac{c}{K}$$

$$a(2\beta\bar{\Omega}) + b(1 - \bar{\Omega}^2) = \frac{d}{K}$$

Le cui soluzioni sono :

$$a = \frac{1}{K} \frac{(1 - \bar{\Omega}^2)c + 2\beta\bar{\Omega}d}{(1 - \bar{\Omega}^2)^2 + 4\beta^2\bar{\Omega}^2}$$

$$b = \frac{1}{K} \frac{-2\beta\bar{\Omega}c + (1 - \bar{\Omega}^2)d}{(1 - \bar{\Omega}^2)^2 + 4\beta^2\bar{\Omega}^2}$$

e con la posizione

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - \bar{\Omega}^2)^2 + 4\beta^2\bar{\Omega}^2}} = M \quad \text{coefficiente di magnifi-} \\ \text{cazione}$$

le dette costanti si scrivono :

$$a = \frac{1}{K} \left[(1 - \bar{\Omega}^2)c + 2\beta\bar{\Omega}d \right] M^2 \\ b = \frac{1}{K} \left[-2\beta\bar{\Omega}c + (1 - \bar{\Omega}^2)d \right] M^2 \quad (29)$$

Le (29) sostituite nella (28) forniscono l'integrale particolare q_p che sommato all'integrale generale q_ℓ dà luogo alla soluzione del problema per tale sollecitazione.

La legge di carico oltre che nella forma (27) può esprimersi con una equazione del tipo :

$$p(t) = p_0 \text{ sen}(\Omega t + \theta) \quad (30)$$

ove : Ω frequenza eccitatrice a meno di 2π
 θ fase dell'eccitazione
 p_0 ampiezza dell'eccitazione

Le costanti θ e p_0 sono legate alle costanti c e d della forma (27) dalle relazioni dirette :

$$p_0 = \sqrt{c^2 + d^2}$$

$$\theta = \text{arctg} \frac{d}{c}$$

e dalle relazioni inverse :

$$c = p_0 \cos \theta \quad (31)$$

$$d = p_0 \text{ sen} \theta$$

In tale caso l'integrale particolare sarà del tipo:

$$q_p = \psi_0 \text{ sen}(\Omega t + \lambda) \quad (32)$$

essendo ψ_0 l'ampiezza della risposta
 λ la fase della risposta*

legate alle costanti a e b della soluzione nella forma (28) dalle relazioni dirette :

$$\psi_0 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (33)$$

$$\lambda = \text{arctg} \frac{b}{a} \quad (34)$$

e dalle relazioni inverse :

$$a = \psi_0 \cos \lambda$$

$$b = \psi_0 \text{ sen} \lambda$$

* ovvero il ritardo della risposta rispetto alla eccitazione.

Per ottenere l'ampiezza della risposta ψ basta sostituire nell'espressione (33) i valori delle costanti a e b determinati nelle (29)

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \frac{M^2}{K} \sqrt{\left[(1-\bar{\Omega}^2)c + 2\beta\bar{\Omega}d \right]^2 + \left[-2\beta\bar{\Omega}c + (1-\bar{\Omega}^2)d \right]^2} = \\ &= \frac{M^2}{K} \sqrt{(1-\bar{\Omega}^2)^2(c^2+d^2) + 4\beta^2\bar{\Omega}^2(c^2+d^2)}\end{aligned}$$

e ricordando che $p_0 = \sqrt{c^2+d^2}$ si ha :

$$\psi_0 = M^2 \frac{p_0}{K} \sqrt{(1-\bar{\Omega}^2)^2 + 4\beta^2\bar{\Omega}^2}$$

Essendo per la definizione di coefficiente di magnificazione :

$$\sqrt{(1-\bar{\Omega}^2)^2 + 4\beta^2\bar{\Omega}^2} = \frac{1}{M}$$

si può scrivere :

$$\psi_0 = M \cdot \frac{p_0}{K} = M q_\delta \quad (35)$$

ove $\frac{p_0}{K} = q_\delta$ rappresenta lo spostamento che la massa subirebbe se il carico p_0 fosse applicato staticamente.

Il coefficiente di magnificazione M rappresenta dunque l'amplificazione o la riduzione che gli spostamenti del sistema subiscono quando la sollecitazione esterna invece che staticamente è applicata dinamicamente con legge armonica.

In fig.14.2 è rappresentata la funzione :

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1-\bar{\Omega}^2)^2 + 4\beta^2\bar{\Omega}^2}} \quad (36)$$

ovvero la legge di variazione del coefficiente di magnificazione M in funzione del rapporto $\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0}$ fra frequenza eccitatrice e frequenza propria del sistema per alcuni valori del fattore di smorzamento β .

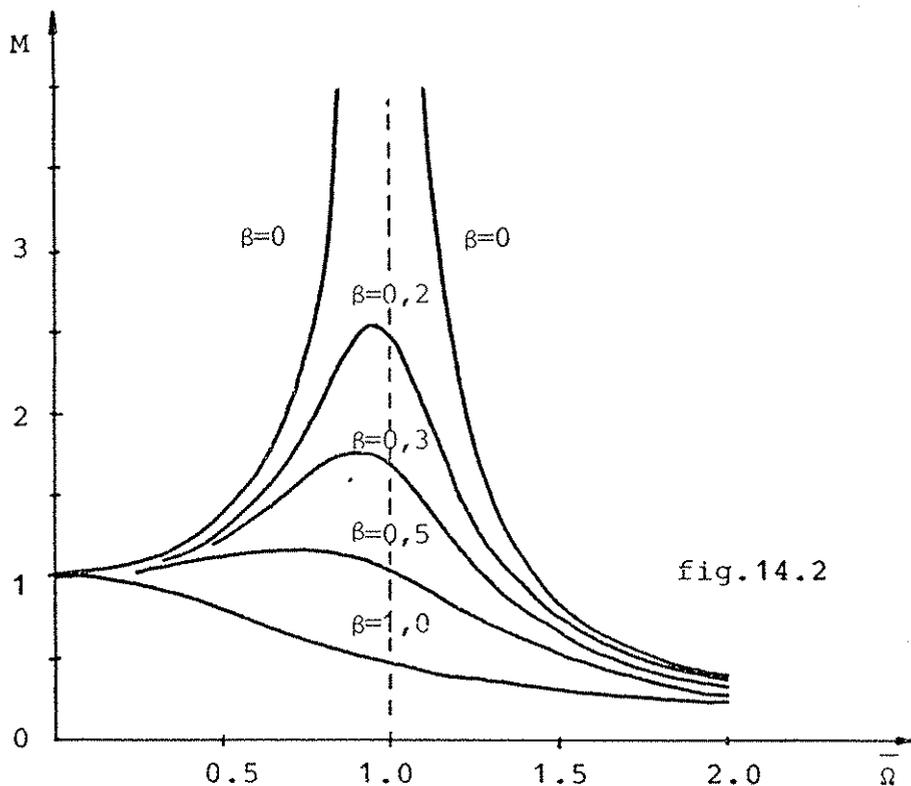


fig.14.2

Il massimo valore di M si ottiene quando il denominatore della (36) è minimo; derivando quindi il radicando ed eguagliando a zero si ha:

$$\frac{d}{d} [(1-\bar{\Omega}^2)^2 + 4\beta^2\bar{\Omega}^2] = 4\bar{\Omega}^3 - 4\bar{\Omega} + 8\beta^2\bar{\Omega} = 0$$

le cui soluzioni non negative sono^(*):

$$\bar{\Omega} = 0 \quad \text{per} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < \beta < \infty$$

$$\bar{\Omega} = \sqrt{1-2\beta^2} \quad \text{per} \quad 0 < \beta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(*) La soluzione negativa $\bar{\Omega} = -\sqrt{1-2\beta^2}$ non ha interesse non potendo essere $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_0 < 0$.

e rappresentano i valori di $\bar{\Omega}$ in corrispondenza dei quali il coefficiente di magnificazione attinge i valori massimi :

$$M_{max} = 1 \quad \text{per} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \beta \leq \infty$$

$$M_{max} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{per} \quad 0 < \beta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Da quanto detto si evince allora immediatamente esistere un valore limite del fattore di smorzamento $\beta_{lim} = 1/\sqrt{2} \approx 0,707$ che rappresenta l'elemento di separazione fra due distinti comportamenti.

Per sistemi aventi $\beta > \beta_{lim}$ il coefficiente di magnificazione risulta sempre riduttivo tendendo al massimo all'unità al tendere a zero di $\bar{\Omega}$; tali sistemi presentano cioè oscillazioni le cui ampiezze risultano minori degli spostamenti massimi che si verificherebbero se la sollecitazione esterna fosse applicata staticamente e ciò bene si comprende fisicamente se si pensa che per elevati valori dello smorzamento l'unico modo per la massa di seguire eccitazioni con frequenza via via crescente è quello di ridurre l'ampiezza delle oscillazioni.

Per sistemi aventi $\beta < \beta_{lim}$, invece, il coefficiente di magnificazione può essere sia riduttivo che amplificativo, al variare di $\bar{\Omega}$ esso attinge comunque un valore massimo, funzione di β , quando $\bar{\Omega} = \sqrt{1-2\beta^2}$ ovvero, essendo $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_0$, quando

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1-2\beta^2} \quad (37)$$

Per tale valore della frequenza eccitatrice si verifica il cosiddetto fenomeno della risonanza per cui gli spostamenti della massa subiscono le massime amplificazioni rispetto ai valori che assumereb

bero se la sollecitazione esterna fosse applicata staticamente.

Confrontando la (37) con l'espressione della frequenza angolare naturale smorzata $\omega = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2}$ si nota che quando il fattore di smorzamento β è diverso da zero la risonanza si verifica per valori della frequenza eccitatrice Ω poco minori di ω_0 ma molto prossimi ad esso, ovvero il massimo valore del coefficiente di magnificazione si attinge per valori della frequenza eccitatrice Ω e della frequenza angolare non smorzata ω_0 quasi uguali fra loro: è per tale motivo che, dato un sistema oscillante, le eccitazioni armoniche più pericolose sono quelle per le quali risulta

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\Omega} \approx 1.$$

Ancora dalla osservazione della fig.14.2 si può notare che, a parità di β , sollecitazioni aventi frequenze Ω molto basse rispetto alla frequenza propria ω_0 del sistema, tali cioè che sia $\Omega/\omega_0 \approx 0$, non comportano alcuna amplificazione del moto: in tali condizioni risultando $M \approx 1$ l'oscillatore segue la eccitazione, senza amplificazioni dinamiche, in perfetta sincronia con essa e la risposta risulta praticamente indipendente dal valore di β e dunque più facilmente determinabile assumendo $\beta=0$. Eccitazioni, infine, caratterizzate da frequenze Ω molto alte rispetto alla frequenza propria ω_0 del sistema, tali cioè che $\Omega/\omega_0 \gg 1$, comportano valori riduttivi del coefficiente di amplificazione e cioè $M < 1$: si dice in tale caso che l'oscillatore non sente la sollecitazione esterna. Anche in questo caso la risposta risulta pressoché indipendente da β e dunque più agevolmente calcolabile con $\beta=0$. Le considerazioni testé svolte non devono intendersi limitate alle sole eccitazioni esterne di tipo sinusoidale ma possono estendersi a qualunque tipo di sollecitazione e ciò in considerazione del fatto

che tramite l'analisi armonica è possibile esprimere una funzione generica, definita in un intervallo finito, come combinazione lineare di più funzioni armoniche con opportuni coefficienti.

Tale procedimento consente dunque di studiare il moto dell'oscillatore eccitato da una sollecitazione esterna $p(t)$ di tipo qualunque (purché esprimibile con una funzione) sommando le risposte dello oscillatore alle singole sollecitazioni armoniche componenti la $p(t)$: per quanto innanzi detto le armoniche caratterizzate da frequenze Ω basse rispetto alla frequenza propria del sistema passeranno inalterate, le armoniche con frequenze eccitatrici prossime alla ω_0 risulteranno amplificate e dunque saranno le più pericolose, mentre le armoniche aventi frequenze elevate rispetto alla frequenza propria del sistema non saranno avvertite dallo oscillatore.

Con riferimento alla risposta di una struttura reale sottoposta ad un sisma, immaginando una eccitazione indotta dal terremoto di tipo armonico, si possono quindi verificare i seguenti comportamenti :

Caso $\Omega \ll \omega_0$ ovvero struttura rigida (con elevato $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ e ridotto periodo T) soggetta a scosse di bassa frequenza: la massa segue il movimento del terreno come se fosse sollecitata staticamente dalla forza di inerzia e dunque senza alcuna amplificazione dinamica del moto;

Caso $\Omega \approx \omega_0$ ovvero struttura evente periodo proprio di oscillazione prossimo alla frequenza eccitatrice del sisma: spostamenti e tensioni subiscono la massima amplificazione per cui la struttura si trova certamente nelle condizioni più pericolose;

Caso $\Omega \gg \omega_0$ struttura deformabile (con basso $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ ed elevato periodo T) sottoposta a sisma con frequenza molto alta : spostamenti e tensioni risultano in

tal caso minori di quelli che provocherebbe l'applicazione statica della forza di inerzia essendo la massa quasi ferma rispetto ad un riferimento fisso.

Ritornando all'esame del coefficiente di magnificazione nel caso di sistemi conservativi ($\beta=0$) risulta:

$$M = \frac{1}{|1-\bar{\Omega}^2|}$$

ed il diagramma di \dot{M} in funzione di $\bar{\Omega}$ si presenta come in fig.15.2.

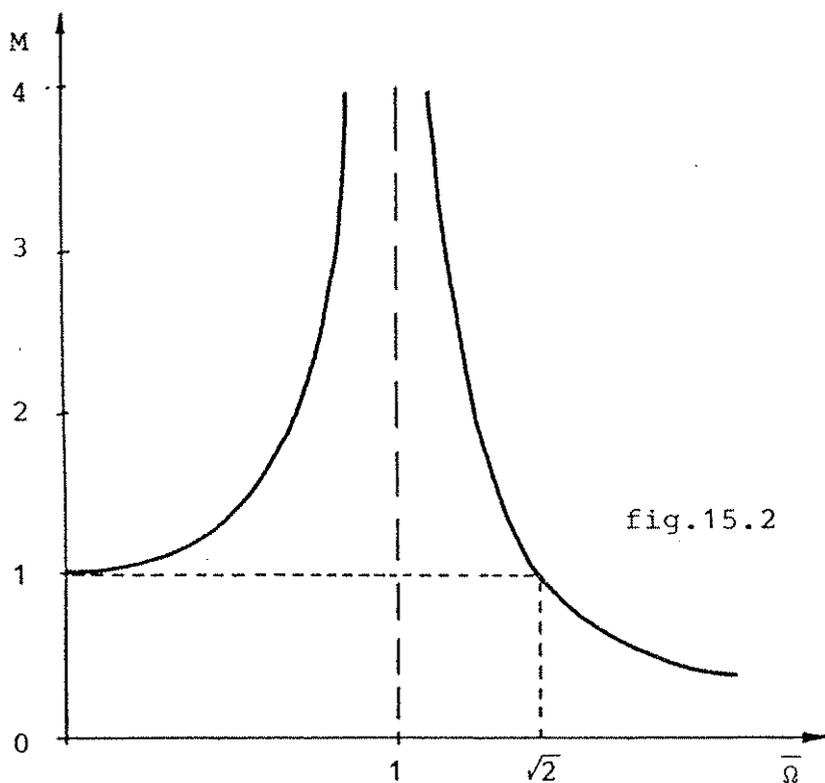
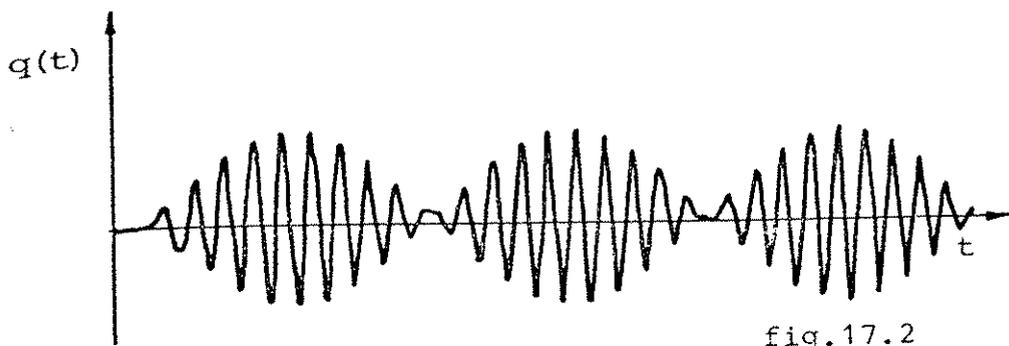
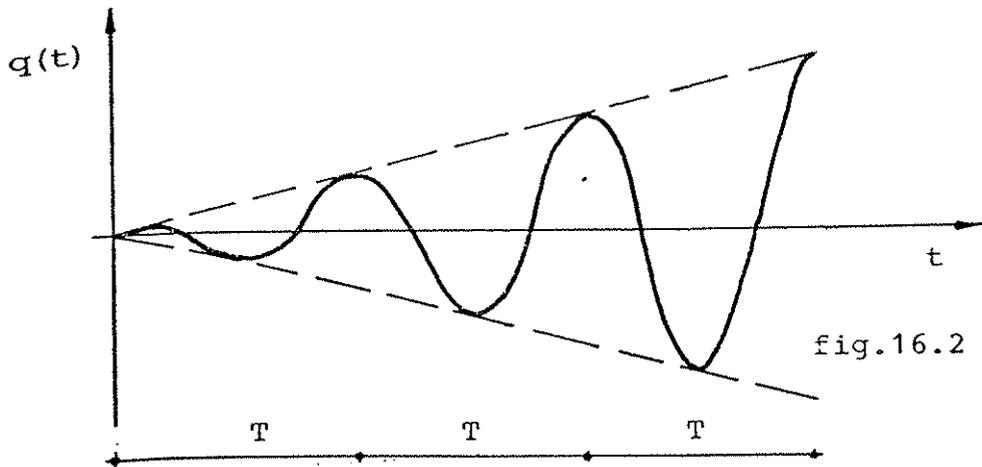


fig.15.2

Si osserva che per valori di $\bar{\Omega} < \sqrt{2}$ il coefficiente di magnificazione $M > 1$, mentre risulta $M < 1$ per $\bar{\Omega} > \sqrt{2}$. Quando $\bar{\Omega} = 1$ ovvero $\Omega = \omega_0$ risulta $M = \infty$ e dunque si verifica il fenomeno della risonanza per cui l'ampiezza

delle oscillazioni aumenta indefinitamente col tempo ed il diagramma della risposta si presenta come in fig.16.2.

Per valori di $\Omega=1$ ovvero per $\Omega=\omega_0$, in prossimità cioè della risonanza, il moto si presenta come illustrato in fig.17.2 ed il fenomeno viene detto dei battimenti.



Tornando alla determinazione della fase λ della risposta, analogamente a quanto già fatto per l'ampiezza ψ_0 , si sostituiscono nella (34) le espressioni

delle costanti a e b calcolate in (29), ottenendo:

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{-2\beta\bar{\Omega} c + (1-\bar{\Omega}^2)d}{(1-\bar{\Omega}^2)c + 2\beta\bar{\Omega} d}$$

ed introducendo nella precedente espressione le relazioni (31) che legano le costanti c e d all'ampiezza p_0 ed alla fase θ dell'eccitazione, si ha:

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{-2\beta\bar{\Omega} \cos\theta + (1-\bar{\Omega}^2) \operatorname{sen}\theta}{(1-\bar{\Omega}^2) \cos\theta + 2\beta\bar{\Omega} \operatorname{sen}\theta}$$

e dividendo numeratore e denominatore per $(1-\bar{\Omega}^2) \cos\theta$ si ha:

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\theta - \frac{2\beta\bar{\Omega}}{1-\bar{\Omega}^2}}{1 + \frac{2\beta\bar{\Omega}}{1-\bar{\Omega}^2} \operatorname{tg}\theta}$$

Ponendo $\frac{2\beta\bar{\Omega}}{1-\bar{\Omega}^2} = \operatorname{tg}\alpha$ ovvero $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\bar{\Omega}}{1-\bar{\Omega}^2}$

si può scrivere

$$\begin{aligned} \lambda &= \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\theta} = \\ &= \operatorname{arctg} \operatorname{tg}(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

da cui

$$\lambda = \theta + \alpha \quad (38)$$

L'angolo α rappresenta dunque lo sfasamento fra lo spostamento dinamico e la forza sollecitante.

Sostituendo nella (32) le espressioni di ψ_0 e λ calcolate in (35) e (38) si ottiene l'integrale particolare cercato

$$q_p = M \frac{p_0}{K} \operatorname{sen}(\Omega t + \theta + \alpha)$$

La soluzione completa si otterrà quindi sommando alla $q_p(t)$ l'integrale generale $q_e(t)$ che per i

sistemi dotati di basso smorzamento si può esprimere nella forma :

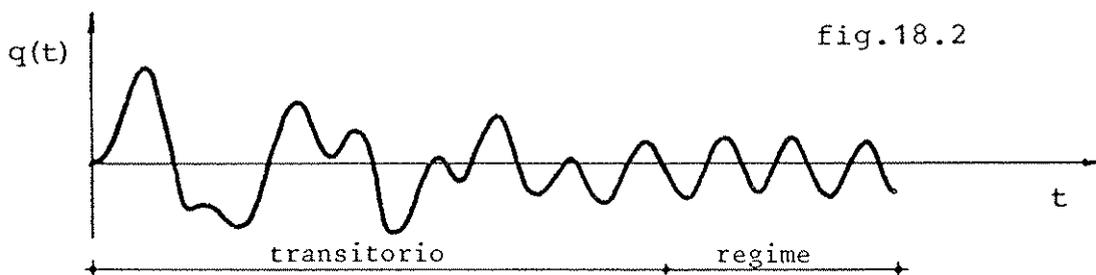
$$q_{\ell}(t) = C e^{-\epsilon t} \text{sen}(\omega t + \gamma) \quad (15')$$

La risposta dell'oscillatore semplice alla sollecitazione armonica vale dunque

$$q(t) = q_{\ell}(t) + q_p(t) = C e^{-\epsilon t} \text{sen}(\omega t + \gamma) + M \frac{p_0}{K} \text{sen}(\Omega t + \theta + \alpha) \quad (39)$$

ove le costanti C e γ vanno determinate imponendo le condizioni iniziali che, come si vede dalla (39), influenzano il solo moto *transitorio* ma non quello a *regime*. Si osservi che per la presenza dell'esponenziale il transitorio, rappresentato dal primo addendo, si esaurisce rapidamente, risultando dunque interessante solo il secondo addendo che descrive il fenomeno a regime.

In fig.18.2. è riportato il diagramma completo del moto di un oscillatore semplice smorzato, sollecitato da una eccitazione armonica, con le condizioni che sia $0 < \beta < 1$, $q_0 = 0$, $\dot{q}_0 = 0$.



Risulta immediato osservare come il *transitorio* iniziale vada esaurendosi rapidamente per dare luogo al moto a *regime* che, come l'eccitazione, risulta anch'esso periodico.

Lo studio della risposta dell'oscillatore semplice ad una sollecitazione armonica consente come si è

già accennato di risolvere il problema del sistema sottoposto ad una sollecitazione esterna di tipo qualunque sviluppando il carico $p(t)$, sempreché rappresentabile da una funzione, in serie di Fourier come somma di sollecitazioni armoniche :

$$p(t) = p_m + \sum_1^n a_i \cos i\omega t + \sum_1^n b_i \sin i\omega t \quad (40)$$

ovvero nella forma :

$$p(t) = p_m + \sum_1^n a_i \cos(i\omega t + \phi_i) \quad \text{per } i = 1, \dots, n$$

essendo le costanti legate dalle relazioni :

$$p_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

$$\phi_i = \arctg \frac{b_i}{a_i}$$

Indicando con T il campo di definizione della funzione $p(t)$ nel caso generico, ovvero il suo periodo se trattasi di sollecitazione avente legge periodica, i coefficienti della (40), omettendo per brevità gli sviluppi di calcolo, risultano così espressi :

$$p_m = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad \text{valor medio della funzione nell'intervallo } T$$

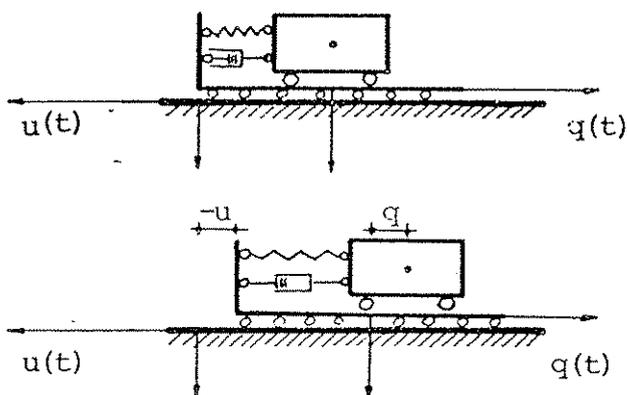
$$a_i = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos i\omega t \cdot dt \quad \text{per } i=1, \dots, n$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin i\omega t \cdot dt$$

In particolare, come si è già detto, delle armoniche in cui può scomporsi l'eccitazione esterna, quelle aventi frequenza prossima alla frequenza propria del sistema oscillante verranno esaltate nella risposta, quelle aventi frequenza bassa resteranno inalterate, quelle con frequenza elevata saranno eliminate, cosicché può affermarsi che il sistema esplica, nei riguardi della sollecitazione ad esso applicata, una funzione di filtro.

II.3) - OSCILLAZIONI INDOTTE DA SISMI.

Qualora la sollecitazione esterna impressa al sistema non sia costituita da una forza $p(t)$ ma da uno spostamento $u(t)$, (come nel caso dei terremoti) la soluzione del problema rimane formalmente analoga. Supposto infatti che al supporto dell'oscillatore sia impresso uno spostamento $u(t)$ rispetto ad un riferimento fisso e detto sempre $q(t)$ lo spostamento relativo della massa rispetto al supporto, lo spostamento assoluto della massa é fornito dalla somma algebrica dei due spostamenti : $q(t) - u(t)$.



La forza d'inerzia totale applicata alla massa vale in tal caso :

$$m(\ddot{q} - \ddot{u})$$

e dunque l'equazione del moto si scrive

$$m(\ddot{q} - \ddot{u}) + h\dot{q} + Kq = 0$$

ovvero

$$m\ddot{q} + h\dot{q} + Kq = m\ddot{u}$$

ove il termine a secondo membro, rappresenta la forza d'inerzia applicata alla massa m per effetto della accelerazione \ddot{u} impressa al supporto e costituisce, in tal caso, la forza eccitatrice del sistema.

Nel caso in cui lo spostamento $u(t)$ vari con una legge armonica del tipo :

$$u(t) = c \operatorname{sen} \Omega t + d \operatorname{cos} \Omega t$$

risulta

$$\ddot{u}(t) = -\Omega^2 (c \operatorname{sen} \Omega t + d \operatorname{cos} \Omega t)$$

e dunque l'equazione del moto assume l'espressione:

$$m\ddot{q} + h\dot{q} + Kq = m\Omega^2 (c \operatorname{sen} \Omega t + d \operatorname{cos} \Omega t)$$

Il problema é cioè formalmente identico al caso già trattato in II.2.3) ove si consideri applicata al sistema una forza fittizia di valore :

$$p(t) = m\Omega^2 (c \operatorname{sen} \Omega t + d \operatorname{cos} \Omega t)$$

ovvero la (27) moltiplicata per $m\Omega^2$.

Nel caso generale, invece, in cui l'eccitazione esterna del sistema sia di tipo qualunque, la risposta si può esprimere mediante l'integrale di Duhamel:

$$q(t) = \int_0^t g(t-\tau) p(\tau) d\tau$$

sostituendo a $p(\tau)$ la forza d'inerzia $m \ddot{u}(\tau)$:

$$q(t) = \int_0^t g(t-\tau) m \ddot{u}(\tau) d\tau$$

Introducendo l'espressione di $g(t-\tau)$ e riducendo si ha :

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_0^t \frac{1}{K} \frac{\omega}{1-\beta^2} e^{-\varepsilon(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega(t-\tau) m \ddot{u}(\tau) d\tau = \\ &= \frac{m}{K} \frac{\omega}{1-\beta^2} \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega(t-\tau) \ddot{u}(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\omega^2} \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega(t-\tau) \ddot{u}(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega(t-\tau) \ddot{u}(\tau) d\tau \quad (41) \end{aligned}$$

Ai fini della progettazione di una struttura sotto posta a sollecitazioni sismiche, tuttavia, non interessa la legge $q(t)$ del moto ma risulta sufficiente conoscere la massima risposta del sistema che corrisponde in effetti alle condizioni più gravose per la struttura : dall'esame della (41) si evince immediatamente che lo spostamento $q(t)$ attinge il valore massimo quando massimo è l'integrale a secondo membro. Assegnato dunque un accelerogramma di progetto, ovvero la funzione $\ddot{u}(\tau)$, e note le caratteristiche dell'oscillatore semplice (massa, frequenza angolare e fattore di smorzamento) è possibile calcolare il massimo dell'integrale al variare di t ; indicando con la notazione S_v tale valore si potrà scrivere :

$$q_{max} = \frac{1}{\omega} S_v \quad (42)$$

Per comprendere il significato fisico di S_v è sufficiente osservare che se il sistema fosse conservativo l'energia posseduta dalla massa dovrebbe mantenersi costante durante tutto il moto, ovvero dovrebbero risultare uguali la massima energia potenziale e la massima energia cinetica :

$$\frac{1}{2} K q_{max}^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}_{max}^2$$

Da tale equazione è allora possibile ricavare la relazione :

$$\left| q_{max} \right| = \frac{1}{\omega_0} \left| \dot{q}_{max} \right| \quad (43)$$

Confrontando la (43) con la (42), e considerando che i sistemi reali non sono mai conservativi, si evince che il valore di S_v risulta molto prossimo a quello della massima velocità posseduta dal sistema, da cui l'appellativo dato ad S_v di *velocità spettrale*; analogamente lo spostamento massimo q_{max} viene definito *spostamento spettrale* e si indica

con la notazione S_d .

E' interessante notare, che, essendo le dipendenze fra S_d ed S_v e fra S_v e \ddot{u} di tipo lineare, i massimi spostamenti subiti dalla massa cresceranno proporzionalmente agli accelerogrammi dell'eccitazione impressa al sistema.

Ancora, nell'ipotesi di sistema conservativo, l'equazione del moto

$$m \ddot{q} + K q = 0$$

fornisce la seguente relazione :

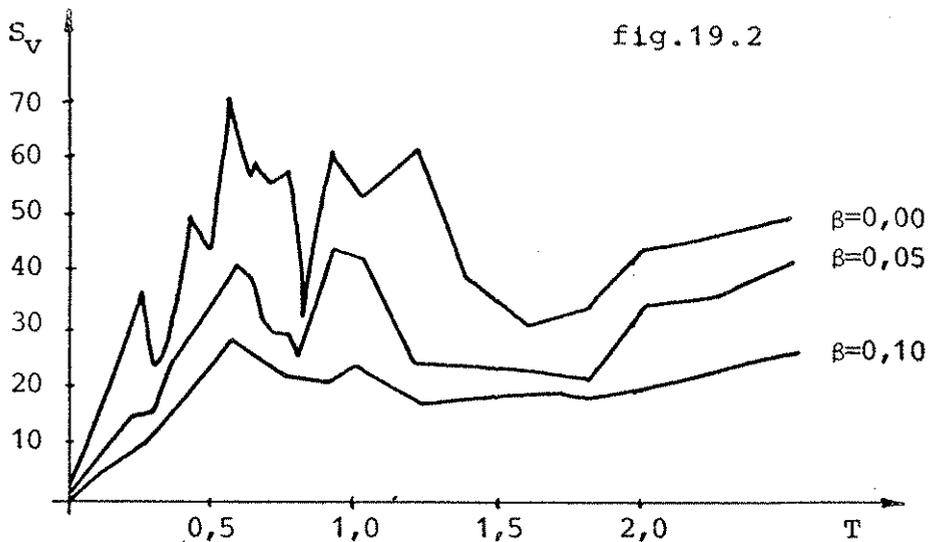
$$\left| \ddot{q}_{max} \right| = \omega_0^2 \left| q_{max} \right| ; \quad (44)$$

dal confronto della (44) con la (42) si evince allora che per sistemi reali il prodotto della velocità spettrale S_v per la frequenza angolare smorzata del sistema è quasi uguale alla massima accelerazione subita dalla massa : indicando con la notazione S_a tale valore, che viene definito anche *accelerazione spettrale*, si può scrivere dunque :

$$S_a = \omega^2 S_d = \omega S_v \quad (45)$$

relazione che lega tra loro accelerazione, spostamento e velocità spettrale tramite ω .

Ciò premesso, assegnato l'accelerogramma di un terremoto, ovvero $\ddot{u}(\tau)$, e definito il fattore di smorzamento β del sistema, si possono determinare i valori assunti da S_v al variare della rigidezza della struttura ovvero del suo periodo proprio di oscillazione T (e della frequenza angolare ω): tracciando i diagrammi di S_v in funzione di T per diversi valori del fattore di smorzamento β si ottiene, per ogni sisma definito da $\ddot{u}(\tau)$, una famiglia di curve che prende nome di *spettro di risposta in termini di velocità*. Nella fig.19.2. è riportato ad esempio lo spettro di risposta in termini di velocità determinato per l'accelerogramma corrispondente alla componente N-S del terremoto di El Centro verificatosi nel maggio 1940.



E' possibile dimostrare che la curva corrispondente a $\beta=0$, ovvero all'oscillatore ideale non smorzato, rappresenta altresì il contenuto in frequenze del terremoto.

Noto dunque lo spettro di risposta in termini di velocità è possibile conoscere per qualunque oscillatore semplice smorzato il valore della massima velocità che esso raggiunge quando è sollecitato dal sisma avente accelerogramma $\ddot{u}(\tau)$.

Per la (45), dividendo le ordinate di tale spettro per ω , è possibile ricavare lo spettro di risposta in termini di spostamento che fornisce dunque lo spostamento massimo raggiunto dal sistema di periodo T e smorzamento β sollecitato dall'accelerogramma $\ddot{u}(\tau)$: tale valore risulta interessante in quanto moltiplicato per la rigidezza K fornisce il massimo cimento cui è sottoposto, durante il terremoto, il vincolo elastico e dunque la struttura. Moltiplicando invece le ordinate dello spettro di risposta in termini di velocità per ω , sempre per la stessa relazione (45), è possibile costruire lo spettro di risposta in termini di accelerazione: la conoscenza di tale diagramma riveste enorme importanza

in quanto consente di definire immediatamente la massima accelerazione raggiunta da un oscillatore semplice avente periodo T e smorzamento β e dunque di risalire alla massima forza d'inerzia mS_a applicata alla massa per effetto del sisma $\ddot{u}(\tau)$. Se per lo studio a posteriori delle massime sollecitazioni indotte nei vari oscillatori semplici da un ben determinato sisma di accelerogramma $\ddot{u}(\tau)$ è sufficiente possedere i tre spettri di risposta relativi a quel sisma, ai fini progettuali risulta necessario conoscere invece gli spettri relativi a più terremoti ovvero quelli più significativi verificatisi nella stessa zona durante gli ultimi decenni. Le curve degli spettri rappresentano in tal caso, per ogni valore di β , i valori medi relativi ad un certo numero di sismi ovvero i massimi valori, rispettivamente della velocità, dello spostamento e dell'accelerazione che l'oscillatore raggiungerebbe mediamente per effetto del più severo terremoto verificatosi nella regione.

E' da notare che, prima di farne la media, le ordinate degli spettri di risposta relativi ad ogni terremoto vengono *normalizzate* ovvero divise per un coefficiente proporzionale al valore medio, che prende nome di *coefficiente di normalizzazione*, la cui conoscenza risulta indispensabile per la lettura di tali diagrammi.

Data l'estrema aleatorietà che caratterizza il fenomeno sismico risulta utile, nella scelta degli accelerogrammi, rifarsi alla classificazione in gruppi di sismi aventi le stesse caratteristiche, di cui si è fatto cenno al par. I.5.

A titolo di esempio sono riportati nelle figg. 20.2, 21.2 e 22.2 gli spettri di risposta medi normalizzati, in termini di velocità, di spostamenti e di accelerazioni, elaborati da Housner per un certo numero di sismi appartenenti al II gruppo, ovvero terremoti di tipo californiano*.

* Il coefficiente di normalizzazione dello spettro di risposta in termini di accelerazione è 2,7.

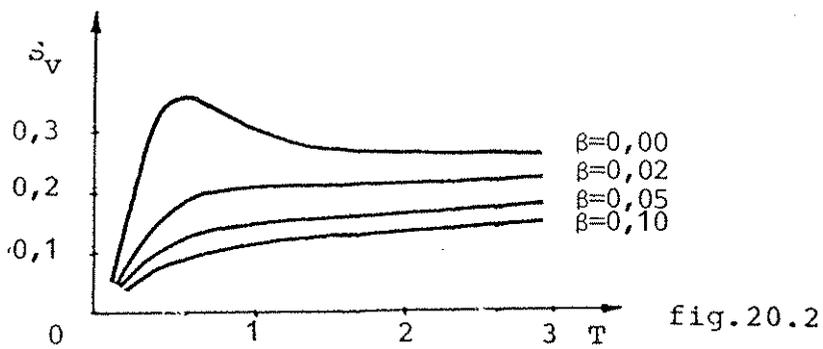


fig.20.2

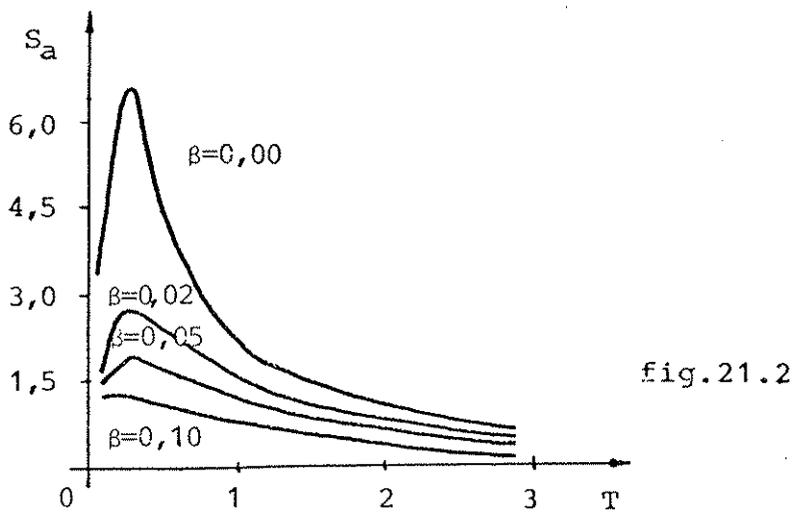


fig.21.2

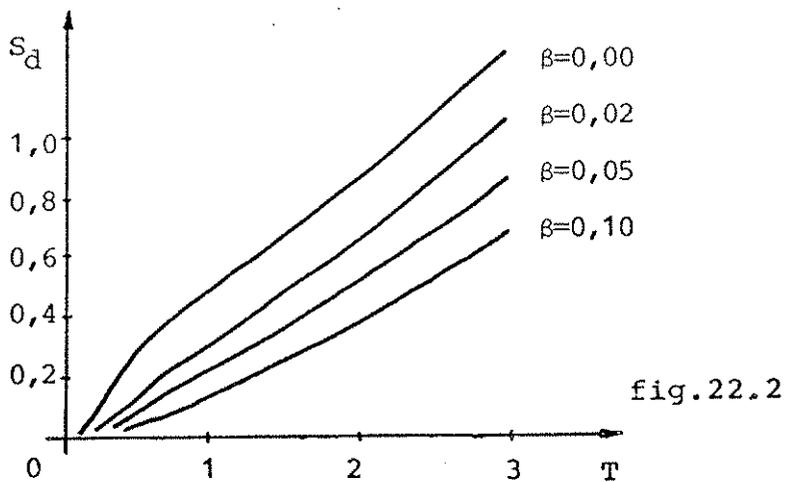


fig.22.2

L'esame di tali spettri consente di fare alcune alcune considerazioni legate a tali tipi di sismi:

- i sistemi reali (e dunque non conservativi) presentano una velocità massima quasi costante al variare di T nell'ambito di valori non troppo bassi;
- l'accelerazione massima subita da oscillatori con smorzamento variabile fra il 2% e il 5% é compresa fra 0,73 g e 0,50 g circa e si verifica comunque per valori del periodo proprio di oscillazione $T \approx 0,35$ sec.;
- per $T=0$, ovvero nel caso di oscillatore infinitamente rigido, tutte le curve dello spettro di risposta in termini di accelerazione tendono ad un valore unico che rappresenta l'accelerazione massima del terreno;
- le strutture più cimentate dal sisma sono quelle più rigide, diminuendo, all'aumentare della deformabilità, l'accelerazione massima e dunque la massima forza d'inerzia cui sono sottoposte ;
- gli spostamenti massimi del sistema crescono con legge pressoché lineare all'aumentare del periodo proprio di oscillazione; strutture più deformabili subiscono dunque accelerazioni minori ma spostamenti maggiori.

III) - DINAMICA LINEARE DEI SISTEMI AVENTI NUMERO FINITO DI GRADI DI LIBERTA'.

Si consideri un sistema discreto dotato di un numero finito n di gradi di libertà : in particolare supponiamo il sistema costituito dalle masse $M_1, \dots, M_i, \dots, M_n$ collegate fra loro e con il suolo da vincoli elastici di costanti K_{ij} e da vincoli viscosi di coefficienti h_{ij} . Assunti quali gradi di libertà, ovvero quali i_j coordinate libere, gli spostamenti s_i delle masse M_i , la generica configurazione deformata assunta dal sistema nel suo moto risulterà definita dal vettore spostamento

$$\{s\} = \{s_1, \dots, s_i, \dots, s_n\}$$

le cui componenti rappresentano appunto gli spostamenti delle n masse.

Detta :

p_i la sollecitazione esterna

applicata alla generica massa M_i ed indicando con :

$p_i^{(m)}$ la forza d'inerzia

$p_i^{(h)}$ la forza dissipativa

$p_i^{(k)}$ la forza elastica

che risultano agenti sulla stessa massa per effetto dello spostamento s_i , l'equazione del moto della massa i -ma ovvero la legge con cui varia nel tempo l'incognita $s_i(t)$ si ottiene, per il principio di d'Alambert, scrivendo l'equazione dell'equilibrio dinamico di M_i , all'istante t nella direzione di s_i :

$$p_i^{(m)} + p_i^{(h)} + p_i^{(k)} = p_i$$

- gli elementi strutturali deformabili siano caratterizzati da elasticità lineare, ovvero seguano la legge di Hooke;
- le azioni dissipative o smorzanti siano proporzionali alla prima potenza della velocità secondo la ipotesi di Kelvin;
- l'eccitazione esterna possa scindersi in più condizioni di carico costituite da forze sincrone ma indipendenti dal moto della struttura.

Al fine di pervenire ad espressioni più significative, dal punto di vista operativo, delle equazioni del moto si esplicitano di seguito i termini della equazione vettoriale (3.1).

III.1) - VETTORE D'INERZIA.

Tale vettore ha per componenti le n forze di inerzia $p_1^{(m)}, \dots, p_n^{(m)}$ che nascono per effetto delle accelerazioni $\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_n$ applicate alle masse M_1, \dots, M_n .

La generica forza d'inerzia $p_i^{(m)}$ applicata alla massa i -ma nel caso di sistema ad n gradi di libertà non dipenderà in genere dalla sola accelerazione \ddot{x}_i subita dalla massa M_i (come accade nel caso dell'oscillatore semplice) ma risulterà essere una combinazione lineare delle n accelerazioni $\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_n$ tramite i coefficienti m_{ij} :

$$p_i^{(m)} = \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{x}_j$$

ovvero in forma più esplicita :

$$p_i^{(m)} = m_{i1} \ddot{x}_1 + \dots + m_{in} \ddot{x}_n$$

ove il significato fisico del generico coefficiente m_{ij} è quello di forza d'inerzia applicata alla

massa M_i per effetto dell'accelerazione $\ddot{x}_j = 1$.

Le n forze d'inerzia applicate alle masse del sistema varranno dunque :

$$p_1^{(m)} = m_{11} \ddot{x}_1 + \dots + m_{1n} \ddot{x}_n$$

.....

$$p_i^{(m)} = m_{i1} \ddot{x}_1 + \dots + m_{in} \ddot{x}_n$$

.....

$$p_n^{(m)} = m_{n1} \ddot{x}_1 + \dots + m_{nn} \ddot{x}_n$$

Il vettore d'inerzia potrà assumere allora la forma :

$$\{p^{(m)}\} = \begin{bmatrix} p_1^{(m)} \\ \dots \\ \dots \\ p_n^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} \dots m_{1j} \dots m_{1n} \\ \dots \\ m_{i1} \dots m_{ij} \dots m_{in} \\ \dots \\ m_{n1} \dots m_{nj} \dots m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \dots \\ \ddot{x}_i \\ \dots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} = [M] \{\ddot{x}\}$$

avendo indicato con :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} \dots m_{1j} \dots m_{1n} \\ \dots \\ m_{i1} \dots m_{ij} \dots m_{in} \\ \dots \\ m_{n1} \dots m_{nj} \dots m_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{la matrice di massa}$$

e con :

$$\{\ddot{x}\} = \{\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_n\} \quad \text{il vettore accelerazione}$$

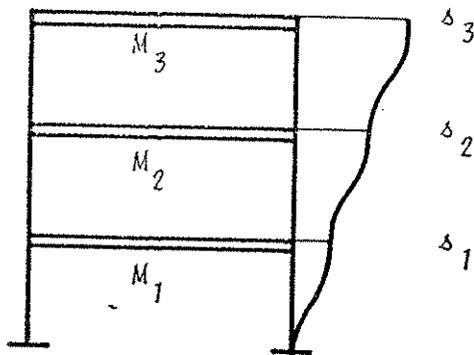
Si osservi che la matrice di massa, letta per co-

lonne, fornisce alla colonna j il contributo che l'accelerazione \ddot{s}_j unitaria dà alle forze d'inerzia applicate alle n masse quando risultino nulle le altre accelerazioni \ddot{s}_i per $i \neq j$, mentre letta per righe fornisce alla riga i il contributo che le accelerazioni $\ddot{s}_1, \dots, \ddot{s}_n$ unitarie applicate alle n masse danno alla forza d'inerzia applicata alla massa M_i .

Per tale motivo risulta agevole costruire la matrice $[M]$ per colonne: la colonna j -ma si otterrà determinando le forze d'inerzia che nascono nelle masse M_1, \dots, M_n per effetto delle accelerazioni $\ddot{s}_j = 1$ ed $\ddot{s}_i = 0$ con $i \neq j$.

A maggior chiarimento di quanto detto si riportano di seguito due classici esempi riguardanti la costruzione della matrice di massa per un telaio piano incastrato ad una campata e tre piani, di masse rispettivamente M_1, M_2, M_3 : nell'ipotesi di inestensibilità delle aste, di traversi rigidi flessionalmente e di ritti deformabili flessionalmente, è possibile assumere quali incognite del moto, ovvero quali coordinate libere, gli spostamenti di piano $\delta_1, \delta_2, \delta_3$.

1° CASO : siano $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ gli spostamenti assoluti di piano.



Assumendo per le accelerazioni :

$$\ddot{x}_1 = 1 \quad \ddot{x}_2 = 0 \quad \ddot{x}_3 = 0$$

le forze d'inerzia applicate ai tre piani valgono:

$$m_{11} = M_1 \quad m_{21} = 0 \quad m_{31} = 0$$

Per : $\ddot{x}_1 = 0 \quad \ddot{x}_2 = 0 \quad \ddot{x}_3 = 0$

risulta: $m_{12} = 0 \quad m_{22} = M_2 \quad m_{32} = 0$

Per : $\ddot{x}_1 = 0 \quad \ddot{x}_2 = 0 \quad \ddot{x}_3 = 1$

risulta: $m_{13} = 0 \quad m_{23} = 0 \quad m_{33} = M_3$

La matrice di massa si scrive dunque :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix}$$

Nel caso generale di n piani, assumendo quali in cognite gli spostamenti assoluti di piano, la matrice di massa risulta diagonale e gli elementi della diagonale principale sono le masse agli n piani :

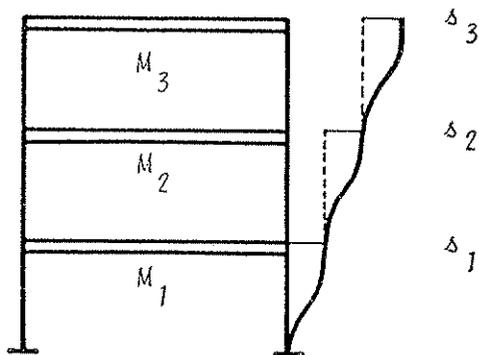
$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & M_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & M_n \end{bmatrix}$$

Con tale scelta delle incognite , dunque, le forze d'inertzia relative ad ogni piano dipendono dalla sola accelerazione applicata a quel piano:

$$\begin{aligned}
 p_1^{(m)} &= M_1 \ddot{\delta}_1 \\
 p_2^{(m)} &= M_2 \ddot{\delta}_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 p_i^{(m)} &= M_i \ddot{\delta}_i \\
 &\dots\dots\dots \\
 p_{n-1}^{(m)} &= M_{n-1} \ddot{\delta}_{n-1} \\
 p_n^{(m)} &= M_n \ddot{\delta}_n
 \end{aligned}$$

Ciò si esprime altresì affermando che le forze di inertzia, in tal caso, risultano *disaccoppiate*.

2^o CASO : siano $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ gli spostamenti *relativi* di piano.



Assumendo per le accelerazioni :

$$\ddot{\delta}_1 = 1 \qquad \ddot{\delta}_2 = 0 \qquad \ddot{\delta}_3 = 0$$

le forze d'inerzia applicate ad ogni piano valgono in tal caso :

$$m_{11} = M_1 + M_2 + M_3 ; \quad m_{21} = M_2 + M_3 ; \quad m_{31} = M_3$$

Per : $\ddot{x}_1 = 0 \quad \ddot{x}_2 = 1 \quad \ddot{x}_3 = 0$
 risulta : $m_{21} = M_2 + M_3 \quad m_{22} = M_2 + M_3 \quad m_{23} = M_3$

Per : $\ddot{x}_1 = 0 \quad \ddot{x}_2 = 0 \quad \ddot{x}_3 = 1$
 risulta : $m_{31} = M_3 \quad m_{32} = M_3 \quad m_{33} = M_3$

La matrice di massa assume così la forma :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 + M_2 + M_3 & M_2 + M_3 & M_3 \\ M_2 + M_3 & M_2 + M_3 & M_3 \\ M_3 & M_3 & M_3 \end{bmatrix}$$

Nel caso generale di telaio ad n piani, avendo assunto quali coordinate libere gli spostamenti relativi di piano, la matrice di massa sarà completa e del tipo :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 + M_2 + \dots + M_{n-1} + M_n & M_2 + \dots + M_{n-1} + M_n & \dots & M_{n-1} + M_n & M_n \\ M_2 + \dots + M_{n-1} + M_n & M_2 + \dots + M_{n-1} + M_n & \dots & M_{n-1} + M_n & M_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n-1} + M_n & M_{n-1} + M_n & \dots & M_{n-1} + M_n & M_n \\ M_n & M_n & \dots & M_n & M_n \end{bmatrix}$$

Con tale scelta delle incognite dunque le forze

d'inerzia relative ad ogni piano dipendono dalle accelerazioni applicate a tutti i piani come bene si osserva esplicitando le espressioni del vettore d'inerzia :

$$p_1^{(m)} = (M_1 + M_2 + \dots + M_{n-1} + M_n) \ddot{s}_1 + (M_2 + \dots + M_{n-1} + M_n) \ddot{s}_2 + \dots + (M_{n-1} + M_n) \ddot{s}_{n-1} + M_n \ddot{s}_n$$

$$p_2^{(m)} = (M_2 + \dots + M_{n-1} + M_n) \ddot{s}_1 + (M_2 + \dots + M_{n-1} + M_n) \ddot{s}_2 + \dots + (M_{n-1} + M_n) \ddot{s}_{n-1} + M_n \ddot{s}_n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$p_{n-1}^{(m)} = (M_{n-1} + M_n) \ddot{s}_1 + (M_{n-1} + M_n) \ddot{s}_2 + \dots + (M_{n-1} + M_n) \ddot{s}_{n-1} + M_n \ddot{s}_n$$

$$p_n^{(m)} = M_n \ddot{s}_1 + M_n \ddot{s}_2 + \dots + M_n \ddot{s}_{n-1} + M_n \ddot{s}_n$$

III.2) - VETTORE DI SMORZAMENTO.

Tale vettore ha per componenti le n reazioni viscosse $p_1^{(h)}, \dots, p_n^{(h)}$ che nascono nel sistema per effetto delle velocità $\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_n$ applicate alle masse M_1, \dots, M_n .

La generica reazione viscosa applicata alla massa i -ma non dipende in genere dalla sola velocità \dot{s}_i ma risulta essere una combinazione lineare delle n velocità $\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_n$ tramite i coefficienti h_{ij} :

$$p_i^{(h)} = \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{s}_j$$

ovvero in forma più esplicita :

$$p_i^{(h)} = h_{i1} \dot{s}_1 + \dots + h_{in} \dot{s}_n$$

ove il significato del generico coefficiente h_{ij} è quello di reazione viscosa applicata alla massa M_i per effetto della velocità $\dot{s}_j=1$.

Si osservi che la matrice di smorzamento letta per colonne fornisce alla colonna j il contributo della velocità \dot{s}_j unitaria alle reazioni smorzanti applicate alle n masse quando risultino nulle le altre velocità \dot{s}_i per $i \neq j$, mentre letta per righe fornisce alla riga i il contributo che le velocità $\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_n$ unitarie applicate alle n masse danno alla reazione smorzante applicata alla massa M_i .

III.3) - VETTORE DI ELASTICITA'.

Tale vettore ha per componenti le n reazioni elastiche $p_1^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}$ che nascono nel sistema quando le masse M_1, \dots, M_n subiscono gli spostamenti s_1, \dots, s_n .

La generica reazione elastica applicata alla massa i -ma non dipenderà, in generale, dal solo spostamento s_i ma sarà combinazione lineare degli n spostamenti s_1, \dots, s_n tramite i coefficienti

k_{ij} :

$$p_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n m_{ij} s_j$$

ovvero esplicitando la sommatoria :

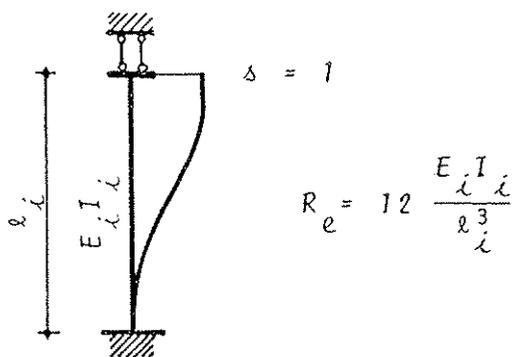
$$p_i^{(k)} = k_{i1} s_1 + \dots + k_{in} s_n$$

ove il generico coefficiente k_{ij} rappresenta la reazione elastica applicata alla massa M_i per effetto dello spostamento $s_j = 1$.

Le n reazioni elastiche applicate al sistema si scrivono dunque :

cate alle n masse quando risultino nulli tutti gli altri spostamenti δ_i per $i \neq j$, mentre la stessa $[K]$ letta per righe fornisce alla riga i il contributo che gli spostamenti unitari $\delta_1, \dots, \delta_n$ danno alla reazione elastica applicata alla massa i -ma. E' senz'altro interessante anche in questo caso riportare due classici esempi di costruzione "per colonne" della matrice di elasticità per un telaio piano incastrato ad una campata e tre livelli nelle ipotesi di indeformabilità estensionale di tutte le aste, ritto deformabili flessionalmente e trasversi flessionalmente rigidi; in tali ipotesi il sistema ha tre soli gradi di libertà e si possono assumere come incognite gli spostamenti di piano δ_i .

Indicando per il generico ritto al piano i -mo con l_i l'altezza, con E_i il modulo di elasticità normale, con I_i il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico ortogonale al piano del telaio, la reazione elastica che nasce per effetto di uno spostamento di piano unitario vale per ogni ritto :



1^o CASO : siano $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ gli spostamenti assoluti di piano.

Volendo costruire per colonne la matrice $[K]$, per:

$$\delta_3 = 0$$

$$\delta_2 = 0$$

$$\delta_1 = 1$$

le reazioni elastiche ai piani valgono :

$$k_{11} = 2 \cdot 12 \frac{E_1 I_1}{l_1^3} + 2 \cdot 12 \frac{E_2 I_2}{l_2^3}$$

$$k_{21} = -2 \cdot 12 \frac{E_2 I_2}{l_2^3}$$

$$k_{31} = 0$$

Assumendo invece :

$$\delta_3 = 0$$

$$\delta_2 = 1$$

$$\delta_1 = 0$$

risulta :

$$k_{12} = -2 \cdot 12 \frac{E_2 I_2}{l_2^3}$$

$$k_{22} = 2 \cdot 12 \frac{E_2 I_2}{l_2^3} + 2 \cdot 12 \frac{E_3 I_3}{l_3^3}$$

$$k_{32} = -2 \cdot 12 \frac{E_3 I_3}{l_3^3}$$

Infine per :

$$\delta_3 = 1$$

$$\delta_2 = 0$$

$$\delta_1 = 0$$

le reazioni elastiche valgono :

$$k_{13} = 0$$

$$k_{23} = -2 \cdot 12 \frac{E_3 I_3}{l_3^3}$$

$$k_{33} = 2 \cdot 12 \frac{E_3 I_3}{l_3^3}$$

La matrice di elasticità assume in tal caso la forma :

$$[K] = \begin{bmatrix} 24 \left(\frac{E_1 I_1}{l_1^3} + \frac{E_2 I_2}{l_2^3} \right) & -24 \frac{E_2 I_2}{l_2^3} & 0 \\ -24 \frac{E_2 I_2}{l_2^3} & 24 \left(\frac{E_2 I_2}{l_2^3} + \frac{E_3 I_3}{l_3^3} \right) & -24 \frac{E_3 I_3}{l_3^3} \\ 0 & -24 \frac{E_3 I_3}{l_3^3} & 24 \frac{E_3 I_3}{l_3^3} \end{bmatrix}$$

Si osservi che rimuovendo l'ipotesi di rigidità flessionale dei traversi la matrice $[K]$ invece che "a banda" risulta "completa".

2^o CASO : siano s_1, s_2, s_3 gli spostamenti relativi
vi di piano .

Volendo costruire la matrice $[K]$ sempre per colonne,
per :

$$s_3 = 0$$

$$s_2 = 0$$

$$s_1 = 1$$

le reazioni elastiche valgono :

$$k_{11} = 2 \cdot 12 \frac{E I_1}{l_1^3}$$

$$k_{21} = 0$$

$$k_{31} = 0$$

Ponendo invece :

$$s_3 = 0$$

$$s_2 = 1$$

$$s_1 = 0$$

risulta :

$$k_{12} = 0$$

$$k_{22} = 2 \cdot 12 \frac{E I_2}{l_2^3}$$

$$k_{32} = 0$$

Assumendo infine :

$$\delta_3 = 1$$

$$\delta_2 = 0$$

$$\delta_1 = 0$$

si ha :

$$k_{13} = 0$$

$$k_{23} = 0$$

$$k_{33} = 2 \cdot 12 \frac{E_3 I_3}{l_3^3}$$

La matrice di elasticità assume dunque la forma :

$$[K] = \begin{bmatrix} 24 \frac{E_1 I_1}{l_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & 24 \frac{E_2 I_2}{l_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & 24 \frac{E_3 I_3}{l_3^3} \end{bmatrix}$$

Essendo la matrice diagonale le reazioni elastiche ad ogni piano dipendono dal solo spostamento relativo di piano e dunque le componenti del vettore elasticità presentano ognuna una sola incognita : ciò si esprime anche dicendo che con tale

scelta delle incognite si ottiene un disaccoppiamento reattivo.

III.4) - EQUAZIONI DEL MOTO.

Potendosi porre, per quanto detto nei paragrafi precedenti :

$$\{p^{(m)}\} = [M] \{\ddot{s}\}$$

$$\{p^{(h)}\} = [H] \{\dot{s}\}$$

$$\{p^{(k)}\} = [K] \{s\}$$

l'equazione vettoriale (3.1) si può scrivere :

$$[M] \{\ddot{s}\} + [H] \{\dot{s}\} + [K] \{s\} = \{p\} \quad (3.2)$$

che, formalmente analoga all'equazione del moto dell'oscillatore semplice, esprime in forma compatta il sistema di equazioni che regge il problema delle oscillazioni *forzate* di un oscillatore avente numero finito di gradi di libertà e sollecitato dal vettore di carico $\{p\}$.

Quando risulti $\{p\} = \{0\}$, ovvero quando sia nulla la sollecitazione esterna, le equazioni del moto si presentano nella forma

$$[M] \{\ddot{s}\} + [H] \{\dot{s}\} + [K] \{s\} = \{0\}$$

e le oscillazioni si dicono *libere*.

Anche nel caso del multioscillatore la soluzione delle equazioni del moto si può ottenere come somma dell'integrale generale delle equazioni omogenee associate e di un integrale particolare delle equazioni complete, ovvero risolvendo prima il problema delle oscillazioni libere.

Come si vede dunque, a meno del diverso significato dei simboli adottati, il problema del moto dell'oscillatore ad n gradi di libertà risulta in tutto analogo a quello del moto di un oscillatore semplice.

III.5) - OSCILLAZIONI LIBERE NON SMORZATE.

Per i motivi di cui si dirà nel seguito risulta interessante studiare preliminarmente il problema delle oscillazioni libere in assenza di effetti smorzanti che risulta retto dall'equazione :

$$[M] \{\ddot{s}\} + [K] \{s\} = \{0\} \quad (3.3)$$

ottenuta ponendo nella (3.2) :

$$[H] = \{0\} \quad e \quad \{p\} = \{0\}$$

L'integrale generale della (3.3) può ottenersi come combinazione lineare di n integrali particolari del tipo :

$$\{s_i\} = \{\psi_i\} \text{sen}(\omega_i t + \theta_i) \quad (3.4)$$

essendo $\{s_i\}$ il vettore spostamento incognito di componenti $\{s_{i1}, \dots, s_{in}\}$ e $\{\psi_i\}$ il vettore di ampiezza del moto di componenti costanti $\{\psi_{i1}, \dots, \psi_{in}\}$, ω_i la pulsazione del moto, θ_i la fase.

Sostituendo la (3.4) e la sua derivata seconda nella equazione del moto (3.3) si ottiene :

$$-[M] \{\psi_i\} \omega_i^2 \text{sen}(\omega_i t + \theta_i) + [K] \{\psi_i\} \text{sen}(\omega_i t + \theta_i) = \{0\}$$

e dovendo tale eguaglianza essere verificata in qualunque istante t dovrà risultare :

$$([K] - \omega_i^2 [M]) \{\psi_i\} = \{0\} \quad (3.5)$$

$\{\psi_1\}, \dots, \{\psi_n\}$ soluzioni del sistema di equazioni (3.5)* ed esisteranno quindi n integrali particolari delle equazioni del moto (3.3) del tipo

$$\{s_i\} = \{\psi_i\} \text{sen}(\omega_i t + \theta_i) \quad (3.4)$$

Tali soluzioni particolari, in numero pari ai gradi di libertà, rappresentano i modi principali di vibrare del sistema.

Esplicitando la (3.4) nelle sue componenti :

$$s_{i1} = \psi_{i1} \text{sen}(\omega_i t + \theta_i)$$

.

$$s_{in} = \psi_{in} \text{sen}(\omega_i t + \theta_i)$$

si può osservare che in corrispondenza del generico integrale particolare corrispondente a ω_i , le n masse del sistema oscillano tutte con moti armonici aventi la medesima pulsazione ω_i e fase θ_i , ma ampiezze, definite dalle componenti ψ_{ij} dell'autovettore $\{\psi_i\}$ corrispondente a ω_i , differenti in valore epperò aventi rapporti fra loro costanti al variare del tempo: ciò implica che le oscillazioni del sistema avvengano, in tali casi, senza variazione di forma durante il moto. L'autovettore $\{\psi_i\}$ associato ad ogni autovalore ω_i^2 definisce dunque con le sue componenti una "forma" di oscillazioni ovvero un modo principale o naturale di vibrazione del sistema : ma può parlarsi solamente di "modo deformativo" in quanto le componenti $\psi_{i1}, \dots, \psi_{in}$ di $\{\psi_i\}$, risultando definite a me-

* Se i gradi di libertà fossero infiniti, infiniti risulterebbero gli autovalori e gli infiniti autovettori darebbero luogo ad un'autofunzione.

no di una costante moltiplicativa, non esprimono i valori effettivi delle componenti dello spostamento ma solamente i loro mutui rapporti.

Tale indeterminazione si può comunque eliminare normalizzando l'autovettore ovvero modificandone le componenti di tal guisa che il modulo risulti unitario oppure dividendo tutte le componenti per il valore della maggiore.

In definitiva quando un sistema oscilla secondo un modo principale la forma si mantiene costante nel tempo a meno della sola ampiezza che varia con legge armonica.

Ogni struttura dotata di n gradi di libertà possiede dunque n modi naturali di oscillazione che si ottengono studiando il moto del sistema in assenza di sollecitazioni esterne e di effetti smorzanti; ciascuno di tali modi risulta caratterizzato da una pulsazione naturale ω_i^2 dalla quale dipendono l'andamento nel tempo del moto delle masse del sistema e da un autovettore $\{\psi_i\}$ al quale sono legate le ampiezze delle oscillazioni.

I valori delle n pulsazioni proprie ω_i^2 poco differiscono da quelli che avrebbe lo stesso sistema in presenza di effetti smorzanti e ciò risultando, per β piccolo $\omega_0 \approx \omega$.

L'integrale generale della (3.3) può dunque essere espresso come combinazione lineare degli n integrali particolari (3.4) mediante i coefficienti $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n$:

$$\{s\} = \sum_1^n \bar{q}_i \{s_i\}$$

ovvero per la (3.4) :

$$\{s\} = \sum_1^n \bar{q}_i \{\psi_i\} \text{sen}(\omega_i t + \theta_i)$$

Le oscillazioni libere non smorzate di un sistema

Le coordinate principali lungi dal costituire spostamenti del sistema, come avviene per le coordinate libere, rappresentano, invece, il "peso" con cui i singoli modi naturali di vibrazione $\{\psi_i\}$ intervengono nella configurazione dinamica del sistema.

Dalla (3.7) si evince immediatamente che quando il sistema oscilla secondo un modo principale $\{\psi_i\}$ solo la corrispondente coordinata principale q_i risulta diversa da zero.

Indicando con :

$$\{q\} = \{q_1, \dots, q_n\}$$

il vettore colonna le cui componenti sono le coordinate principali del sistema e con

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \dots & \psi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_{n1} & \dots & \psi_{nn} \end{bmatrix}$$

la matrice le cui colonne sono costituite dagli n autovettori del sistema e che per tale motivo prende nome di *matrice modale*, la (3.7) si può scrivere in forma più compatta :

$$\{s\} = [\psi] \{q\} \quad (3.8)$$

Essendo gli autovettori $\{\psi_i\}$ sempre linearmente indipendenti risulta che il determinante della matrice modale è sempre nullo e dunque la matrice invertibile.

Si osservi che la matrice modale $[\psi]$, che costituisce la matrice di trasformazione fra coordinate libere e coordinate principali, letta per righe fornisce alla riga j lo spostamento totale s_j indotto dalle n coordinate principali q_1, \dots, q_n assunte

unitarie, mentre, letta per colonne, fornisce alla colonna i il contributo offerto dalla coordinata principale $q_i=1$ alle coordinate libere $\delta_1, \dots, \delta_n$.

III.6) - OSCILLAZIONI FORZATE.

L'equazione vettoriale che regge il problema é in tale caso :

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [H]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{p\} \quad (3.2)$$

che dà luogo in generale ad un sistema di n equazioni differenziali ognuna contenente le n componenti incognite del vettore $\{\delta\}$.

Al fine di pervenire invece ad un sistema di equazioni *disaccoppiate*, ovvero contenenti ognuna una sola incognita, é conveniente operare un cambiamento di coordinate tramite la trasformazione lineare definita dalla

$$\{\delta\} = [\psi] \{q\} \quad (3.8)$$

la quale consente di introdurre le coordinate principali q_i al posto delle coordinate libere δ_i .

Ponendo la (3.8) e le sue derivate nella (3.2) si ha :

$$[M][\psi]\{\ddot{q}\} + [H][\psi]\{\dot{q}\} + [K][\psi]\{q\} = \{p\}$$

e premoltiplicando per $[\psi]^T$ entrambi i membri :

$$[\psi]^T [M] [\psi] \{\ddot{q}\} + [\psi]^T [H] [\psi] \{\dot{q}\} + [\psi]^T [K] [\psi] \{q\} = [\psi]^T \{p\}$$

Posto : $[\psi]^T [M] [\psi] = [M^*]$

$$[\psi]^T [H] [\psi] = [H^*]$$

$$[\psi]^T [K] [\psi] = [K^*]$$

l'equazione del moto (3.2) si scrive :

$$[M^{**}]\{\ddot{q}\} + [H^{**}]\{\dot{q}\} + [K^{**}]\{q\} = [\psi]^T\{p\}$$

Se le matrici $[M]$, $[H]$, $[K]$ sono simmetriche per la proprietà di ortogonalità degli autovettori le $[M^{**}]$, $[H^{**}]$, $[K^{**}]$ risultano diagonali e dunque le equazioni del sistema "disaccoppiate" contenendo ciascuna una sola incognita : in tale maniera lo studio del sistema ad n gradi di libertà si riduce a quello di n oscillatori semplici.

Riguardo la struttura delle matrici di massa, di smorzamento e di elasticità va osservato che mentre le $[M]$ e $[K]$ risultano simmetriche sempre lo stesso non accade per la $[H]$. Per ovviare a ciò si può operare secondo tre procedure distinte :

I) Considerato il basso valore degli effetti smorzanti, si possono studiare le oscillazioni forzate del sistema in assenza di smorzamenti e modificarne quindi i risultati tenendo conto delle azioni dissipative, a posteriori, moltiplicando i risultati per il fattore $e^{-\beta\omega t^{(*)}}$.

II) Si può rendere la matrice di smorzamento $[H]$ diagonale annullando tutti gli elementi che non si trovino sulla diagonale principale: ciò è accettabile in considerazione del basso valore degli effetti smorzanti e delle incertezze che ne riguardano la determinazione.

III) Si può esprimere la matrice $[H]$ come combinazione lineare di $[M]$ e $[K]$, ovvero della sola $[K]$ per gli edifici shear-type, che sono matrici simmetriche; tale artificio è però discutibile sotto il profilo fisico in quanto non solo gli smorzamenti sono spesso indipendenti dalle rigidità ma, anche quando sussista con questi una dipendenza, essa non è certamente lineare.

(*) Tale modo di operare è giustificato dal fatto che per valori piccoli di β risulta $\omega_0 \approx \omega$.

I METODO : trascurando gli effetti dissipativi si studiano le oscillazioni forzate del sistema non smorzato.

L'equazione vettoriale del moto si scrive in tale caso :

$$[M^*]\{\ddot{q}\} + [K^*]\{q\} = [\psi]^T\{p\}$$

Premoltiplicando entrambi i membri per $[M^*]^{-1}$ che é ancora una matrice diagonale e ricordando che $[M^*]^{-1}[M^*] = [I]$, essendo $[I]$ la matrice unitaria, si ha :

$$\{\ddot{q}\} + [M^*]^{-1}[K^*]\{q\} = [M^*]^{-1}[\psi]^T\{p\} \quad (3.9)$$

Ma il prodotto $[M^*]^{-1}[K^*]$ risulta essere ancora una matrice diagonale che si denota con $[\Omega^2]$ ed i cui elementi diversi da zero coincidono con le pulsazioni proprie del sistema ovvero con gli n autovalori ω_i^2 :

$$[M^*]^{-1}[K^*] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix} = [\Omega^2]$$

per cui l'equazione (3.9) si può scrivere :

$$\{\ddot{q}\} + [\Omega^2]\{q\} = [M^*]^{-1}[\psi]^T\{p\} \quad (3.10)$$

Nel caso di sollecitazioni sismiche il vettore di carico $\{p\}$ é costituito dalla forza di inerzia indotta nelle masse M_1, \dots, M_n del sistema dalla accelerazione \ddot{u} del terreno, ovvero, indicando con

$$\{\mathcal{M}_0\} = \{M_1, \dots, M_n\}$$

$$g_i = \frac{[\psi_{i1} \dots \psi_{in}] \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_n \end{bmatrix}}{[\psi_{i1} \dots \psi_{in}] \cdot \begin{bmatrix} M_1 0 \dots 0 \\ 0 M_2 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 0 \dots M_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_{in} \end{bmatrix}}$$

da cui :

$$g_i = \frac{\sum_j M_j \psi_{ij}}{\sum_j M_j \psi_{ij}^2}$$

essendo M_j la generica massa del sistema e ψ_{ij} la corrispondente componente dell'autovettore $\{g\}$.

II METODO : si assuma diagonale la matrice di smorzamento $[H^*]$ avente per elementi non nulli i coefficienti di smorzamento h_i .

L'equazione vettoriale del moto é in questo caso quella completa :

$$[M^*]\{\ddot{q}\} + [H^*]\{\dot{q}\} + [K^*]\{q\} = [\psi]^T\{p\}$$

e nel caso di sollecitazioni sismiche per la (3.11) si scrive :

$$[M^*]\{\ddot{q}\} + [H^*]\{\dot{q}\} + [K^*]\{q\} = [\psi]^T\{\mathcal{M}\}\ddot{u}$$

ovvero premoltiplicando ambo i membri per $[M^*]^{-1}$:

Anche in tale caso si perviene dunque ad un sistema di n equazioni contenenti ognuna una sola incognita e nelle quali i parametri $\beta_i, \omega_i, g_i, \ddot{u}$ hanno i significati oramai noti con l'unica precisazione che nelle pratiche applicazioni i fattori di smorzamento β_i per il caso di strutture costruite con un unico materiale si assumono tutti uguali. Si noti come la generica equazione (3.13)

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = g_i \ddot{u}$$

possa ottenersi direttamente dalla generica (3.15):

$$\ddot{q}_i + 2\beta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = g_i \ddot{u}$$

per smorzamento nullo, ovvero ponendo $\beta_i = 0$.

E' interessante osservare altresì come tale ultima equazione, con qualche sostituzione, possa porsi nella forma classica già studiata al cap. II. Essendo infatti :

$$2\beta_i \omega_i = \frac{h_i}{m_i}$$

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i}$$

la detta equazione può scriversi :

$$m_i \ddot{q}_i + h_i \dot{q}_i + k_i q_i = m_i g_i \ddot{u}$$

che rappresenta come è noto l'equazione del moto di un oscillatore dotato di un solo grado di libertà avente massa m_i , coefficiente di smorzamento h_i , costante elastica k_i , e sollecitato dalla accelerazione $g_i \ddot{u}$.

In conclusione dunque, operando nelle equazioni del moto la sostituzione delle coordinate libere

con le coordinate principali tramite la relazione (3.8) e con le approssimazioni riguardanti gli effetti smorzanti di cui si è detto, è possibile ridurre lo studio della dinamica di un sistema ad n gradi di libertà a quello di n oscillatori semplici: per fare ciò è necessario studiare preliminarmente le oscillazioni libere non smorzate al fine di determinare le n pulsazioni proprie $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$ e gli n autovettori $\{\psi_1\}, \dots, \{\psi_n\}$ corrispondenti agli n modi naturali di vibrazione; note quindi le masse M_1, \dots, M_n del sistema, la accelerazione \ddot{u} del terreno ed eventualmente il fattore di smorzamento β è possibile tramite le (3.13) o le (3.15) pervenire allo studio di n oscillatori semplici, corrispondenti agli n autovalori, sollecitati da accelerazioni pari a g_i volte quella \ddot{u} del terreno. Tale modo di studiare il moto del multioscillatore prende il nome di *analisi modale*.

III.7) - ANALISI DINAMICA.

Come si è visto nel precedente paragrafo la analisi modale consente di ridurre lo studio della dinamica di un sistema avente n gradi di libertà allo studio del moto di n oscillatori semplici le cui equazioni siano rappresentate dalle (3.13) o dalle più complete (3.15).

Si consideri il generico di tali oscillatori semplici il cui moto è retto dalla equazione :

$$\ddot{q}_i + 2\beta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = g_i \ddot{u}$$

ovvero dalla equivalente :

$$m_i \ddot{q}_i + h_i \dot{q}_i + k_i q_i = m_i g_i \ddot{u}$$

La risposta del sistema è determinabile in tal caso tramite l'integrale di Duhamel :

$$q_i = \frac{1}{\omega_i} g_i \int_0^t \ddot{u}(\tau) e^{-\beta_i \omega_i (t-\tau)} \text{sen } \omega_i (t-\tau) d\tau = \frac{g_i}{\omega_i} v_i(t) \quad (3.16)$$

avendo assunto la pulsazione propria ω_i calcolata in assenza di smorzamento uguale alla pulsazione smorzata ed avendo indicato con $V_i(t)$ il valore dell'integrale al tempo t .

Noti gli spettri di risposta in termini di spostamento, velocità e accelerazione, ed indicando, come di consueto, con S_{d_i} , S_{v_i} , S_{a_i} rispettivamente lo spostamento spettrale, la velocità spettrale e l'accelerazione spettrale ricavate in funzione di $T_i = 2\pi/\omega_i$ e β_i è possibile tramite la (3.16) determinare il massimo valore assunto dalla coordinata principale q_i e dalla sua derivata seconda \ddot{q}_i :

$$q_{i\max} = g_i S_{d_i} = g_i \frac{S_{v_i}}{\omega_i} = g_i \frac{S_{a_i}}{\omega_i^2}$$

$$\ddot{q}_{i\max} = \omega_i^2 q_{i\max} = g_i \omega_i^2 S_{d_i} = g_i \omega_i S_{v_i} = g_i S_{a_i}$$

Ricordando la trasformazione lineare che consente il cambiamento di coordinate :

$$\{\delta\} = [\psi] \{q\} \quad (3.8)$$

è possibile risalire agli spostamenti massimi ed alle accelerazioni massime subite dalle n masse del sistema relativamente alla pulsazione propria ω_i , ovvero all' i -mo modo di vibrare :

$$\{\delta_{i\max}\} = \{\psi_i\} q_{i\max} = \{\psi_i\} g_i \frac{S_{a_i}}{\omega_i^2}$$

$$\{\ddot{\delta}_{i\max}\} = \{\psi_i\} \ddot{q}_{i\max} = \{\psi_i\} g_i S_{a_i}$$

e moltiplicando le accelerazioni massime per le masse si può risalire alle corrispondenti forze di inerzia :

$$\{F_{i\max}\} = [M]\{\ddot{\delta}_{i\max}\} = [M]\{\psi_i\}g_i S a_i \quad (3.17)$$

Mediante la (3.17) dunque é possibile determinare le massime forze di inerzia applicate alle n masse del sistema relativamente ad ognuno degli n modi di vibrare della struttura ovvero ad ognuna delle n pulsazioni naturali $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$.

Indicando con :

$$[F] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1^\circ \text{ modo} & i\text{-mo modo} & n\text{-mo modo} \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_{11} \dots F_{1i} \dots F_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ F_{j1} \dots F_{ji} \dots F_{jn} \\ \dots \dots \dots \\ F_{n1} \dots F_{ni} \dots F_{nn} \end{matrix} \end{matrix}$$

la matrice le cui colonne rappresentano le massime forze d'inerzia relative agli n modi di vibrare del sistema, la forza di inerzia massima applicata alla generica massa M_j si ottiene operando la radice quadrata della somma dei quadrati delle forze relative agli n modi di vibrare :

$$F_{j\max} = \sqrt{F_{j1}^2 + \dots + F_{jn}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n F_{ji}^2}$$

e ciò per tenere conto della circostanza che i valori massimi calcolati non si verificano contemporaneamente.

In maniera del tutto analoga definita la matrice:

$$[S] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1^{\circ} \text{ modo} & & i\text{-mo modo} & & n\text{-mo modo} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1i} & \cdots & \delta_{1n} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \delta_{j1} & \cdots & \delta_{ji} & \cdots & \delta_{jn} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \delta_{n1} & \cdots & \delta_{ni} & \cdots & \delta_{nn} \end{matrix} \end{matrix}$$

le cui colonne rappresentano gli spostamenti massimi relativi agli n modi di vibrare del sistema, lo spostamento massimo della generica massa M_j si ottiene operando la radice quadrata della somma dei quadrati degli spostamenti relativi agli n modi di vibrare :

$$S_{jmax} = \sqrt{\delta_{j1}^2 + \cdots + \delta_{jn}^2} = \sqrt{\sum_i^n \delta_{ji}^2}$$

Il modo di operare descritto in tale paragrafo, che prende nome di *analisi dinamica*, consente dunque di determinare per un sistema discreto avente n gradi di libertà le forze statiche equivalenti $F_{1max}, \dots, F_{nmax}$ ovvero quelle forze che applicate staticamente al sistema riproducono i medesimi effetti dinamici massimi.

Nel caso di strutture costituite da telai piani la normativa vigente consente di prendere in esame i soli primi tre modi propri di vibrazione e di determinare, dunque, le forze statiche equivalenti o gli spostamenti massimi limitatamente ad essi.

E' importante notare che per strutture rigide, ovvero dotate di basso periodo proprio di oscillazione, gli effetti prevalenti sono quelli relativi

al primo modo di vibrare mentre all'aumentare della deformabilità, ovvero del periodo proprio di oscillazione, prevalgono gli effetti indotti dai modi successivi al primo.

Nel caso dunque di una struttura costituita da un telaio piano, diminuendo la rigidità dei pilastri verso l'alto, il primo modo di vibrare verificherà bene i piani bassi, mentre i modi successivi verificheranno quelli alti.

I N D I C E

I) - CENNI DI SISMOLOGIA	pag.	1
I.1) - Struttura del globo terrestre	"	2
I.2) - Genesi dei terremoti	"	3
I.3) - Zone sismiche	"	5
I.4) - Onde sismiche	"	7
I.5) - Misura dell'evento sismico	"	11
I.6) - Registrazione dei terremoti	"	18
II) - DINAMICA LINEARE DEI SISTEMI DISCRETI AD UN GRADO DI LIBERTA'	pag.	21
II.1) - Oscillazioni libere	"	24
II.1.1) - Sistemi conservativi	"	28
II.1.2) - Sistemi a basso smorzam.	"	33
II.1.3) - Sistemi con smorz.critico	"	35
II.1.4) - Sistemi ad elevato smorzam.	"	37
II.2) - Oscillazioni forzate	"	38
II.2.1) - Sollecitazione a gradino	"	39
II.2.2) - Sollecitazione impulsiva	"	44
II.2.3) - Sollecitazione armonica	"	48
II.3) - Sollecitazioni indotte da sismi	"	63

III) - DINAMICA LINEARE DEI SISTEMI AVENTI NUMERO FINITO DI GRADI DI LIBERTA'	pag. 71
III.1)-Vettore d'inerzia	" 73
III.2)-Vettore di smorzamento	" 79
III.3)-Vettore di elasticità	" 81
III.4)-Equazioni del moto	" 88
III.5)-Oscillazioni libere non smorzate	" 89
III.6)-Oscillazioni forzate	" 95
III.7)-Analisi dinamica	" 102

BIBLIOGRAFIA

- I - A. RAITHEL : Seminario di "dinamica delle strutture" tenuto presso l'Istituto di Costruzioni di Ponti dell'Università di Napoli.
- II - M. COMO e G.LANNI : "Elementi di Costruzioni antisismiche"; Cremonese - Roma.
- III - AUTORI VARI : "Ingegneria Sismica"; Springer & Verlag - Wien, N.Y. - C.S.M. n.206
- IV AUTORI VARI : "Ingegneria Antisismica" E.S.A. - Roma.
- V - C. GAVARINI : "Dinamica delle strutture"; E.S.A. - Roma.
- VI - A. CASTIGLIONI : "Introduzione alla dinamica delle strutture" ; Tamburini - Milano.
- VII - N.M.NEWMARK & E.ROSEMBLUETH : "Fundamentals of Earthquake Engineering"; Prentice-Hall.
- VIII - S. Polyahov : "Design of Earthquake Resistant Structures"; Mir Publishers-Moscow.
- IX - "Proceedings of fifth World Conference on Earthquake Engineering", - Rome 1974.

- X - GIANGRECO - CERADINI : "Dinamica e stabilità".
BALDACCI Collana tecnico scientifica per la progettazione di strutture in acciaio - Vol. II B. Italsider
- XI - AUTORI VARI : "Il comportamento delle strutture portanti di acciaio alle azioni sismiche". Monografie n. I; 2, 3; 4. - Italsider.
- XII -AUTORI VARI : "Strutture di acciaio per edifici civili, in zone sismiche". Quaderni tecnici n. 9 e II - Italsider.
- XIII - ROBERT E. DAVID : "Tremblement de terre et constructions a seismiques". UISAA. Serie I/4 - Milano.
- XIV - IDEM M. BIGGS : "Introduction to structural dynamics" Mc Graw-Hill.
- XV - AUTORI VARI : "Le murature in laterizio nelle costruzioni antisismiche" Quaderni sncil - Laterconsult
- XVI - AUTORI VARI : "Missione di studio nelle zone terremotate della Sicilia Occidentale" A.N.C.E. - 1968.
- XVII - AUTORI VARI : "Il terremoto del Friuli del maggio 1976" - L'Industria Italiana del ce

: mento. n.7 - 8 anno1976

XVIII - AUTORI VARI

:"Il terremoto del Friuli
del maggio 1976 - L'In-
dustria delle Costruzio-
ni - Settembre 1976.